M.A. EVGRAFOV

RECUEIL DE PROBLÈMES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

RECUEIL DE PROBLEMES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

M. EVGRAFOV, K. BÉJANOV, Y. SIDOROV,
M. FÉDORUK, M. CHABOUNINE

SOUS LA DIRECTION
DE M. EVGRAFOV

Deuxième édition

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Table des matières

AVANT-PROPOS

Le présent recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques est destiné aux étudiants des facultés de mécanique-mathématiques et de physique des universités et des instituts pédagogiques, de même qu'aux étudiants des établissements d'enseignement supérieur à programme du cours de mathématiques élargi. Dans leur travail, les auteurs se sont appuyés sur l'expérience acquise dans l'enseignement de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'Institut physico-technique de Moscou et à la Faculté de mécanique-mathématiques de l'Université de Moscou.

Le recueil a été composé de la sorte qu'il soit d'une utilisation commode quelle que soit l'organisation du cours, bien que, du point de vue formel, l'exposition de la matière suive approximativement le même ordre que celui du livre « Fonctions analytiques » de M. Evgrafov. Dans ce but, les paragraphes constitutifs de l'ouvrage sont plus ou moins indépendants les uns des autres. Toutes les références aux problèmes des autres sections sont données dans les indications.

Chaque paragraphe est divisé en cycles de problèmes réunis par une idée commune. La fin de chaque cycle est d'habitude réservée aux problèmes plus compliqués. Pour faciliter la tâche du lecteur, les propositions fondamentales et les définitions nécessaires sont données là, où elles sont utilisées. Toutes les indications concernant la résolution des problèmes sont données dans le texte, les résultats étant groupés à la fin de chaque paragraphe.

Une partie importante de problèmes a été rédigée par les auteurs spécialement pour le présent livre. De plus, les auteurs ont utilisé comme sources d'inspiration un grand nombre de manuels et de monographies sur la théorie des fonctions d'une variable complexe. Un certain nombre de problèmes a été emprunté aux recueils de N. Günter et R. Kouzmine, L. Volkovyski, G. Luntz, I. Aramanovitch, de même qu'au recueil de problèmes de Jana Krzyża (Pologne). En outre, on a utilisé les problèmes rédigés entre 1947 et 1968 en tant que compositions de mathématiques par les professeurs de la Chaire de mathématiques de l'Institut physico-technique de Moscou. Un certain nombre de problèmes a été envoyé par A. Goldberg (problèmes 3.16 à 3.22).

La composition et le choix des problèmes ont été répartis entre les auteurs comme suit:

K. Béjanov: §§ 8, 10, 22, 28;
Y. Sidorov: §§ 32, 33, 35 à 37;
M. Fédoruk: §§ 4, 14, 23, 26;
M. Chabounine: §§ 1 à 3, 5, 6, 9, 11, 19 à 21, 27;

(Sidorov, Fédoruk et Chabounine ont travaillé, pour la plupart, de concert, tandis que Béjanov a mené son travail indépendamment).

Les problèmes figurant dans les autres sections du recueil ont été composés et choisis par M. Evgrafov qui a en outre enrichi d'une façon sensible les collections de problèmes présentées par les autres auteurs.

Le travail concernant l'écriture proprement dite du livre a été accompli par M. Evgrafov.

Outre la rédaction générale du présent livre, I. Archon s'est chargé de la vérification d'un grand nombre de problèmes parmi les plus compliqués. Les auteurs lui en expriment leurs vifs remerciements.

Les Auteurs

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

§ 1. Nombres complexes

On appelle *nombres complexes* les objets mathématiques z de la forme $x+iy$, où x et y sont des nombres réels arbitraires, si la notion d'égalité et les opérations d'addition et de multiplication sont définies de la façon suivante:

1. Deux nombres complexes $z_1=x_1+iy_1$ et $z_2=x_2+iy_2$ sont dits égaux si $x_1=x_2$ et $y_1=y_2$.

2. La somme de deux nombres complexes $z_1=x_1+iy_1$ et $z_2=x_2+iy_2$ est représentée par le nombre complexe $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.

3. Le produit de deux nombres complexes $z_1=x_1+iy_1$ et $z_2=x_2+iy_2$ est représenté par le nombre complexe $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

Autrement dit, les nombres complexes sont additionnés et multipliés comme des polynômes par rapport au symbole i, le symbole i^2 étant remplacé par le nombre -1.

On vérifie aisément que l'addition et la multiplication des nombres complexes sont commutatives, associatives et distributives, c'est-à-dire

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \qquad z_1z_2=z_2z_1;$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \qquad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3);$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Le nombre x est appelé *partie réelle* du nombre complexe $z=x+iy$ et se note $\operatorname{Re} z$.

Le nombre y est appelé *partie imaginaire* du nombre complexe $z=x+iy$ et se note $\operatorname{Im} z$.

1.01. Montrer que pour tout nombre complexe $z\neq 0$, il n'existe qu'un seul nombre complexe w satisfaisant à la condition $zw=1$. Ce nombre complexe est désigné par l'un des deux symboles suivants: z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

1.02. Soient $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$ et $z\neq 0$. Montrer que

$$\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

1.03. Désignons par le symbole $\frac{z_1}{z_2}$ le nombre complexe $z_1\cdot\frac{1}{z_2}$. Soient $\operatorname{Re} z_k=x_k$, $\operatorname{Im} z_k=y_k$, $k=1, 2$. Montrer que

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

1.04. Trouver les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants:

$$1.\ \frac{1}{1-i}.\quad 2.\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.\quad 3.\ \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

$$4.\ \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2.\quad 5.\ \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$$

Soient $\operatorname{Re} z = x$ et $\operatorname{Im} z = y$. La grandeur $\sqrt{x^2+y^2}$ est appelée *module* du nombre complexe $z = x+iy$ et se note $|z|$. Tout nombre φ qui vérifie les égalités

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi$$

est appelé *argument* du nombre complexe $z = x+iy$ et se note $\arg z$. La valeur de $\arg z$ n'est déterminée que pour des nombres complexes non nuls. Tout couple de valeurs possibles de $\arg z$ diffère d'un multiple entier de 2π.

1.05. Montrer que

1. $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$.
3. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$.
4. $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$.

Nota. L'écriture $A = B \pmod{\alpha}$ signifie que $A - B = n\alpha$, où n est un entier.

1.06. Trouver les modules et les arguments des nombres complexes suivants:

1. i. 2. -3. 3. $1+i^{123}$.

4. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. $\frac{1-i}{1+i}$. 6. $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

7. $(-4+3i)^3$. 8. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$. 9. $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Soient $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Le nombre complexe $x - iy$ est le *conjugué* du nombre complexe $z = x+iy$ et se note $\bar{z}$.

1.07. Montrer les égalités suivantes:

1. $z+\bar{z} = 2\operatorname{Re} z$. 2. $z-\bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

3. $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$. 4. $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

5. $\overline{(\bar{z})} = z$. 6. $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$.

7. $\overline{(z_1-z_2)} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$. 8. $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

9. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0)$. 10. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

11. $|\bar{z}| = |z|$. 12. $\bar{z}z = |z|^2$.

1.08. Montrer que pour tout polynôme $P(z)$ à coefficients réels et pour tout nombre complexe z, l'égalité $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ a lieu.

1.09. Soit $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Dire quels doivent être les coefficients du polynôme $P(z)$ si, pour toute valeur complexe de z, l'égalité ci-dessous à lieu:

1. $P(z) = \overline{P(\bar{z})}$. 2. $P(z) = -\overline{P(\bar{z})}$.

1.10. Trouver toutes les valeurs complexes de A pour lesquelles il existe un polynôme $P(z)$ non identiquement nul satisfaisant pour toutes les valeurs complexes de z à la condition

$$P(z) = A\overline{P(\bar{z})}.$$

* * *

Dans beaucoup de circonstances, il est commode de représenter les nombres complexes par les points d'un plan (ou par des vecteurs). De cette façon, à chaque nombre complexe $z = x + iy$, où $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$, on associe un point $M(x, y)$ (fig. 1) d'abscisse x et d'ordonnée y, ou bien un vecteur OM. L'addition des vecteurs correspond à l'addition des nombres complexes auxquels ils sont associés.

Le plan dans lequel sont représentés les nombres complexes est appelé *plan complexe*, l'axe X étant l'*axe réel*, et l'axe Y l'*axe imaginaire*.

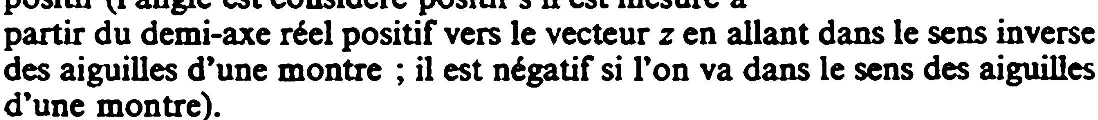


Fig. 1

1.11. Montrer que la grandeur $|z_1 - z_2|$ est égale à la distance du point z_1 au point z_2 dans le plan complexe.

1.12. Montrer que la grandeur arg z est égale à l'un des angles du vecteur z avec le demi-axe réel positif (l'angle est considéré positif s'il est mesuré à partir du demi-axe réel positif vers le vecteur z en allant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; il est négatif si l'on va dans le sens des aiguilles d'une montre).

1.13. Donner l'interprétation géométrique des ensembles de tous les points du plan complexe satisfaisant aux inégalités suivantes:

1. $\operatorname{Re} z > 0$. 2. $\operatorname{Im} z \leq 1$. 3. $|\operatorname{Re} z| < 1$.

4. $|\operatorname{Im} z| < 1$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$. 5. $|z| \leq 1$.

6. $|z - i| > 1$. 7. $0 < |z + i| < 2$.

8. $1 < |z - 1| < 3$. 9. $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

10. $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$.

1.14. Ecrire, en utilisant des inégalités, les ensembles suivants des points du plan complexe:

1. Le demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire.
2. Le premier quadrant.

3. Le demi-plan situé au-dessus de l'axe réel et contenant les points dont la distance à l'axe réel n'est pas inférieure à 2.

4. La bande contenant les points situés à une distance inférieure à 1 de l'axe imaginaire.

5. Le demi-disque de rayon 1 (privé de sa circonférence) centré sur $z=0$ et situé à gauche de l'axe imaginaire.

1.15. Trouver l'interprétation géométrique des grandeurs suivantes:

1. $|z|$. 2. $|\mathrm{Re}\, z|$. 3. $|\mathrm{Im}\, z|$.

1.16. Soient z_1 et z_2 deux points fixés dans le plan complexe. Donner l'interprétation géométrique des ensembles de tous les points z satisfaisant aux relations ci-dessous:

1. $|z-z_1|=|z-z_2|$. 2. $|z-1|=|\mathrm{Re}\, z|$.

3. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$, $a>\frac{1}{2}|z_2-z_1|$. 4. $||z-z_1|-|z-z_2||=2a$.

1.17. Soit $|z_0|<1$. Montrer que le point $w_0=\frac{1}{\bar{z}_0}$ peut être construit de la façon suivante : on mène en z_0 la perpendiculaire à la demi-droite $0z_0$ (fig. 2). Notons z_1 l'un des points d'intersection de cette perpendiculaire avec la circonférence $|z|=1$. Au point z_1 on construit la tangente à la circonférence $|z|=1$. Notons z_2 le point d'intersection de cette tangente avec la demi-droite $0z_0$. Le point w_0 est le symétrique du point z_2 par rapport à l'axe réel.

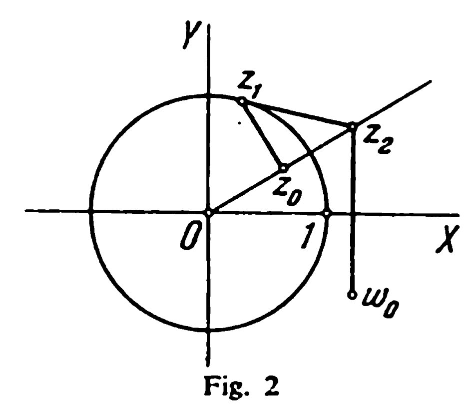


Fig. 2

1.18. Montrer que deux triangles Δ_1 et Δ_2, ayant pour sommets respectivement les points z_1, z_2, z_3 et z_1', z_2', z_3', sont semblables si

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_3'-z_1'}{z_2'-z_1'}.$$

1.19. Est-ce que la condition de similitude des triangles figurant au problème 1.18 est nécessaire ?

Si nécessaire, les équations écrites pour le point variable z peuvent être présentées en coordonnées orthogonales.

1.20. Dire quelles lignes du plan sont représentées par les équations ci-dessous:

1. $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(a>0)$. 2. $\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z+1}=0$.

3. $\mathrm{Im}\,\frac{z-1}{z+1}=0$. 4. $\mathrm{Re}\,\frac{z-a}{z+a}=0$ $(a>0)$.

1.21. Dire quels sont les ensembles des points z du plan complexe qui satisfont aux inégalités suivantes:

1. $|z-i|+|z+i|<4$. 2. $\operatorname{Re}\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$.

3. $|z-2|-|z+2|<2$. 4. $|1+z|<|1-z|$.

5. $0<\arg\frac{i-z}{z+i}<\frac{\pi}{2}$. 6. $\operatorname{Re}(z(1-i))<\sqrt{2}$.

7. $\frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}$. 8. $|z|>1-\operatorname{Re} z$.

9. $\operatorname{Re} z^4>\operatorname{Im} z^4$.

1.22. Soient A et C deux constantes réelles, B une constante complexe et $AC<|B|^2$. Montrer que l'équation

$$A|z|^2+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0 \quad (A>0)$$

est l'équation d'une circonférence. Trouver le centre et le rayon de cette circonférence.

1.23. Montrer que l'équation d'une circonférence passant par trois points non alignés z_1, z_2, z_3 peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

1.24. Montrer que pour toute valeur positive de K différente de 1, l'équation $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=K$ est l'équation d'une circonférence. Trouver le centre et le rayon de cette circonférence.

1.25. Trouver toutes les solutions des systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} \left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}, \\ \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} |z^2-2i|=4, \\ \left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1. \end{cases}$

1.26. Montrer que quatre points deux à deux distincts z_1, z_2, z_3, z_4 sont portés par la même circonférence (ou par la même droite) si, et seulement si, la grandeur $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}:\frac{z_2-z_4}{z_3-z_4}$ est réelle.

Indication. Utiliser le résultat du problème 1.23.

1.27. Soit a un nombre complexe arbitraire satisfaisant à la condition $\operatorname{Im} a>0$. Montrer que la grandeur $\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|$ est supérieure à l'unité dans le demi-plan inférieur, inférieure à l'unité dans le demi-plan supérieur et égale à l'unité sur l'axe réel.

1.28. Soit a un nombre réel arbitraire. Montrer que, si le polynôme $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ possède n zéros réels, il en est de même du polynôme $Q(z)=P(z+ia)+P(z-ia)$.

Indication. Développer le polynôme $P(z)$ en facteurs linéaires.

* * *

1.29. Trouver sur le segment joignant les points z_1 et z_2 un point qui le divise dans le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$, où λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels.

1.30. Montrer que trois points deux à deux distincts z_1, z_2, z_3 sont portés par la même droite si, et seulement si, la grandeur $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ est réelle.

1.31. Montrer que le point ζ est situé sur le segment joignant les points z_1 et z_2 si, et seulement si, il existe un nombre α, $0 \leq \alpha \leq 1$, tel que $\zeta = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2$.

1.32. Supposons les points $z_1, \ldots, z_n$ du plan complexe occupés par des points matériels dont les masses sont respectivement égales à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que le barycentre d'un tel système de points matériels se trouve au point

$$\zeta = \frac{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}.$$

1.33. Soient z_1, z_2, z_3 trois points situés sur le cercle de centre $z=0$. Montrer que le triangle ayant pour sommets les points z_1, z_2, z_3 est équilatéral si, et seulement si, $z_1+z_2+z_3=0$.

1.34. Montrer que les points z_1, z_2, z_3, z_4 portés par une circonférence sont les sommets d'un rectangle si, et seulement si, $z_1+z_3=z_2+z_4$ (les points sont numérotés dans l'ordre de leur succession lors du parcours de la circonférence).

1.35. Soient donnés trois sommets z_1, z_2, z_3 d'un parallélogramme (ces sommets sont numérotés dans l'ordre de leur succession lors du parcours de la frontière du parallélogramme). Trouver le quatrième sommet z_4.

1.36. Soient z_1, z_2, z_3 trois sommets d'un parallélogramme (ces sommets sont numérotés dans l'ordre de leur succession lors du parcours de la frontière du parallélogramme). Montrer que le point ζ est un point intérieur à ce parallélogramme si, et seulement si, il existe un couple de nombres t_1, t_2 satisfaisant aux conditions $0<t_1<1$, $0<t_2<1$ et tels que

$$\zeta = t_1 z_1 + (1-t_1-t_2)z_2 + t_2 z_3.$$

1.37. Montrer que le couple de nombres t_1 et t_2 cités au problème repéré 1.36 est défini d'une manière unique par rapport à chaque point ζ intérieur au parallélogramme.

* * *

Les nombres complexes sont étroitement liés non seulement à la géométrie plane mais aussi à la géométrie sphérique.

Imaginons le plan complexe sous la forme d'un plan horizontal disposé dans un espace à trois dimensions et construisons une sphère de diamètre unité reposant sur ce plan et lui étant tangente au point $z=0$ (fig. 3). Désignons le point de tangence par O et le point diamétralement opposé de la sphère par N.

Joignons maintenant le point N de la sphère à un point z du plan complexe par une droite et notons $M(z)$ le point (autre que le point N), où cette droite perce la sphère. On voit aisément que la correspondance $z \leftrightarrow M(z)$

est une correspondance biunivoque entre les points du plan et les points de la sphère percée en N.

Au lieu d'examiner la correspondance entre la sphère percée et le plan complexe, on peut examiner la correspondance entre la sphère toute entière

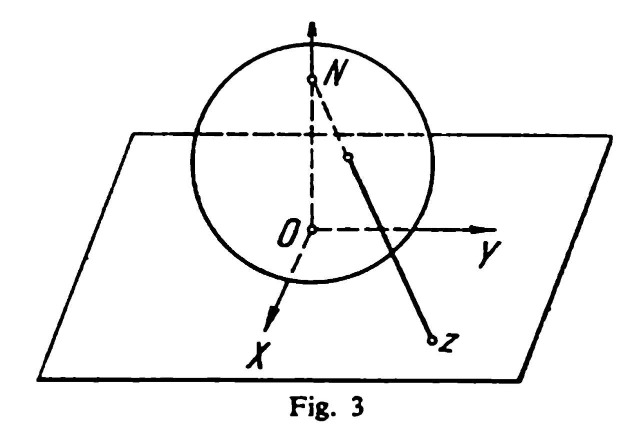


Fig. 3

et le plan complexe auquel on adjoint un point symbolique appelé *point à l'infini* et désigné par le symbole ∞. Par définition, on pose $M(\infty)=N$. Une telle correspondance est aussi biunivoque et est appelée *projection stéréographique*.

Le plan complexe complété par le point ∞ est appelé *plan complexe élargi* (plan complexe fermé), tandis que la sphère sur laquelle il se projette est connue sous le nom de *sphère de Riemann*.

1.38. Choisissons dans l'espace un système de coordonnées ξ, η, ζ de façon que les axes $O\xi$ et $O\eta$ se confondent avec les axes Ox et Oy du plan complexe et que l'axe $O\zeta$ soit dirigé suivant le diamètre de la sphère de Riemann. Soient $x=\operatorname{Re} z$ et $y=\operatorname{Im} z$, et soient (ξ, η, ζ) les coordonnées spatiales du point $M(z)$. Démontrer les formules suivantes:

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

et

$$x=\frac{\xi\zeta}{\xi^2+\eta^2}, \quad y=\frac{\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2}.$$

1.39. Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées spatiales d'un point $M(z)$. Trouver les coordonnées spatiales des points ci-dessous:

1. $M(-z)$. 2. $M(\bar{z})$. 3. $M\left(\frac{1}{z}\right)$.

1.40. Donner l'interprétation géométrique des ensembles de la sphère de Riemann correspondant aux ensembles suivants du plan complexe:

1. $\operatorname{Re} z>0$. 2. $\operatorname{Im} z<0$. 3. $|z|>1$. 4. $|z|<1$.

1.41. Montrer que deux points $M(z_1)$ et $M(z_2)$ de la sphère de Riemann différents des points O et N sont diamétralement opposés si, et seulement si, les points z_1 et z_2 sont liés par la relation $z_1\bar{z}_2=-1$.

1.42. Montrer qu'à une circonférence sur la sphere de Riemann on fait correspondre, dans le plan complexe, soit une circonférence, soit une droite, et que cette dernière est obtenue si, et seulement si, la circonférence sur la sphère de Riemann passe par le pôle supérieur N de celle-ci.

1.43. Dire pour quelles valeurs du paramètre a, les circonférences ci-dessous du plan complexe correspondent aux grandes circonférences sur la sphère de Riemann:

1. $|z-a|=a \quad (a>0)$. 2. $\left|z+\frac{a}{2}\right|=a \quad (a>0)$.
3. $|z-i|=a \quad (a>0)$. 4. $|z-2ai|=a \quad (a>0)$.

1.44. La distance qui sépare les points $M(z_1)$ et $M(z_2)$ dans l'espace est appelée distance cordale entre les points z_1 et z_2 du plan complexe élargi et est désignée par le symbole $k(z_1, z_2)$. Démontrer les formules suivantes:

1. $k(z_1, z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad (z_1\neq\infty, z_2\neq\infty)$.
2. $k(z_1, \infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$.

1.45. Donner l'interprétation géométrique des ensembles des points z situés dans le plan complexe et satisfaisant aux inégalités suivantes:

1. $k(z, 0)<R, \quad 0<R<1$. 2. $k(z, \infty)<R, \quad 0<R<1$.
3. $k(z, i)>\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4. $\frac{1}{2}<k(z, 1)<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nous allons désigner par le symbole $Z(M)$ le point du plan complexe élargi correspondant au point M de la sphère de Riemann

1.46. Notons M' le point de la sphère de Riemann obtenu par le déplacement du point M à la suite de la rotation de cette sphère en tant que solide de l'angle φ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour d'un diamètre d'extrémité $M(z_0)$ (si l'on regarde de cette extrémité du diamètre). Exprimer le point $z'=Z(M')$ par le point $z=Z(M)$.

* * *

Soit φ un nombre réel arbitraire. Nous allons désigner par le symbole $e^{i\varphi}$ le nombre complexe $\cos\varphi+i\sin\varphi$. A l'aide de ce symbole, on peut mettre sous *forme exponentielle* n'importe quel nombre complexe $z\neq 0$:

$$z=|z|e^{i\arg z}.$$

Dans beaucoup de cas, l'utilisation du symbole $e^{i\varphi}$ simplifie sensiblement les calculs.

1.47. Montrer que le symbole $e^{i\varphi_1}$ possède les propriétés suivantes d'une fonction exponentielle:

1. $e^{i0}=1$. 2. $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.
3. $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$. 4. $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}, \quad n=0, 1, 2, \ldots$

Indication. Voir le problème 1.05.

1.48. Démontrer les formules d'Euler:

1. $\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$. 2. $\sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$.

1.49. En utilisant la formule 4 du problème repéré 1.47, démontrer la formule de Moivre:

$$\cos n\varphi=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi.$$

1.50. Démontrer les formules suivantes:

1. $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n}=\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2n}e^{in\alpha}$.

2. $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

1.51. Soit $\theta\neq 0 \pmod{2\pi}$. Démontrer les formules suivantes:

1. $\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\sin\dfrac{n\theta}{2}$.

2. $\dfrac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

Indication. Trouver la somme des termes de la progression géométrique ci-dessous:

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\ldots+e^{in\theta}.$$

1.52. Soit $\theta\neq 0 \pmod{\pi}$. Démontrer les formules suivantes :

1. $\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta=\dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$.

2. $\sin\theta-\sin 3\theta+\ldots+(-1)^{n+1}\sin(2n-1)\theta=(-1)^{n+1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$.

1.53. Montrer que l'équation $z^n=1$ possède exactement n solutions distinctes

$$z_k=e^{2k\pi i/n},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

appelées racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

1.54. La racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité est appelée *racine primitive* si tous ses indices du premier au $(n-1)^{\text{ième}}$ sont différentes de l'unité (c'est-à-dire si elle n'est pas une racine de l'unité d'indice inférieur à n). Montrer que le nombre $\omega_n=e^{2\pi i/n}$ est la racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

1.55. Soit ω la racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Montrer que toute racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité peut s'écrire sous la forme ω^k, où k représente l'un des nombres 0, 1, ..., $n-1$.

1.56. Soit a un nombre complexe arbitraire différent de zéro. Montrer que toutes les solutions de l'équation $z^n = a$ sont données par la formule

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{\frac{i}{n}\arg a}\, \omega^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

où ω est la racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité (la valeur de $\arg a$ est choisie indépendamment du numéro k).

1.57. Soient $\operatorname{Re} a = \alpha$ et $\operatorname{Im} a = \beta$. Montrer que, pour $\beta > 0$, toutes les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont données par la formule

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right),$$

et, pour $\beta < 0$, par la formule

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right).$$

1.58. Trouver toutes les solutions des équations suivantes:

1. $z^2 = i$. 2. $z^2 = 3 - 4i$. 3. $z^3 = -1$.
4. $z^6 = 64$. 5. $z^7 + 1 = 0$. 6. $z^8 = 1 + i$.
7. $\bar{z} = z^3$. 8. $|z| - z = 1 + 2i$.

1.59. Montrer que pour n'importe quel nombre complexe z, la formule ci-dessous reste valable:

$$\left|\sqrt{z^2-1} + z\right| + \left|\sqrt{z^2-1} - z\right| = |z-1| + |z+1|.$$

1.60. Soit ε une racine $n^{\text{ième}}$ arbitraire de l'unité différente de l'unité. Démontrer les formules suivantes:

1. $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1} = \dfrac{n}{\varepsilon - 1}$.
2. $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \ldots + n^2\varepsilon^{n-1} = -\dfrac{n^2(1-\varepsilon) + 2n}{(1-\varepsilon)^2}$.

1.61. Montrer que tous les sommets d'un n-gone régulier arbitraire contenu dans le plan complexe sont donnés par la formule

$$z_k = a\omega^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

où ω est la racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité, a et b étant deux nombres complexes.

1.62. Montrer que les points z_1, z_2, z_3 sont les sommets d'un triangle régulier si, et seulement si, ils satisfont aux relations suivantes:

$$(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)^2,$$
$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^2.$$

1.63. Soit $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, où a_k sont des nombres complexes arbitraires. Montrer que la moyenne arithmétique des valeurs du polynôme $P_n(z)$ aux sommets d'un m-gone régulier arbitraire (avec $m > n$) est égale à la valeur du polynôme $P_n(z)$ au centre de ce m-gone.

Indication. Voir les problèmes 1.59 et 1.61.

1.64. Soit ω la racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Démontrer la formule ci-dessous:

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})=1+z+\ldots+z^{n-1}.$$

1.65. Démontrer la formule ci-dessous:

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Indication. Utiliser la formule du problème 1.64 avec $z=1$.



1.66. Montrer que pour toutes valeurs complexes de z et ζ, les inégalités suivantes sont valables:

$$\big||z|-|\zeta|\big|\leq|z+\zeta|\leq|z|+|\zeta|.$$

1.67. Montrer que:

1. Pour des valeurs de z et ζ non nulles, l'égalité $|z+\zeta|=|z|+|\zeta|$ est valable si, et seulement si, $\arg z=\arg\zeta \pmod{2\pi}$.
2. Pour des valeurs de z et ζ non nulles, l'égalité $|z+\zeta|=\big||z|-|\zeta|\big|$ est valable si, et seulement si, $\arg z=\arg\zeta+\pi \pmod{2\pi}$.

1.68. Montrer que pour toutes valeurs complexes de z et ζ les égalités suivantes sont valables:

1. $|z+\zeta|^2+|z-\zeta|^2=2|z|^2+2|\zeta|^2$.
2. $|z\bar{\zeta}+1|^2+|z-\zeta|^2=(1+|z|^2)(1+|\zeta|^2)$.
3. $|z\bar{\zeta}-1|^2-|z-\zeta|^2=(|z|^2-1)(|\zeta|^2-1)$.

Indication. Utiliser l'identité $A\cdot\bar{A}=|A|^2$.

1.69. Montrer que la grandeur

$$A|\lambda|^2+B\lambda\bar{\mu}+\bar{B}\bar{\lambda}\mu+C|\mu|^2$$

n'est pas négative pour toutes valeurs complexes de λ et μ si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites:

$$A\geq0,\quad C\geq0,\quad |B|^2\leq AC.$$

1.70. Montrer que pour toutes valeurs complexes des grandeurs

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\quad \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n$$

l'inégalité ci-dessous est valable :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\zeta_k\right|^2\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2$$

(inégalité de Cauchy-Bouniakovsky-Schwarz).

Indication. Utiliser le fait que la grandeur $\sum_{k=1}^{n}|\lambda z_k+\mu\bar{\zeta}_k|^2$ n'est pas négative pour toutes valeurs complexes de λ et μ (voir le problème 1.69).

1.71. Montrer que pour toutes valeurs complexes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, l'inégalité suivante est valable:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}.$$

Une fonction $\Phi(s)$ définie sur le segment $[a, b]$ est appelée *convexe vers le bas* si, pour n'importe quel couple de points s_1 et s_2 de ce segment, l'inégalité ci-dessous est valable :

$$\Phi\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\Phi(s_1)+\Phi(s_2)).$$

1.72. Soit $\Phi(s)$ une fonction définie convexe vers le bas et non décroissante pour $s \geq 0$. Montrer que pour toutes valeurs complexes de $z_1, \ldots, z_n$, l'inégalité suivante est valable:

$$\Phi\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi(|z_k|).$$

1.73. Soit $0 < s' < s$. Montrer que pour toutes valeurs complexes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ l'inégalité suivante est valable:

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^s\right\}^{1/s} \geq \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{s'}\right\}^{1/s'}.$$

1.74. Soit $s > 0$. Montrer que pour toutes valeurs complexes non nulles de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, l'inégalité suivante est valable:

$$\sqrt[n]{|z_1||z_2|\ldots|z_n|} \leq \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^s\right\}^{1/s}.$$

1.75. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes arbitraires. Montrer que:

1. $\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right)^p \leq n^{p-1}\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p, \quad p \geq 1.$
2. $\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^p, \quad 0 < p \leq 1.$

1.76. Soient $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Montrer que pour toutes valeurs complexes de $z_1, \ldots, z_n$ et $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ l'inégalité suivante est valable:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\zeta_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(inégalité de Hölder).

RÉPONSES

1.04.

1. $\operatorname{Re} z = 1/2$,	$\operatorname{Im} z = 1/2$.	2. $\operatorname{Re} z = 0$,	$\operatorname{Im} z = 1$.
3. $\operatorname{Re} z = -1$,	$\operatorname{Im} z = 0$.	4. $\operatorname{Re} z = -2$,	$\operatorname{Im} z = 3/2$.
5. $\operatorname{Re} z = 2$,	$\operatorname{Im} z = 0$.		

1.06.

1. $|z|=1$, $\arg z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $|z|=3$, $\arg z=(2k+1)\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $|z|=1$, $\arg z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $|z|=1$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
6. $|z|=1$, $\arg z=\frac{6\pi}{7}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
7. $|z|=125$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}+3\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
8. $|z|=\frac{1}{4}$, $\arg z=2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
9. $|z|=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{14}$, $\arg z=\frac{\pi}{14}+2k\pi$, $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1.09.

1. Tous les coefficients sont réels.
2. Tous les coefficients sont purement imaginaires.

1.10.

$|A|=1$.

1.13.

1. Le demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire privé des points de cet axe.
2. Le demi-plan disposé au-dessous de la droite horizontale passant par le point $z=i$ (y compris les points de cette droite).
3. La bande contenant les points dont la distance à l'axe imaginaire est inférieure à l'unité.
4. Le rectangle ayant pour sommets les points $-i$, $1-i$, $1+i$, i privé de ses côtés.
5. Le disque de rayon 1 centré sur $z=0$ (la circonférence y comprise).
6. Le plan entier privé d'un disque de rayon 1 centré sur $z=i$ y compris sa circonférence.
7. Le disque de rayon 2 et de centre $z=-i$ privé de son centre et de sa circonférence.
8. La couronne comprise entre deux circonférences de rayons 1 et 3, ayant pour centre commun le point $z=1$, privée de ces deux circonférences.
9. L'angle d'ouverture $\pi/4$ et de sommet $z=0$ situé au-dessus de l'axe réel (qui forme l'un de ses côtés) privé de ses côtés.
10. L'angle d'ouverture $\pi/2$ et de sommet $z=0$ dont la bissectrice se confond avec le demi-axe réel négatif, privé de ses côtés.

1.14.

1. $\operatorname{Re} z>0$. 2. $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$. 3. $\operatorname{Im} z\geq 2$.
4. $|\operatorname{Re} z|<1$. 5. $|z|<1$, $\operatorname{Re} z<0$.

1.15.

1. La distance de l'origine des coordonnées au point z.
2. La distance de l'axe imaginaire au point z.
3. La distance de l'axe réel au point z.

1.16.

1. La droite passant par le milieu du segment, joignant le point z_1 au point z_2, est perpendiculaire à ce segment.
2. La parabole dont la directrice est représentée par l'axe imaginaire, tandis que le foyer se trouve au point $z=1$.
3. L'ellipse ayant pour foyers les points z_1 et z_2 et dont le grand demi-axe est égal à a.
4. L'hyperbole ayant pour foyer les points z_1 et z_2 et dont le demi-axe réel est égal à a.

1.19.

Non, car la vérification de cette condition peut dépendre de la numération des sommets du triangle.

1.20.

1. La circonférence construite sur le segment $[0, a]$ pris comme diamètre.
2. La circonférence de rayon 1 centrée sur $z=0$.
3. L'axe réel.
4. La circonférence de rayon a centrée sur $z=0$.

1.21.

1. L'intérieur de l'ellipse $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.
2. L'extérieur du disque $(x-1)^2+y^2\leq 1$.
3. La partie du plan située à droite de la branche gauche de l'hyperbole

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$

4. Le demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire.
5. La moitié de droite du disque de rayon 1 centré sur $z=0$.
6. Le demi-plan contenant le point $z=0$ et borné par la tangente au point $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ du cercle de rayon 1 et de centre zéro.
7. L'angle d'ouverture $\pi/4$ et de sommet $z=-i$ dont les côtés passent par les points $z=1$ et $z=0$.
8. La partie du plan se trouvant du même côté que le point $z=1$ par rapport à la parabole $y^2=1-2x$ et bornée par cette parabole.
9. Quatre angles d'ouverture $\pi/4$ et de sommet $z=0$ dont les bissectrices sont représentées par les demi-droites $\arg z=-\dfrac{\pi}{16}+\pi k,\quad k=0, 1, 2, 3.$

Dans tous les cas, les points des lignes frontières sont exclus.

1.22.

Le centre du cercle se trouve au point $-\dfrac{B}{A}$, son rayon étant égal à $\sqrt{\dfrac{|B|^2-AC}{A^2}}$.

1.24.

Le centre du cercle se trouve au point $\dfrac{z_1-K^2z_2}{1-K^2}$, son rayon étant égal à $\dfrac{K|z_1-z_2|}{1-K^2}$.

1.25.

1. $z_1=6+17i,\qquad z_2=6+8i.$
2. $z_1=1-i,\qquad z_2=-1+i.$

1.29.

$$\frac{\lambda_2 z_1+\lambda_1 z_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

1.35.

$z_4 = z_1 + z_3 - z_2$.

1.39.

1. $(-\xi, -\eta, \zeta)$. 2. $(\xi, -\eta, \zeta)$. 3. $(\xi, -\eta, 1-\zeta)$.

1.40.

1. La demi-sphère se trouvant dans le demi-espace $\xi > 0$.
2. La demi-sphère se trouvant dans le demi-espace $\eta < 0$.
3. La demi-sphère supérieure.
4. La demi-sphère inférieure.

1.43.

1. $a = \infty$. 2. $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 3. $a = \sqrt{2}$.

4. Pour aucune valeur.

1.45.

1. Le disque de rayon $\dfrac{R}{\sqrt{1-R^2}}$ centré sur $z = 0$.

2. L'extérieur du disque de rayon $\dfrac{1}{R}\sqrt{1-R^2}$ centré sur $z = 0$.

3. Le demi-plan situé au-dessus de l'axe réel.

4. Le demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire privé d'un disque de rayon $\sqrt{5}$ centré sur $z = 2$.

1.46.

$$z' = \frac{z(1 + |z_0|^2 e^{i\varphi}) + z_0(e^{i\varphi} - 1)}{z\bar{z}_0(e^{i\varphi} - 1) + (e^{i\varphi} + |z_0|^2)}.$$

1.58.

1. $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. 2. $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$.

3. $z_1 = -1$, $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $z_k = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

5. $z_k = e^{\frac{2k+1}{7}\pi i}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

6. $z_k = \sqrt[16]{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left(k + \frac{1}{8}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

7. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$.

8. $z = \dfrac{3}{2} - 2i$.

§ 2. Suites et séries de nombres complexes

Une suite de nombres complexes $\{z_n\}$ est dite *convergente vers une limite* $A \neq \infty$ (on dit encore qu'elle admet pour limite A) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un numéro N tel que, pour tous les $n > N$, l'inégalité $|z_n - A| < \varepsilon$ soit valable.

Une suite de nombres complexes $\{z_n\}$ est dite *convergente vers une limite égale à l'infini* si, pour tout nombre positif M, il existe un numéro N tel que, pour tous les $n > N$, l'inégalité $|z_n| > M$ soit valable.

La convergence de la suite $\{z_n\}$ vers une limite finie ou infinie A est notée à l'aide de l'une des deux formules suivantes:

$$z_n \to A \quad (n \to \infty) ;$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

2.01. Désignons par le symbole $k(z, \zeta)$ la distance cordale de z à ζ dans le plan complexe. Montrer que la suite $\{z_n\}$ admet une limite finie ou infinie A si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un numéro N tel que, pour tous les $n > N$, l'inégalité $k(z_n, A) < \varepsilon$ soit valable.

2.02. Soient $x_n = \operatorname{Re} z_n$ et $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Montrer que la suite $\{z_n\}$ admet une limite finie A si, et seulement si, les deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re} A$ et $\operatorname{Im} A$.

2.03. Montrer que, pour la convergence de la suite $\{z_n\}$ vers l'infini, il faut et il suffit que la suite de nombres réels $\{|z_n|\}$ converge vers $+\infty$.

2.04. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$.

2.05. Soient $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = B \neq \infty$. Montrer que

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + \zeta_n) = A + B$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n\zeta_n = AB$.

2.06. Soient $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = B \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{A}{B}.$$

2.07. Montrer que de chaque suite $\{z_n\}$ on peut tirer une sous-suite convergente $\{z_{n_k}\}$, mais il se peut que la limite de cette dernière soit égale à l'infini.

2.08. Montrer que, si $|z_n| \leq M < \infty$, pour $n > n_0$, de la suite $\{z_n\}$ on peut tirer une sous-suite $\{z_{n_k}\}$ qui converge vers une limite finie.



2.09. Dire pour quelles valeurs du paramètre complexe a les suites ci-dessous convergent:

1. $\{a^n\}$. 2. $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$. 3. $\{na^n\}$.

4. $\left\{\frac{a^n}{1+a^n}\right\}$. 5. $\{1 + a + \ldots + a^n\}$.

6. $\left\{\frac{a}{1^2} + \frac{a^2}{2^2} + \ldots + \frac{a^n}{n^2}\right\}$.

2.10. Montrer la convergence des suites ci-dessous ét trouver leurs limites:

1. $\left\{\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}$, $|a|<1$. 2. $\left\{\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}$, $|a|>1$.

3. $\left\{\frac{a}{1^4}+\frac{a^2}{2^4}+\ldots+\frac{a^n}{n^4}\right\}$, $|a|>1$.

4. $\left\{\frac{1}{n}(1+e^{i\varphi}+\ldots+e^{in\varphi})\right\}$, $0<\varphi<2\pi$.

5. $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}(1-e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}-\ldots+(-1)^n e^{in\varphi})\right\}$, $-\pi<\varphi<\pi$.

2.11. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=A.$$

2.12. Soient $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n = B \neq \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1\zeta_n+z_2\zeta_{n-1}+\ldots+z_n\zeta_1}{n}=AB.$$

2.13. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des nombres positifs et soit

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)=+\infty.$$

Montrer que l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$ entraîne l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\ldots+\lambda_n z_n}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}=A.$$

2.14. Montrer la convergence des suites suivantes et trouver leurs limites:

1. $\left\{\frac{1}{n+1}(n+1+nz+(n-1)z^2+\ldots+z^n)\right\}$, $|z|\leq 1$. $z\neq 1$.

2. $\left\{\frac{1}{2n+1}[2n+1-(2n-1)z^2+(2n-3)z^4-\ldots+(-1)^n z^{2n}]\right\}$,
$|z|\leq 1$, $z\neq \pm i$.

3. $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{n-k}{n}}\,z^k\right\}$, $|z|\leq 1$, $z\neq 1$.

2.15. Soit φ un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Indication. Montrer l'existence des limites des suites de modules et d'arguments (à un multiple entier de 2π près) et calculer ces limites.

2.16. Soient $\operatorname{Re} z = x$ et $\operatorname{Im} z = y$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y).$$

* * *

La série infinie $\sum_1^\infty z_n$ est appelée *convergente* si la suite $\left\{\sum_{k=1}^n z_k\right\}$ admet une limite finie. Cette limite s'appelle la *somme de la série*.

La série infinie $\sum_1^\infty z_n$ est appelée *absolument convergente* si la série $\sum_1^\infty |z_k|$ converge elle aussi.

2.17. Montrer qu'une série absolument convergente converge.

2.18. Soient $x_n = \operatorname{Re} z_n$ et $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Montrer que, pour la convergence absolue de la série $\sum z_n$, il faut et il suffit que les deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent absolument.

2.19. Montrer que la série $\sum z_n$ est absolument convergente si l'une des conditions ci-dessous est satisfaite:

1. $|z_n| < M\varrho^n (n > n_0)$, où $M < \infty$, $0 < \varrho < 1$.
2. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \varrho < 1$.
3. $|z_n| < Mn^{-\alpha}(n > n_0)$, où $\alpha > 1$. $M < \infty$.
4. $\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right)\right] = \alpha > 1$.
5. $|z_n| < M\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}(n > n_0)$, où $\alpha > 1$, $M < \infty$.

2.20. Montrer que les séries suivantes convergent absolument:

1. $\sum_{n=1}^\infty n^\alpha z^n$, $|z| < 1$, $-\infty < \alpha < \infty$.
2. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n} z^n$, $|z| < e$.
3. $\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n-1)!}{(n!)^2}\,\frac{z^n}{1+z^n}$, $|z| \leq \frac{1}{4}$.
4. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n+z)\ln^2 n}$, $z \neq -2, -3, -4, \ldots$.
5. $\sum_{n=1}^\infty \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!}$, $\operatorname{Re} z < -1$.
6. $\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^{[n^\alpha]}$, $|z| < 1$, $0 < \alpha < 1$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(z+2)(z+4)\dots(z+2n)}$, $z \neq -2, -4, -6, \dots$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(z+1)(z+3)\dots(z+2n+1)}$, $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$.

2.21. Soient $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Indication. Voir le problème 2.16.

Lors de l'étude de la convergence des séries non absolument convergentes (de même que dans beaucoup d'autres cas), il est très commode d'utiliser la *transformation d'Abel* qui, pour les sommes, signifie à peu près la même chose que l'intégration par parties pour les intégrales.

2.22. Soient a_n et b_n, $n = 1, 2, \dots$, des nombres complexes arbitraires. Notons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \Delta b_k = b_{k+1} - b_k, \; S_0 = 0.$$

Montrer que pour tous nombres naturels n et p, l'égalité ci-dessous a lieu:

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = -\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \Delta b_k + S_{n+p} b_{n+p} - S_{n-1} b_n$$

(la *transformation d'Abel*).

2.23. Montrer que, si les séries $\sum z_k$ et $\sum |\zeta_{k+1} - \zeta_k|$ convergent, la série $\sum z_k \zeta_k$ converge elle aussi.

2.24. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs jouissant des propriétés $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ et $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, et soit z_n une suite de nombres complexes telle que $\left|\sum_1^n z_k\right| \leq M < \infty$ pour tout n. Montrer que la série $\sum_1^{\infty} \lambda_n z_n$ converge.

2.25. Trouver toutes les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles les séries suivantes convergent:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{\pi i/n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^{-\alpha} (e^{\pi i/n} - 1)$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} i^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\ln (n^2+1))^{\alpha}}{n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} (1+i)^n \left(\ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}\right)^{\alpha}$.

2.26. Soit $\{\mu_n\}$ une suite de nombres positifs tendant monotonement vers l'infini. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\mu_n}$ converge pour toute valeur réelle de θ différente des multiples entiers de 2π.

2.27. Posons $z_n = \frac{e^{\pi i \sqrt{2}}}{\ln(n+1)}$. Montrer que toutes les séries $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$, $k = 1$, 2, 3, ..., convergent, mais qu'aucune d'elles ne converge absolument.

2.28. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres complexes satisfaisant à la condition $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$, et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que, pour $|z| < 1$, les séries $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_0^{\infty} S_n z^n$ convergent et que leurs sommes sont liées par la relation

$$\sum_0^{\infty} S_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_0^{\infty} a_n z^n.$$

2.29. Soit $|a| < 1$. Montrer que les nombres $z_n = 1 + a + \ldots + a^n$ satisfont aux conditions $\mathrm{Re}\,(z_n(1-a)) > 0$.

2.30. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite non croissante de nombres positifs. Montrer que la série $\sum_0^{\infty} \lambda_n z^n$ converge dans le disque $|z| < 1$ et que sa somme dans ce disque est différente de zéro.

* * *

Soit $\{z_n\}$ une suite de nombres complexes différents de zéro. Si la suite $\{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n\}$ admet une limite différente de zéro et d'infini, cette limite est appelée *produit infini* des nombres z_1, z_2, z_3, ... et se note $\prod_1^{\infty} z_n$.

2.31. Montrer que, si le produit infini $\prod_1^{\infty} z_n$ converge, $z_n \to 1$ pour $n \to \infty$.

2.32. Montrer que, si le produit infini $\prod_1^{\infty} z_n$ converge, la série $\sum_1^{\infty} \ln |z_n|$ converge elle aussi.

2.33. Montrer que, pour la convergence du produit infini $\prod_1^{\infty} z_n$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

a) La série $\sum_1^{\infty} \ln |z_n|$ converge.

b) Les valeurs de $\arg z_n$ peuvent être choisies (en ajoutant des multiples entiers de 2π) de façon que la série $\sum_1^{\infty} \arg z_n$ converge.

2.34. Montrer que, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - z_n|$ converge, le produit infini $\prod_1^{\infty} z_n$ converge lui aussi.

2.35. Montrer que, si les séries $\sum_1^\infty (1 - z_n)$ et $\sum_1^\infty |1 - z_n|^2$ convergent, le produit infini $\prod_1^\infty z_n$ converge lui aussi.

2.36. Montrer que, si les séries

$$\sum_1^\infty (1 - z_n), \quad \ldots, \quad \sum_1^\infty (1 - z_n)^{m-1}, \quad \sum_1^\infty |1 - z_n|^m$$

convergent, le produit infini $\prod_1^\infty z_n$ converge lui aussi.

Le produit infini $\prod_1^\infty (1 + c_n)$ est appelé *absolument convergent* si le produit infini $\prod_1^\infty (1 + |c_n|)$ converge.

2.37. Montrer que le produit infini $\prod_1^\infty (1 + c_n)$ converge absolument si, et seulement si, la série $\sum_1^\infty c_n$ est absolument convergente.

2.38. Montrer la convergence absolue des produits infinis suivants:

1. $\prod_{n=1}^\infty (1 + z^n), \quad |z| < 1.$
2. $\prod_{n=1}^\infty (1 + n^\alpha z^n), \quad |z| < 1, \quad -\infty < \alpha < \infty.$
3. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \neq \pm in. \quad n = 1, 2, \ldots .$
4. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}, \quad z \neq 1, 2, \ldots .$
5. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{n^2 + z^2}\right), \quad z \neq \pm in, \ z \neq \pm i\sqrt{n^2 + 1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$
6. $\prod_{n=3}^\infty \frac{e^{\pi i/n} + e^{-\pi i/n}}{2}.$

2.39. Montrer la convergence des produits infinis suivants:

1. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{(-1)^n z}{n}\right)$, $\operatorname{Im} z > 0.$
2. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{(-1)^n}{n + z}\right)$, $\operatorname{Re} z > 0.$
3. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{e^{in\varphi}}{n^\alpha}\right)$, $0 < \varphi < 2\pi, \ \alpha > 0.$
4. $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{e^{in}}{\ln (n + 1)}\right).$

RÉPONSES

2.09.

1. Pour $|a|<1$, pour $|a|>1$ et pour $|a|=1$. 2. Pour toutes les valeurs de a. 3. Pour toutes les valeurs de a. 4. Pour $|a|<1$, pour $|a|>1$ et pour $|a|=1$. 5. Pour $|a|<1$, pour $|a|>1$ et pour $|a|=1$. 6. Pour toutes les valeurs de a.

2.10.

1. 0. 2. 0. 3. ∞. 4. 0. 5. 0.

2.14.

1. $\frac{1}{1-z}$. 2. $\frac{1}{1+z^2}$. 3. $\frac{1}{1-z}$.

2.25.

1. Pour $\alpha>0$. 2. Pour $\alpha>1$. 3. Pour $\alpha>0$. 4. Pour $\alpha<0$. 5. Pour tout α. 6. Pour $\alpha<0$.

§ 3. Fonctions, courbes, intégration

1°. Fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes.

Si à chaque valeur de t dans l'intervalle $a<t<b$ on associe un nombre complexe $z(t)=x(t)+iy(t)$, où $x(t)=\mathrm{Re}\, z(t)$ et $y(t)=\mathrm{Im}\, z(t)$, nous dirons que la *fonction à valeurs complexes* $z(t)$ de la variable réelle t est donnée sur l'intervalle (a, b).

Pour les fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes, les notions de limite, continuité, dérivée, intégrale, etc. sont définies d'une façon toute naturelle. On suppose donc que:

$$\lim_{t\to t_0} z(t)=\lim_{t\to t_0} x(t)+i\lim_{t\to t_0} y(t);$$

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t);$$

$$\int_a^b z(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt+i\int_a^b y(t)\,dt.$$

3.01. Se convaincre de la différentiabilité des fonctions ci-dessous et trouver leurs dérivées:

1. $(1+it)^2$, $-\infty<t<\infty$.
2. $\frac{1}{t+i}$, $-\infty<t<\infty$.
3. $(1+i\sqrt{t})^3$, $t>0$. 4. e^{it}, $-\infty<t<\infty$.
5. $(1-it)e^{-it}$, $-\infty<t<\infty$.
6. $t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1<t<1$.

3.02. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 (1+it)^2\,dt$.
2. $\int_0^1 (a+(b-a)t)^n\,dt$, $n=0, 1, \ldots$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+it}$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{1+it}{1-it}\,dt$.

5. $\int\limits_0^\pi e^{-it}\,dt$.

6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt,\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots$.

3.03. Soient $z_1(t)$ et $z_2(t)$ deux fonctions différentiables. Démontrer les formules suivantes:

1. $\frac{d}{dt}[z_1(t)+z_2(t)]=z_1'(t)+z_2'(t)$.
2. $\frac{d}{dt}[z_1(t)z_2(t)]=z_1(t)z_2'(t)+z_1'(t)z_2(t)$.
3. $\frac{d}{dt}[z_1(t)]^n=n[z_1(t)]^{n-1}z_1'(t), \qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$.

3.04. Soient $z_1(t)$ et $z_2(t)$ deux fonctions différentiables et soit en outre $z_2(t)\neq 0$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}\,\frac{z_1(t)}{z_2(t)}=\frac{z_2(t)z_1'(t)-z_2'(t)z_1(t)}{[z_2(t)]^2}.$$

3.05. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle différentiable au point t_0 et soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes différentiable au point $\varphi(t_0)$. Montrer que la fonction $z_1(t)=z(\varphi(t))$ est différentiable au point t_0 et que

$$z_1'(t_0)=z'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0).$$

3.06. Soit $z(t)$ une fonction différentiable et différente de zéro. Démontrer les formules ci-dessous:

1. $\frac{d}{dt}\,|z(t)|=|z(t)|\,\mathrm{Re}\,\frac{z'(t)}{z(t)}$.
2. $\frac{d}{dt}\arg z(t)=\mathrm{Im}\,\frac{z'(t)}{z(t)}$.
3. $\frac{d}{dt}\,\frac{z(t)}{|z(t)|}=i\,\frac{z(t)}{|z(t)|}\,\mathrm{Im}\,\frac{z'(t)}{z(t)}$.

3.07. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle monotone et continûment différentiable sur le segment $[a, b]$, et soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes et continue sur le segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Montrer que

$$\int\limits_a^b z(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} z(t)\,dt.$$

3.08. Soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $a \leq t \leq b$. Montrer les inégalités suivantes:

1. $\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |z(t)|\,dt.$

2. $\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \leq (b-a)\max_{a \leq t \leq b} |z(t)|.$

3. $\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \geq \left|\int_a^b \operatorname{Re} z(t)\,dt\right|.$

4. $\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \geq \left|\int_a^b \operatorname{Im} z(t)\,dt\right|.$

5. $\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \geq \left|\int_a^b \operatorname{Re}\,[e^{i\alpha}z(t)]\,dt\right|, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$

3.09. Soient $z(t)$ et $\zeta(t)$ deux fonctions à valeurs complexes continues sur le segment $a \leq t \leq b$. Montrer que:

1. L'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky-Schwarz est valable:

$$\left|\int_a^b z(t)\zeta(t)\,dt\right|^2 \leq \int_a^b |z(t)|^2\,dt \cdot \int_a^b |\zeta(t)|^2\,dt.$$

2. Pour $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité de Hölder est valable:

$$\left|\int_a^b z(t)\zeta(t)\,dt\right| \leq \left\{\int_a^b |z(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |\zeta(t)|^q\,dt\right\}^{1/q}.$$

3. Pour $p > 1$, l'inégalité de Minkowski est valable:

$$\left\{\int_a^b |z(t)+\zeta(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_a^b |z(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |\zeta(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

4. Pour $0 < p < 1$, une autre inégalité de Minkowski est valable:

$$\int_a^b |z(t)+\zeta(t)|^p\,dt \leq \int_a^b |z(t)|^p\,dt + \int_a^b |\zeta(t)|^p\,dt.$$

Indication. Voir les problèmes 1.70, 1.75 et 1.76.

* * *

Il arrive souvent d'examiner des intégrales impropres de fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes. Pour résoudre la question de leur convergence, les critères suivants sont utiles (voir les problèmes 3.10 à 3.13).

3.10. Soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[0, 1]$ et soit $z(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^1 z(t)t^{-\alpha}\, dt$ converge pour $\alpha < 1$ et diverge pour $\alpha \geq 1$.

3.11. Soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes continue pour $t \geq 1$ et supposons qu'il existe une limite différente de zéro de cette fonction pour $t \to +\infty$. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^\infty z(t)t^{-\alpha}\, dt$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$.

3.12. Soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes continue pour $t \geq 1$ et soient $\operatorname{Re} z(t)$ et $\operatorname{Im} z(t)$ deux fonctions non négatives et monotones pour $t \geq 1$. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^\infty z(t)\, dt$ et la série $\sum_{n=1}^\infty z(n)$ convergent ou divergent simultanément.

3.13. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle continûment différentiable pour $t \geq 1$ et tendant monotonement vers zéro pour $t \to +\infty$, et soit $z(t)$ une fonction à valeurs complexes continue pour $t \geq 1$ et possédant la propriété exprimée par la relation ci-dessous:

$$\left|\int_1^t z(u)\, du\right| \leq M < \infty; \quad t \geq 1.$$

Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^\infty z(t)\,\varphi(t)\, dt$ converge.

3.14. Dire pour quelles valeurs réelles du paramètre α les intégrales impropres ci-dessous convergent:

1. $\int_0^1 e^{it^2} t^{-\alpha}\, dt.$ 2. $\int_1^\infty \frac{1-it^2}{1+it^2} t^{-\alpha}\, dt.$

3. $\int_0^1 \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^2 t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}\, dt.$

4. $\int_0^\infty \left(\frac{1+it^2}{1+it}\right)^4 e^{-\alpha t}\, dt.$ 5. $\int_0^1 e^{it} t^{-\alpha} (\ln t)^2\, dt.$

6. $\int_2^\infty \frac{1+it}{1-it} \cdot t^{-\alpha} \frac{dt}{\ln^2 t}.$ 7. $\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha}\, dt.$

8. $\int_2^{\infty} e^{it}(\ln t)^{-\alpha}\, dt.$ 9. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-it\ln t}}{t^{\alpha}}\, dt.$

10. $\int_2^{\infty} \frac{e^{i\ln t}}{t(\ln t)^{\alpha}}\, dt.$

3.15. Montrer que, pour les valeurs réelles des constantes α et β, l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} e^{it^{\beta}} t^{-\alpha}\, dt$ converge si, et seulement si, ces constantes sont liées par la relation $\alpha > \min(1, 1-\beta)$.

* * *

Ayant examiné la fonction $z(t) = e^{it}$ sur le segment $[0, 2\pi]$, il est aisé de se convaincre que, pour les fonctions à valeurs complexes, le théorème de Rolle n'est plus valable. Dans les problèmes, qui suivent, on propose au lecteur de démontrer des théorèmes qui remplacent, dans une certaine mesure, les théorèmes de Rolle et de Lagrange. En rapport avec ceci, nous devrons définir certaines notions.

Un ensemble plan E est appelé *convexe* si, pour tout couple de points qu'il contient, il contient tout entier le segment de droite qui joint ces points.

On voit facilement que la partie commune d'un nombre quelconque d'ensembles convexes est aussi un ensemble convexe.

La partie commune de tous les ensembles convexes contenant l'ensemble E est appelée *enveloppe convexe* $h(E)$ de l'ensemble plan arbitraire E.

3.16. Soit $f(t)$ une fonction à valeurs complexes continue sur le segment $[a, b]$ et différentiable en chaque point intérieur à ce segment. Montrer que le nombre

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs que prend la fonction $f'(t)$ dans l'intervalle (a, b).

Indication. Appliquer le théorème des accroissements finis de Lagrange à la fonction

$$F(t) = \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f(t)\}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

3.17. Soit $f(t)$ une fonction qui satisfait aux mêmes conditions que celles du problème 3.16 et soit $g(t)$ une fonction réelle continue sur le segment $[a, b]$ admettant une dérivée non nulle en chaque point intérieur à ce segment. Montrer que le nombre

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs que prend la fonction $\frac{f'(t)}{g'(t)}$ dans l'intervalle (a, b).

3.18. Ayant examiné les fonctions $f(t)=t$ et $g(t)=e^{it}$ sur le segment $[0, \pi]$, se convaincre que la condition du problème 3.17, impliquant que la fonction $g(t)$ soit réelle, est essentielle.

3.19. Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions à valeurs complexes continues sur le segment $[a, b]$ et différentiables en chaque point intérieur à ce segment. Montrer que l'on peut choisir trois points τ_1, τ_2, τ_3 de l'intervalle (a, b) et trois nombres non négatifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tels que $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, de façon que l'égalité ci-dessous soit vérifiée:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\sum_{k=1}^{3}\lambda_k g'(\tau_k)=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k f'(\tau_k).$$

Indication. Appliquer le résultat du problème 3.16 à la fonction

$$F(t)=f(t)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(t)-g(a)].$$

Etant donné que les théorèmes de Rolle et de Lagrange ne sont plus valables, la généralisation de la règle de L'Hospital (servant à lever les indéterminations) aux fonctions à valeurs complexes n'est nullement évidente. Une telle généralisation devient possible en remplaçant le théorème de Lagrange de la façon exposée ci-dessus.

3.20. Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues à valeurs complexes satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $g(t)\neq 0$ pour $a\leq t<b$;

b) $\lim\limits_{t\to b-0} f(t)=\lim\limits_{t\to b-0} g(t)=0,\ \infty$;

c) les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont différentiables pour $a\leq t<b$;

d) $\lim\limits_{t\to b-0}\frac{f'(t)}{g'(t)}=A\neq\infty$;

e) $|\arg g'(t)|\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\quad a\leq t<b$. Montrer que $\lim\limits_{t\to b-0}\frac{f(t)}{g(t)}=A$.

3.21. Ayant examiné les fonctions

$$g(t)=1-t,\qquad f(t)=i(1-t)^2e^{i(1-t)^{-2}}$$

dans l'intervalle $[0, 1]$, s'assurer que la condition *d)* du problème 3.20 est essentielle.

3.22. Notons $\tau(t)$ la fonction inverse de la fonction

$$t(\tau)=\int_0^{\tau}\sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}(\sin e^{x^2})\right]^2}\,dx.$$

Ayant examiné les fonctions

$$f(t)=\ln t+\tau(t)+i\sin e^{\tau^2(t)},\qquad g(t)=f(t)-\ln t,\qquad t\geq 1,$$

se convaincre que la condition *e)* du problème 3.20 est essentielle.

* * *

2°. Courbe.

Soit donnée une fonction à valeurs complexes $z(t)$ continue sur le segment $[a, b]$. Lorsque le point t parcourt le segment $[a, b]$, le point $z(t)$ parcourt un certain ensemble dans le plan complexe. Cet ensemble muni de l'ordre dans lequel sont parcourus ses points est appelé *courbe continue*, tandis que l'équation $z=z(t)$ est l'*équation paramétrique* de cette courbe.

Deux équations paramétriques

$$z=z(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \text{et} \quad z=z_1(t), \quad a_1 \leq t \leq b_1,$$

définissent la même courbe continue si, et seulement si, il existe une fonction réelle $\varphi(t)$ continue et monotonement croissante sur le segment $[a, b]$, telle que

$$\varphi(a)=a_1, \quad \varphi(b)=b_1; \quad z(t)=z_1(\varphi(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Si la courbe a au moins une équation paramétrique $z=z(t)$, $a \leq t \leq b$, telle que la fonction $z(t)$ prenne des valeurs distinctes pour différentes valeurs de t, $a \leq t \leq b$, elle est appelée *courbe simple*. (On voit aisément que toutes les équations paramétriques d'une courbe simple jouissent de ces propriétés.)

La courbe est appelée *fermée* si son origine coïncide avec son extrémité, c'est-à-dire si pour son équation paramétrique

$$z=z(t), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$z(a)=z(b)$. Il est facile de voir que toutes les équations paramétriques d'une courbe fermée jouissent de cette propriété. Pour les courbes fermées, il est plus commode de considérer la fonction $z(t)$, déterminant l'équation paramétrique, comme une fonction définie non pas sur le segment $[a, b]$, mais sur l'axe réel tout entier, et périodique de période $b-a$.

Une courbe fermée est appelée *simple* si elle a au moins une équation paramétrique (1) telle que la fonction $z(t)$ prenne des valeurs distinctes pour différentes valeurs de t, $a \leq t < b$.

3.23. Dire quelles courbes sont définies par les équations paramétriques suivantes (indiquer l'ensemble des points du plan et l'ordre dans lequel ils sont parcourus):

1. $z=a+(b-a)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$ 2. $z=Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$; $(R>0)$.

3. $z=t+it^2, \quad 0 \leq t < \infty.$ 4. $z=t+\frac{i}{t}, \quad 1 \leq t < \infty.$

5. $z=ae^{it}+\frac{1}{a}e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (a>1).$ 6. $z=1+e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

7. $z=e^{2it}-1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$ 8. $z=\begin{cases} e^{\pi i t}, & 0 \leq t < 1, \\ t-2, & 1 \leq t \leq 3. \end{cases}$

9. $z=i\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$ 10. $z=1+i\cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

3.24. Soit une courbe C donnée par l'équation paramétrique $z=z(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Décrire les courbes données par l'équation paramétrique $z=z_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$, où

1. $z_1(t)=z(1-t)$.

2. $z_1(t)=\begin{cases} z(2t), & 0 \leq t < 1/2 \; ; \\ z(2-2t), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$ 3. $z_1(t)=z\left(\sin^2 \frac{t}{\pi}\right)$.

Si une courbe C a au moins une équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, dont la fonction $z(t)$ admet sur le segment $[a, b]$ une dérivée continue et différente de zéro, elle est appelée *courbe lisse*. Une courbe fermée C est appelée *courbe lisse fermée* si, en outre, la condition $z'(a) = z'(b)$ est remplie (c'est-à-dire si la fonction $z(t)$ en tant que fonction périodique de période $b - a$ est continûment différentiable pour tous les t).

Une courbe continue C est appelée *courbe lisse par morceaux* si elle peut être décomposée en un nombre fini de tronçons, chacun d'eux étant une courbe lisse.

3.25. Soit une courbe C donnée par l'équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, et supposons que la fonction $z(t)$ admette au point t_0 une dérivée $z'(t_0)$ différente de zéro. Montrer que la courbe C admet une tangente au point $z(t_0)$ et que le vecteur associé dans le plan complexe au nombre complexe $z'(t_0)$ est orienté suivant cette tangente.

3.26. Soit une courbe C donnée par l'équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où $z(t)$ est une fonction admettant deux dérivées continues sur le segment $[a, b]$. Notons : $\tau(t)$ le nombre complexe représentant le vecteur unité de la tangente au point $z(t)$ à la courbe C (ce vecteur est orienté dans le même sens que la courbe au point considéré) ; $\nu(t)$ le nombre complexe représentant le vecteur unité de la normale au point $z(t)$ à la courbe C (ce vecteur est orienté à droite par rapport à la courbe) ; $\varrho(t)$ la courbure de la courbe C au point $z(t)$. Démontrer les formules suivantes:

1. $\tau(t) = \dfrac{z'(t)}{|z'(t)|}$. 2. $\nu(t) = -i\dfrac{z'(t)}{|z'(t)|}$. 3. $\varrho(t) = \dfrac{1}{|z'(t)|}\left|\operatorname{Im}\dfrac{z''(t)}{z'(t)}\right|$.

Soit C une courbe continue quelconque. Choisissons sur la courbe C un nombre arbitraire de points $z_1, z_2, \ldots, z_n$, numérotons-les dans leur ordre de succession le long de la courbe et notons $\lambda(C; z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$. Si la borne supérieure $\lambda(C)$ de la grandeur $\lambda(C; z_1, \ldots, z_n)$ est finie pour tous les ensembles de points z_k possibles, la courbe C est appelée *rectifiable*, cette borne supérieure étant sa *longueur*.

3.27. Soit une courbe C donnée par l'équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où $z(t)$ est une fonction continûment différentiable sur le segment $[a, b]$. Montrer que la courbe C est rectifiable et que la formule

$$\lambda(C) = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

nous donne sa longueur.

3.28. Montrer que toute courbe lisse par morceaux est rectifiable.

On appelle *équation naturelle* d'une courbe rectifiable son équation paramétrique dans laquelle on prend comme paramètre t la longueur de l'arc de courbe compté depuis un certain point fixé (d'habitude, depuis l'origine de la courbe).

3.29. Soit $z = \varkappa(t)$, $0 \leq t \leq l$, l'équation naturelle d'une courbe C, où la fonction $\varkappa(t)$ est deux fois continûment différentiable sur le segment

$[0, l]$, tandis que les grandeurs $\tau(t)$, $\nu(t)$ et $\varrho(t)$ ont le même sens qu'au problème 3.26. Démontrer les formules suivantes:

1. $\tau(t) = \varkappa'(t)$. 2. $\nu(t) = -i\varkappa'(t)$. 3. $\varrho(t) = |\varkappa''(t)|$.

3.30. Supposons qu'une courbe C ait au moins une équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où $z(t)$ est une fonction admettant m dérivées continues sur le segment $[a, b]$, la première de ces dérivées étant différente de zéro sur le segment considéré. Montrer que, dans ce cas, la fonction $\varkappa(t)$, qui fait partie de l'équation naturelle de cette courbe, possède elle aussi m dérivées continues sur le segment $[0, \lambda]$.

La grandeur $\nu(z_0, C)$ qui représente l'*indice du point* z_0 *par rapport à la courbe* C est déterminée, pour une courbe continue arbitraire et pour tout point z_0 se trouvant en dehors de cette courbe, de la façon suivante : en chaque point z de la courbe C donnons la valeur de $\arg(z - z_0)$ de façon que, lors du mouvement sur la courbe, la valeur de $\arg(z - z_0)$ varie continûment. Alors, la grandeur $\nu(z_0, C)$ est égale à la différence des valeurs de $\arg(z - z_0)$ à l'extrémité et à l'origine de la courbe C divisée par 2π.

3.31. Soit une courbe C donnée par l'équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où la fonction $z(t)$ est continûment différentiable sur le segment $[a, b]$. Montrer que

$$\nu(z_0, C) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t) - z_0}\, dt.$$

3.32. Calculer l'indice du point $z_0 = 0$ par rapport aux courbes représentées par les équations paramétriques ci-dessous:

1. $z = a + \varrho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|a| < \varrho$.
2. $z = a + \varrho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 < \varrho < |a|$.
3. $z = \varrho e^{-2it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\varrho > 0$.
4. $z = 1/2 \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
5. $z = 2 \cos t - i \sin t$, $0 \leq t \leq 6\pi$.
6. $z = 1 + i \sin^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.33. Montrer que l'indice d'un point par rapport à une courbe fermée est un nombre entier.

Dans beaucoup de cas, il est commode d'utiliser les symboles liés à la notion de produit des courbes.

Soient données deux courbes C_1 et C_2 de façon que l'extrémité de la courbe C_1 coïncide avec l'origine de la courbe C_2. Nous allons appeler *produit* C_1C_2 de la courbe C_1 par la courbe C_2 la courbe obtenue en parcourant successivement d'abord l'ensemble des points de la courbe C_1 (dans le même ordre que lors du mouvement suivant la courbe C_1), ensuite, l'ensemble des points de la courbe C_2 (dans le même ordre que lors du mouvement suivant la courbe C_2).

Par le symbole C^{-1} nous allons désigner la courbe obtenue en parcourant dans l'ordre inverse l'ensemble des points de la courbe C.

3.34. Montrer que la multiplication des courbes est associative, c'est-à-dire que, si le produit $(C_1C_2)C_3$ est défini, le produit $C_1(C_2C_3)$ l'est aussi et ces deux produits sont égaux.

3.35. Montrer que le symbole $C^2 = CC$ n'est défini que pour une courbe C fermée.

3.36. Montrer que les deux produits C_1C_2 et C_2C_1 sont définis seulement lorsque C_1 et C_2 sont des courbes fermées ayant un point commun.

3.37. Soit $\lambda(C)$ la longueur d'une courbe C et soit $\nu(z_0, C)$ l'indice du point z_0 par rapport à la courbe C. En supposant que toutes les grandeurs qui figurent dans les formules ci-dessous aient un sens, montrer que:

1. $\lambda(C_1C_2) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$. 2. $\lambda(C^{-1}) = \lambda(C)$.

3. $\nu(z_0, C_1C_2) = \nu(z_0, C_1) + \nu(z_0, C_2)$.

4. $\nu(z_0, C^{-1}) = -\nu(z_0, C)$.

* * *

3°. Domaine.

Un ensemble D de points du plan complexe ou du plan complexe élargi est appelé *domaine* si:

1. pour chaque point qu'il contient, il contient aussi un certain voisinage de ce point;

2. pour chaque couple de points qu'il contient, il contient aussi une certaine ligne polygonale joignant ces points.

La totalité des points frontières du domaine D est appelée *frontière* du domaine et est notée ∂D. La frontière d'un domaine est un ensemble fermé.

Le domaine D complété par sa frontière ∂D est appelé *domaine fermé* et est noté $\overline{D}$.

La frontière d'un domaine arbitraire peut représenter un ensemble dont la structure est assez compliquée. Quand même, dans la majorité des cas, on peut se limiter aux domaines dont la frontière est composée d'un nombre fini de courbes fermées (une partie de ces courbes peut dégénérer en points).

Partout dans ce qui suit nous allons considérer (sauf mention contraire) que la frontière ∂D du domaine D est constituée par un nombre fini de points et un nombre fini de courbes fermées lisses par morceaux. L'orientation des courbes constituant la frontière ∂D sera choisie de telle façon qu'en parcourant la courbe le domaine D reste à gauche.

3.38. Exprimer par des inégalités le domaine D si sa frontière ∂D est constituée par une seule courbe fermée donnée par l'équation paramétrique suivante:

1. $z = a + \varrho e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 2. $z = a + \varrho e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. $z = -it$, $-\infty < t < \infty$. 4. $z = t + it^2$, $-\infty < t < \infty$.

5. $z = t^2$, $-\infty < t < \infty$. 6. $z = ae^{it} + \dfrac{1}{a}e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $a > 1$.

3.39. Soit D un domaine fini dont la frontière ∂D est constituée par une seule courbe fermée représentée par l'équation paramétrique $z = z(t)$,

$a \leq t \leq b$, où la fonction $z(t)$ est continûment différentiable sur le segment $[a, b]$. Montrer que l'aire $\sigma(D)$ du domaine D est donnée par la formule

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int_a^b |z(t)|^2 \operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t)}\, dt.$$

Indication. Utiliser la relation

$$\operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{d}{dt} \arg z(t)$$

(voir le problème 3.06).

3.40. Soit D un domaine fini dont la frontière est constituée par m courbes fermées données par les équations paramétriques suivantes:

$$z = z_k(t), \quad a_k \leq t \leq b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

où $z_k(t)$ sont des fonctions continûment différentiables respectivement sur les segments $[a_k, b_k]$. Montrer que l'aire $\sigma(D)$ du domaine D est donnée par la formule

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{a_k}^{b_k} |z_k(t)|^2 \operatorname{Im} \frac{z_k'(t)}{z_k(t)}\, dt.$$

3.41. Soit D un domaine borné par une courbe fermée lisse par morceaux ∂D. Montrer que les formules ci-dessous sont valables pour le sommet $\nu(z_0, \partial D)$ représentant l'indice du point z_0 par rapport à la courbe ∂D

$$\nu(z_0, \partial D) = \begin{cases} 1, & z \in D\ ; \\ 0, & z \notin \bar{D}. \end{cases}$$

Indication. Décomposer la courbe ∂D en tronçons lisses et calculer l'indice du point z_0 par rapport à chacun de ces tronçons en utilisant la formule du problème 3.31.



Un domaine D du plan complexe est appelé *convexe* si, pour tout couple de points $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$, il contient également le segment de droite qui joint ces points.

Un domaine D du plan complexe est appelé *étoilé par rapport à un point* $z_0 \in D$ si, pour chaque point $z_1 \in D$, il contient également le segment de droite joignant ce point au point z_0.

3.42. Montrer que pour qu'un domaine D soit convexe, il faut et il suffit qu'il soit étoilé par rapport à chacun de ses points.

3.43. Soit D un domaine dont la frontière ∂D est constituée par une seule courbe lisse fermée donnée par l'équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$,

où la fonction $z(t)$ admet sur le segment $[a, b]$ une dérivée continue et différente de zéro. Montrer que:

1. Le domaine D est convexe si, et seulement si,

$$\operatorname{Im} \frac{z''(t)}{z'(t)} \geq 0, \quad a \leq t \leq b.$$

2. Le domaine D est étoilé par rapport au point $z_0 \in D$ si, et seulement si,

$$\operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t) - z_0} \geq 0, \quad a \leq t \leq b.$$

Soit D un domaine arbitraire du plan complexe. Notons $\varrho_D^*(z_1, z_2)$, où $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$, la borne inférieure des longueurs de toutes les lignes polygonales contenues dans D et joignant z_1 à z_2. Notons $\varrho_D(z_1, z_2)$, où $z_1 \in D$ et $z \in D$, la borne inférieure des diamètres de toutes les lignes polygonales contenues dans D et joignant z_1 à z_2.

Il est évident que les inégalités ci-dessous ont toujours lieu:

$$\varrho_D^*(z_1, z_2) \geq \varrho_D(z_1, z_2) \geq |z_1 - z_2|.$$

3.44. Montrer que pour un domaine convexe D, les égalités

$$\varrho_D(z_1, z_2) = \varrho_D^*(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

ont lieu, et que, pour un domaine D étoilé par rapport à un point quelconque, les inégalités ci-dessous sont valables:

$$\varrho_D(z_1, z_2) \leq \varrho_D^*(z_1, z_2) \leq \pi \varrho_D(z_1, z_2).$$

Un domaine D du plan complexe élargi est dit *simplement connexe* si sa frontière ne peut pas être décomposée en deux ensembles fermés sans points communs (dans le plan élargi!).

3.45. Montrer qu'un domaine D étoilé par rapport à l'un de ses points (en particulier, un domaine convexe) est simplement connexe.



4°. Fonctions d'une variable complexe.

Si à chaque point z d'un certain ensemble E du plan complexe élargi on associe un nombre complexe $f(z)$, on dit que la fonction $f(z)$ de la variable complexe z est définie sur l'ensemble E.

La fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ peut être présentée comme un couple de fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

de deux variables réelles x et y. Pour cette raison, pour les fonctions d'une variable complexe, on définit d'une façon naturelle les notions de limite, continuité, intégrale curviligne, etc. Par exemple, la fonction $f(z)$ est continue sur l'ensemble E si la fonction $\operatorname{Re} f(x + iy)$ aussi bien que la fonction $\operatorname{Im} f(x + iy)$ sont continues sur cet ensemble E.

3.46. Soient les limites finies

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \text{ et } \lim_{z\to z_0} g(z)=B.$$

Montrer que

1. $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)+g(z)]=A+B$.
2. $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)\,g(z)]=AB$.
3. Si $B\neq 0$, alors $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$.

3.47. Montrer que la somme et le produit des fonctions continues sur un ensemble E sont également des fonctions continues sur cet ensemble. Le quotient de deux fonctions continues sur l'ensemble E est aussi une fonction continue sur cet ensemble si le dénominateur ne s'annule en aucun de ses points.

3.48. Dire si les fonctions ci-dessous seront uniformément continues dans le domaine $0<|z|<1$:

1. $f=e^{-1/|z|}$. 2. $f=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$. 3. $f=\dfrac{(\operatorname{Re} z^2)^2}{z^2}$. 4. $f=e^{-1/z^2}$.

3.49. Soit $f(z)$ une fonction définie et continue sur un ensemble fermé et borné E. Montrer que:

1. La fonction $|f(z)|$ est bornée sur l'ensemble E et atteint ses valeurs maximale et minimale.
2. La fonction $f(z)$ est uniformément continue sur l'ensemble E.

3.50. Soit $f(z)$ une fonction définie et uniformément continue dans un domaine borné D. Montrer qu'en chaque point de la frontière du domaine D la fonction $f(z)$ admet une limite et que la fonction $f(z)$, définie d'une façon supplémentaire sur la frontière du domaine D par ces valeurs limites, est continue dans le domaine fermé $\overline{D}$.

Une fonction $f(z)$ définie dans un domaine D est appelée *continue dans le domaine D jusqu'à sa frontière* si, pour tout $\varepsilon>0$, il y a un $\delta>0$ tel que pour tous points $z_1\in D$ et $z_2\in D$, satisfaisant à la condition $\varrho_D(z_1, z_2)<\delta$, l'inégalité $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ soit valable. (La définition de la grandeur $\varrho_D(z_1, z_2)$ précède le problème repéré 3.44.)

Etant donné que $\varrho_D(z_1, z_2)\geq |z_1-z_2|$, une fonction qui est uniformément continue dans le domaine D est continue jusqu'à la frontière de ce domaine.

3.51. Soit D un domaine borné par une courbe simple lisse par morceaux. Montrer que, si une fonction est continue dans le domaine D jusqu'à sa frontière, elle est uniformément continue dans ce domaine.

3.52. Soit D un domaine décomposable en un nombre fini de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n$ dont chacun est borné par une courbe simple lisse par morceaux. Montrer que pour assurer la continuité de la fonction $f(z)$ jusqu'à la frontière du domaine D, il faut et il suffit que la fonction $f(z)$ soit uniformément continue dans chacun des domaines $D_1, \ldots, D_n$.

* * *

Soit $f(z)$ une fonction définie sur un ensemble E du plan complexe élargi mais qui peut prendre la valeur ∞ aux points de cet ensemble. Nous allons dire que la fonction $f(z)$ est continue au point $z_0 \in E$ dans la métrique sphérique si, pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, il y a un $\delta > 0$ tel que pour tous les $z \in E$, satisfaisant aux conditions $k(z, z_0) < \delta$, l'inégalité $k(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ soit valable. Ici, on note $k(z, \zeta)$ la distance cordale de z à ζ, c'est-à-dire

$$k(z, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{|z-\zeta|}{\sqrt{1+|z|^2} \cdot \sqrt{1+|\zeta|^2}}, & z \neq \infty, \ \zeta \neq \infty; \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, & z \neq \infty, \ \zeta = \infty; \\ 0, & z = \infty, \ \zeta = \infty. \end{cases}$$

D'une façon analogue, on détermine la continuité uniforme d'une fonction dans la métrique sphérique.

3.53. Montrer que les fonctions ci-dessous sont continues, dans la métrique sphérique, dans tout le plan élargi:

1. $\dfrac{1}{z}$. 2. $\dfrac{az+b}{cz+d}$. 3. $e^{|z|}$. 4. $\dfrac{1}{e^{|z|}-2}$.

3.54. Montrer qu'une fonction $f(z)$ définie sur un ensemble E (mais il se peut qu'elle devienne infinie aux points de cet ensemble) est continue sur cet ensemble, dans la métrique sphérique si, et seulement si, en chaque point de l'ensemble E la fonction $f(z)$ admet une limite finie ou infinie égale à la valeur qu'elle prend à ce point.

3.55. Soit $f(z)$ une fonction continue sur un ensemble E, dans la métrique sphérique, et soit $R(z)$ une fonction de z rationnelle arbitraire. Montrer que la fonction $g(z) = R(f(z))$ est continue sur l'ensemble E dans la métrique sphérique.

3.56. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions continues sur un ensemble E dans la métrique sphérique. Est-ce que les fonctions

1. $f(z)+g(z)$; 2. $f(z)g(z)$; 3. $\dfrac{f(z)}{g(z)}$

doivent être obligatoirement continues sur l'ensemble E dans la métrique sphérique ?

* * *

5°. Intégrale curviligne.

Soit $f(z)$ une fonction définie aux points d'une courbe rectifiable C. Décomposons la courbe C en tronçons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ à l'aide des points $z_0, z_1, \ldots, z_n$ numérotés dans leur ordre de succession sur cette courbe. C_k

est un tronçon d'origine z_{k-1} et d'extrémité z_k. De plus, choisissons un point ξ_k sur le tronçon C_k et examinons les sommes intégrales

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}),$$

$$\Sigma_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|z_k - z_{k-1}|.$$

Si ces sommes admettent des limites, lorsque le nombre de tronçons de décomposition de la courbe C tend vers l'infini (c'est-à-dire lorsque la longueur du plus grand des tronçons C_k tend vers zéro), et si ces limites sont indépendantes de la façon dont on rend la décomposition de plus en plus menue et du choix des points ξ_k sur les tronçons C_k, les limites en question sont appelées *intégrales curvilignes de première et de seconde espèce de la fonction $f(z)$ prises sur la courbe C.* Les notations sont les suivantes:

$$\lim \Sigma_n = \int_C f(z)\,dz,$$

$$\lim \Sigma_n^* = \int_C f(z)\,|dz|.$$

En s'appuyant sur les notions concernant les intégrales réelles curvilignes, on aboutit aisément à l'assertion suivante:

Si la fonction $f(z)$ est continue sur la courbe rectifiable C, les intégrales

$$\int_C f(z)\,dz, \qquad \int_C f(z)\,|dz|$$

existent.

3.57. Soit C une courbe donnée par l'équation paramétrique $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où $z(t)$ est une fonction continûment différentiable sur le segment $[a, b]$. Montrer que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt,$$

$$\int_C f(z)\,|dz| = \int_a^b f(z(t))\,|z'(t)|\,dt.$$

3.58. En supposant que les intégrales des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ prises sur une courbe C existent, démontrer les formules suivantes:

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz + \beta \int_C g(z)\,dz,$$

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\,|dz| = \alpha \int_C f(z)\,|dz| + \beta \int_C g(z)\,|dz|,$$

où α et β sont des nombres complexes arbitraires.

3.59. Notons C^{-1} la courbe qui diffère d'une courbe C seulement par le sens dans lequel sont parcourus ses points. Montrer que

$$\int_{C^{-1}} f(z)\,dz = -\int_{C} f(z)\,dz,$$

$$\int_{C^{-1}} f(z)|dz| = \int_{C} f(z)|dz|$$

(en supposant que les intégrales figurant aux seconds membres de ces égalités existent).

3.60. Supposons que les intégrales de la fonction $f(z)$ prises sur les courbes C_1 et C_2 existent. Montrer que

$$\int_{C_1C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

$$\int_{C_1C_2} f(z)\,|dz| = \int_{C_1} f(z)\,|dz| + \int_{C_2} f(z)\,|dz|$$

(la définition de la courbe C_1C_2 précède le problème 3.34).

3.61. En passant, dans la somme intégrale, directement à la limite, calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_C dz$; 2. $\int_C z\,dz$,

où C est une courbe rectifiable arbitraire d'origine a et d'extrémité b.

3.62. En passant, dans la somme intégrale, directement à la limite, calculer l'intégrale

$$\int_{|z-a|=\varrho} \frac{dz}{z-a},$$

où a est un nombre complexe arbitraire, ϱ un nombre positif arbitraire, la circonférence $|z-a|=\varrho$ étant parcourue dans le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

3.63. Calculer l'intégrale $\int_C |z|\,dz$ dans les cas où la courbe C représente :

1. Un segment de droite allant du point $z=-i$ au point $z=i$;
2. Une demi-circonférence $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ allant du point $z=-i$ au point $z=i$.

3.64. Calculer l'intégrale

$$\int_{|z|=1} |z-1|\,|dz|.$$

3.65. Calculer l'intégrale

$$\int_C z \sin z\,dz,$$

où C est un segment de droite allant de $z=0$ à $z=i$.

3.66. Soit r un nombre positif arbitraire, le cercle $|z|=r$ étant parcouru une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Démontrer les formules suivantes:

1. $\int\limits_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1; \\ 0, & n+1=\pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$ 2. $\int\limits_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi r}{||a|^2-r^2|}, \quad |a| \neq r.$

* * *

3.67. Soit $f(z)$ une fonction intégrable sur une courbe C. Montrer l'inégalité

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_C |f(z)|\,|dz|.$$

3.68. Soit $f(z)$ une fonction intégrable le long d'une courbe rectifiable C de longueur $\lambda(C)$ et satisfaisant partout sur la courbe C à l'inégalité $|f(z)| \leq M$. Montrer l'inégalité

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| \leq M\lambda(C).$$

3.69. Soit $f(z)$ une fonction continue dans un certain voisinage du point $z=z_0$. Montrer que

$$\lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

(la circonférence est parcourue une fois dans le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre).

3.70. Soit $f(z)$ une fonction continue dans tout le plan élargi. Notons C_a le segment de droite allant de a à $a+1$. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_{C_a} f(z)\,dz = f(\infty).$$

3.71. Soit $f(z)$ une fonction continue dans le demi-plan $\operatorname{Im} z \geq 0$ satisfaisant à l'inégalité

$$|f(z)| \leq M|z|^m.$$

Notons C_R la demi-circonférence $|z|=R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ allant du point $z=R$ au point $z=-R$. Montrer l'inégalité

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz\right| \leq \pi M R^m.$$

Indication. Utiliser l'inégalité

$$\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

3.72. Soit $f(z)$ une fonction continue dans l'angle

$$-\alpha \leq \arg z \leq \alpha, \qquad (0 < \alpha < \pi),$$

et soient $zf(z) \to A$ pour $z \to \infty$, $|\arg z| \leq \alpha$. Notons C_R l'arc de cercle $|z| = R$, $|\arg z| \leq \alpha$, allant du point $z = Re^{-i\alpha}$ au point $z = Re^{i\alpha}$. Montrer que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 2i\alpha A.$$

* * *

3.73. Montrer l'inégalité de Schwarz

$$\left|\int_C f(z) g(z)\, dz\right|^2 \leq \int_C |f(z)|^2 |dz| \cdot \int_C |g(z)|^2 |dz|$$

(en supposant que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ soient continues sur la courbe rectifiable C).

Indication. Utiliser la condition de non-négativité de la forme hermitienne

$$H(\lambda, \mu) = \int_C |\lambda f(z) + \bar{\mu} g(z)|^2 |dz|$$

(voir le problème 1.69).

3.74. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_C f(z) g(z)\, dz\right| \leq \left\{\int_C |f(z)|^p |dz|\right\}^{1/p} \left\{\int_C |g(z)|^q |dz|\right\}^{1/q}$$

(en supposant que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ soient continues sur la courbe rectifiable C, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Indication. Voir le problème 1.76.

3.75. Soit $f(z)$ une fonction continue sur une courbe rectifiable C de longueur $\lambda(C)$. Montrer l'inégalité

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq \sqrt{\lambda(C)} \left\{\int_C |f(z)|^2 |dz|\right\}^{1/2}.$$

* * *

6°. Applications.

Dans beaucoup de cas, il est commode de considérer une fonction à valeurs complexes $f(z)$ continue sur un ensemble E du plan complexe z comme une application de cet ensemble dans un autre plan complexe w. Il est évident que cette application est l'équivalent de l'application de l'en-

semble E du plan (x, y) dans le plan (u, v) par un couple de fonctions réelles $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, où

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy).$$

L'ensemble des valeurs prises par la fonction $f(z)$ aux points de l'ensemble E est appelé *image* de l'ensemble E par l'application $w=f(z)$ et se note $f(E)$. L'ensemble E est appelé *image anticipée* de l'ensemble $f(E)$ par l'application $w=f(z)$.

L'application $w=f(z)$ est appelée application *continue* de l'ensemble E si la fonction $f(z)$ est continue sur l'ensemble E. Si la fonction $f(z)$ est continue sur l'ensemble E dans la métrique sphérique, nous allons dire que l'application $w=f(z)$ est *continue elle aussi dans la métrique sphérique* (la définition de la continuité dans la métrique sphérique précède le problème 3.53).

3.76. Trouver l'image de l'ensemble E par l'application $w=f(z)$:

1. $w=2z$; $\quad E:|z|<1$. $\qquad$ 2. $w=\dfrac{1}{z}$; $\quad E:|z-1|<1$.

3. $w=z^2$; $\quad E:\left\{|z|<R; \quad 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

4. $w=z^4$; $\quad E:\{|z|<1, \quad \operatorname{Im} z>0\}$.

3.77. Soient $\zeta=f(z)$ une application continue d'un ensemble E et $w=g(\zeta)$ une application continue elle aussi de l'ensemble $f(E)$. Montrer que l'application $w=g(f(z))$ est une application continue de l'ensemble E.

3.78. Montrer que l'assertion du problème 3.77 reste valable lorsqu'on remplace la continuité ordinaire de toutes les applications en question par la continuité dans la métrique sphérique.

Soit $w=f(z)$ une application continue d'un certain ensemble contenant tous les points d'une courbe C. A chaque équation paramétrique $z=z(t)$, $a\leq t\leq b$, de la courbe C l'application $w=f(z)$ fait correspondre l'équation paramétrique

$$w=w(t), \quad a\leq t\leq b,$$

où $w(t)=f(z(t))$. Ces équations paramétriques définissent dans le plan w une certaine courbe que nous allons appeler *image de la courbe* C par l'application $w=f(z)$ en la notant $f(C)$.

3.79. Donner l'interprétation géométrique de l'image de la courbe C, représentée par l'équation paramétrique $z=z(t)$, par l'application $w=f(z)$:

1. $w=z^2$; $\quad C:\{z=e^{-it}, \quad 0\leq t\leq 2\pi\}$.
2. $w=\bar{z}^2$; $\quad C:\{z=e^{it}, \quad 0\leq t\leq \pi\}$.
3. $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$; $\quad C:\{z=e^{it}, \quad 0\leq t\leq 2\pi\}$.
4. $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$; $\quad C:\{z=t, \quad 0<t<\infty\}$.

L'application $w=f(z)$ de l'ensemble E est dite *biunivoque* si les valeurs de la fonction $f(z)$ sont distinctes en différents points de l'ensemble E.

3.80. Dire si les applications ci-dessous seront biunivoques:

1. $w=z^2$; $\quad E: \operatorname{Re} z>0$.
2. $w=\bar{z}^2$; $\quad E: |z|<1$.
3. $w=\dfrac{1}{z-1}$; $\quad E: |z|<1$.
4. $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$; $\quad E: |z|<2$.
5. $w=\dfrac{1}{4}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2$; $\quad E: \left\{|z|<1, \quad 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3.81. Montrer que l'image d'une courbe simple par une application continue biunivoque est une courbe simple.

3.82. Soit $w=f(z)$ une application continue biunivoque d'un domaine D et soit C une courbe fermée contenue dans ce domaine. Montrer que pour chaque point z_0 situé en dehors de la courbe C mais contenu dans le domaine D, l'égalité ci-dessous est valable

$$v(z_0, C)=v(f(z_0), f(C))$$

[ici la notation $v(z_0, C)$ représente l'indice du point z_0 par rapport à la courbe C ; la définition correspondante précède le problème 3.31].

* * *

L'application $w=f(z)$ d'un domaine fini D du plan complexe est appelée *différentiable au point* $z_0=x_0+iy_0$ si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, où

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy),$$

sont différentiables au point (x_0, y_0). L'application du domaine D différentiable en tout point de ce domaine est appelée *application différentiable du domaine D*. L'application $w=f(z)$ est appelée *application lisse du domaine D* si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ admettent dans ce domaine des dérivées partielles continues de premier et de deuxième ordre.

La grandeur

$$J(f, z)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

est appelée *jacobien* de l'application différentiable $w=f(z)$.

3.83. Trouver les jacobiens des applications suivantes:

1. $w=az+b\bar{z}$ $\quad (a>0,\ b>0)$. $\quad$ 2. $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

3. $w=\bar{z}^2$. $\quad$ 4. $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

Soit $f(z)$ une fonction continue dans un domaine fermé borné et quarrable D. L'*intégrale de la fonction $f(z)$ dans le domaine D* est déterminée par l'égalité

$$\iint_D f(z)\,dx\,dy = \iint_D u(x, y)\,dx\,dy + i\iint_D v(x, y)\,dx\,dy,$$

où, comme d'habitude, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

3.84. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\iint_{|z|<1} z^2\,dx\,dy$. 2. $\displaystyle\iint_{|z|<\varrho} \frac{dx\,dy}{1+z^2}$, $0<\varrho<1$.

3. $\displaystyle\iint_{\varrho<|z-a|<r} \frac{dx\,dy}{z-a}$. 4. $\displaystyle\iint_{|z|<1} z^m\bar{z}^n\,dx\,dy$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

3.85. Soit $w=f(z)$ une application lisse biunivoque d'un domaine D et soit D_1 un domaine contenu strictement à l'intérieur du domaine D. Montrer que si le domaine D_1 est quarrable, alors

$$\sigma(f(D_1)) = \iint_{D_1} |J(f, z)|\,dx\,dy,$$

où $f(D_1)$ est l'image du domaine D_1 par l'application $w=f(z)$, $\sigma(f(D_1))$ étant l'aire de cette image.

3.86. Soit $w=f(z)$ une application lisse biunivoque d'un domaine D et soit $F(w)$ une fonction continue dans le domaine $f(D)$. Montrer que, pour tout domaine fini fermé quarrable D_1 contenu dans le domaine D, l'égalité ci-dessous reste valable:

$$\iint_{D_1} F(f(z))J(f, z)\,dx\,dy = \iint_{f(D_1)} F(w)\,du\,dv.$$

* * *

RÉPONSES

3.01.

1. $2(i-t)$. 2. $-\dfrac{1}{(t+i)^2}$. 3. $\dfrac{3i}{2\sqrt{t}}(1+i\sqrt{t})^2$.

4. ie^{it}. 5. $-(t+2i)e^{-it}$. 6. $1-\dfrac{it}{\sqrt{1-t^2}}$.

3.02.

1. $\dfrac{2}{3}+i$. 2. $\dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$ $(a\neq b)$. 3. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{i\ln 2}{2}$.

4. $\pi/2-1+i\ln 2$. 5. $-2i$. 6. 0.

3.14.

1. $\alpha<1$. 2. $\alpha>1$. 3. $-1<\alpha<2$. 4. $\alpha\geq 0$. 5. $\alpha<1$.

6. $\alpha\geq 1$. 7. $\alpha>0$. 8. $\alpha>0$. 9. $\alpha>1$. 10. $\alpha>0$.

3.23.

1. Le segment de droite allant de $z=a$ à $z=b$.
2. La moitié supérieure de la circonférence $|z|=R$ parcourue de $z=R$ à $z=-R$.
3. La moitié droite de la parabole $y=x^2$ parcourue de $z=0$ à l'infini.
4. La partie de l'hyperbole $xy=1$ située dans l'angle $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ parcourue de $z=1+i$ à l'infini.
5. L'ellipse

$$\frac{x^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=1,$$

parcourue une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

6. La circonférence $|z-1|=1$ parcourue une fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
7. La circonférence $|z+1|=1$ parcourue deux fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
8. Le contour de la moitié supérieure du disque $|z|<1$ parcouru une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
9. Le segment de droite compris entre les points $z=-i$ et $z=i$ parcouru deux fois : d'abord de $z=i$ à $z=-i$, ensuite, dans le sens inverse.
10. Le segment de droite compris entre les points $z=1$ et $z=1+i$ parcouru quatre fois de la façon suivante : la première fois de $z=1+i$ à $z=1$; la deuxième fois de $z=1$ à $z=1+i$; la troisième fois de $z=1+i$ à $z=1$; la quatrième fois de $z=1$ à $z=1+i$.

3.24.

1. L'ensemble des points de la courbe C parcouru dans le sens inverse de celui de la courbe C.
2. L'ensemble des points de la courbe C parcouru deux fois : la première fois dans le même sens que celui de la courbe C, et la seconde fois dans le sens inverse.
3. La même courbe que celle citée ci-dessus en 2.

3.32.

1. 1. 2. 0. 3. -2. 4. 1. 5. -3. 6. 0.

3.38.

1. $|z-a|<\varrho$. 2. $|z-a|>\varrho$. 3. $\mathrm{Re}\, z>0$. 4. $y>x^2$.

5. $0<\arg z<2\pi$. 6. $\frac{x^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}<1$.

3.48.

1. Oui. 2. Non. 3. Oui. 4. Non.

3.56.

Ce n'est pas obligatoire. Exemple pour 1) : E est la sphère toute entière

$$f(z)=z+\sin|z|, \quad g(z)=-z.$$

3.61.

1. $b-a$. 2. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

3.62.

$2\pi i$.

3.63.

1. i. 2. $2i$.

3.64.

8.

3.65.

$-ie^{-1}$.

3.76.

1. $f(E):|w|<2$. 2. $f(E)$:Re $w>1/2$.
3. $f(E):\{|w|<R^2,\ 0<\arg w<\pi\}$. 4. $f(E):|w|<1$.

3.79.

1. La circonférence $|w|=1$ parcourue deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. La circonférence $|w|=1$ parcourue une fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Le segment $[-1, 1]$ parcouru deux fois : d'abord de $w=1$ à $w=-1$, ensuite, dans le sens inverse.
4. La demi-droite $[1, +\infty]$ parcourue deux fois : d'abord de $w=+\infty$ à 1, ensuite, dans le sens inverse.

3.80.

1. Oui. 2. Non. 3. Oui. 4. Non. 5. Oui.

3.83.

1. a^2-b^2. 2. $|ad-bc|^2\cdot|cz+d|^{-4}$. 3. $-4|z|^2$. 4. $\frac{1}{4}|1-z^{-2}|^2$.

3.84.

1. 0. 2. $\pi\varrho^2$. 3. 0. 4. 0, si $m\neq n$; $\frac{\pi}{m+1}$ pour $m=n$.

§ 4. Méthodes asymptotiques élémentaires

Beaucoup de problèmes d'analyse sont traités en utilisant les symboles

$$O,\ o,\ \sim,$$

dont la signification est donnée dans le tableau ci-dessous.

Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions définies sur un ensemble E et soit z_0 un point limite quelconque de cet ensemble.

Formule	Explication
$f(z)\sim\varphi(z)(z\to z_0,\ z\in E)$	Le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ admet 1 comme limite lorsque $z\to z_0$, $z\in E$.
$f(z)=o(\varphi(z))(z\to z_0,\ z\in E)$	Le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ admet 0 comme limite lorsque $z\to z_0$, $z\in E$.
$f(z)=O(\varphi(z)),\ (z\in E)$	Le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ est uniformément borné sur tout l'ensemble E.
$f(z)=O(\varphi(z))(z\to z_0,\ z\in E)$	Le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ est borné dans l'intersection d'un certain voisinage du point z_0 avec l'ensemble E.

Pour abréger l'écriture, lorsque les équivoques sont exclues, la mention concernant l'ensemble E n'est pas faite.

Les formules du type $f(z) \sim \varphi(z)$ $(z \to z_0,\ z \in E)$ sont d'habitude appelées *formules asymptotiques*, tandis que les formules des types

$$f(z) = o(\varphi(z))\ (z \to z_0,\ z \in E),\ f(z) = O(\varphi(z))\ \ (z \to z_0,\ z \in E)$$

sont habituellement nommées *estimations asymptotiques*.

Remarque. L'utilisation du signe d'égalité dans l'écriture des estimations asymptotiques est purement conventionnelle, car beaucoup de propriétés de ce signe ne sont plus conservées. Par exemple, l'« égalité »

$$\sin x = O(1) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

ne signifie pas que $O(1) = \sin x$.

4.01. Montrer que:

1. $\sin x \sim x (x \to 0)$. 2. $\sin x = O(1)\ (x \to +\infty)$.
3. $\ln x = o(x^\alpha)\ (x \to +\infty)$, $\alpha > 0$.
4. $x^\alpha = o(e^x)\ (x \to +\infty)$, $-\infty < \alpha < \infty$.
5. $e^{-x} = o(x^\alpha)\ (x \to +\infty)$, $-\infty < \alpha < \infty$.
6. $\ln x = o(x^{-\alpha})\ (x \to +0)$, $\alpha > 0$.
7. $x^\alpha = o(x^\beta)\ (x \to +\infty)$, $\alpha < \beta$.
8. $x^\alpha = o(x^\beta)\ (x \to +0)$, $\alpha > \beta$.

4.02. Soit

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n; \qquad Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m,$$

avec $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$. Montrer que, pour $z \to \infty$, les formules asymptotiques suivantes ont lieu:

1. $P(z)Q(z) \sim a_0 b_0 z^{m+n}$. 2. $\dfrac{P(z)}{Q(z)} \sim \dfrac{a_0}{b_0} z^{n-m}$.
3. Si $m < n$, alors $P(z) + Q(z) \sim a_0 z^n$.
4. Si $m = n$, et $a_0 + b_0 \neq 0$, alors $P(z) + Q(z) \sim (a_0 + b_0) z^n$.

4.03. Démontrer les règles d'opération suivantes sur les symboles o et O :

1. $o(o(\varphi(x))) = o(\varphi(x))$. 2. $O(O(\varphi(x))) = O(\varphi(x))$.
3. $O(o(\varphi(x))) = o(\varphi(x))$. 4. $o(O(\varphi(x))) = o(\varphi(x))$.
5. $O(\varphi(x)) + O(\varphi(x)) = O(\varphi(x))$.
6. $o(\varphi(x)) + o(\varphi(x)) = o(\varphi(x))$.
7. $o(\varphi(x)) = O(\varphi(x))$.
8. $O(\varphi(x)) + O(\psi(x)) = O(|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$.
9. $o(\varphi(x)) + o(\psi(x)) = o(|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$.

4.04. Soit $\varphi(x) = o(1)\ (x \to x_0)$. Démontrer que:

1. $\dfrac{1}{1 + O(\varphi(x))} = 1 + O(\varphi(x)) \quad (x \to x_0)$.
2. $(1 + O(\varphi(x)))^2 = 1 + O(\varphi(x)) \quad (x \to x_0)$.
3. $(1 + O(\varphi(x)))(1 + O(\varphi(x))) = 1 + O(\varphi(x)) \quad (x \to x_0)$.

4. $e^{O(\varphi(x))} = 1 + O(\varphi(x)) \quad (x \to x_0).$

5. $\dfrac{1}{1+o(\varphi(x))} = 1 + o(\varphi(x)) \quad (x \to x_0).$

6. $\{1 + o(\varphi(x))\}^m = 1 + o(\varphi(x)) \quad (x \to x_0).$

7. $e^{o(\varphi(x))} = 1 + o(\varphi(x)) \quad (x \to x_0).$

8. $(1 + O(\varphi(x)))(1 + o(\varphi(x))) = 1 + O(\varphi(x)) \quad (x \to x_0).$

4.05. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \geq 0$. Démontrer les assertions suivantes:

1. Si $f(x) = O(x^\alpha)$ $(x \to +\infty)$, où $\alpha > -1$, alors

$$\int_0^x f(t)\,dt = O(x^{\alpha+1}) \quad (x \to +\infty).$$

2. Si $f(x) = O(x^\alpha)$ $(x \to +\infty)$, où $\alpha < -1$, alors

$$\int_x^\infty f(t)\,dt = O(x^{\alpha+1}) \quad (x \to +\infty).$$

3. Si $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$, alors $\int_0^x f(t)\,dt = O(\ln x)$ $(x \to +\infty)$.

4. Si $f(x) = o(x^\alpha)$ $(x \to +\infty)$, où $\alpha > -1$, alors

$$\int_0^x f(t)\,dt = o(x^{\alpha+1}) \quad (x \to +\infty).$$

5. Si $f(x) = o(x^\alpha)$ $(x \to +\infty)$, où $\alpha < -1$, alors

$$\int_x^\infty f(t)\,dt = o(x^{\alpha+1}) \quad (x \to +\infty).$$

6. Si $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$, alors $\int_0^x f(t)\,dt = o(\ln x)(x \to +\infty)$.

7. Si $f(x) \sim x^\alpha$ $(x \to +\infty)$, où $\alpha > -1$, alors

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (x \to +\infty).$$

8. Si $f(x) \sim x^\alpha$ $(x \to +\infty)$, où $\alpha < -1$, alors

$$\int_x^\infty f(t)\,dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (x \to +\infty).$$

9. Si $f(x) \sim \frac{1}{x}$ $(x \to +\infty)$, alors $\int_0^x f(t)\,dt \sim \ln x (x \to +\infty)$.

4.06. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue et positive pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition $\int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt = +\infty$. Montrer que:

1. Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x \geq 0$ et si $f(x) = O(\varphi(x))$ $(x \to +\infty)$, alors

$$\int_0^x f(t)\,dt = O\left(\int_0^x \varphi(t)\,dt\right) \quad (x \to +\infty).$$

2. Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x \geq 0$ et si $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x \to +\infty)$, alors

$$\int_0^x f(t)\,dt = o\left(\int_0^x \varphi(t)\,dt\right) \quad (x \to +\infty).$$

3. Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x \geq 0$ et si $f(x) \sim \varphi(x)$ $(x \to +\infty)$, alors

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim \int_0^x \varphi(t)\,dt \quad (x \to +\infty).$$

4.07. Montrer que les formules ci-dessous sont valables:

1. $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln x + O(1) \qquad (x \to +\infty).$

2. $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^4+1}\,dt = \frac{x^3}{3} + O(1) \qquad (x \to +\infty).$

3. $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^\alpha+1}\,dt = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\frac{\alpha}{2}+1} + O(1) \qquad (x \to +\infty),\ \alpha > 2.$

4. $\displaystyle\int_0^x \sqrt[n]{t^n+1}\,dt = x + O(1) \qquad (x \to +\infty),\ n > 2.$

5. $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha \ln t}{t+1}\,dt = \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} + O(1) \qquad (x \to +0),\ (-1 < \alpha < 0).$

6. $\displaystyle\int_0^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt = ex - \frac{e}{2}\ln x + O(1) \qquad (x \to +\infty).$

7. $\displaystyle\int_2^x t^\alpha (\ln t)^\beta\,dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x)^\beta \qquad (x \to +\infty),\ \alpha > -1.$

Montrer que

$$8.\quad \int_2^x \frac{(\ln t)^\alpha}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \sim \frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (x\to+\infty),\ \alpha>-1.$$

Montrer que

$$9.\quad \int_{10}^x \frac{\ln\ln t}{\sqrt{t+1}}\,dt \sim 2\sqrt{x}\ln\ln x \qquad (x\to+\infty).$$

4.08. Soit $h(x)$ une fonction positive et deux fois continûment différentiable pour $x\geq 0$ satisfaisant aux conditions

$$h'(x)>0\ (x>x_0),\qquad h''(x)=o((h'(x))^2)\qquad (x\to+\infty).$$

Montrer que

$$\int_0^\infty e^{-h(t)}\,dt<\infty,\qquad \int_0^\infty e^{h(t)}\,dt=+\infty.$$

4.09. Soit $h(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions du problème 4.08 et soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x\geq 0$ satisfaisant à la condition

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=o(h'(x))\qquad (x\to+\infty).$$

Montrer que

$$\int_0^\infty \varphi(t)e^{-h(t)}\,dt<\infty,\qquad \int_0^\infty \varphi(t)e^{h(t)}\,dt=+\infty.$$

4.10. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x\geq 0$ satisfaisant à la condition

$$x\varphi'(x)=o(\varphi(x))\qquad (x\to+\infty).$$

Montrer que pour toute valeur fixée de la constante positive a, la formule asymptotique ci-dessous est valable:

$$\varphi(ax)\sim\varphi(x)\qquad (x\to+\infty).$$

4.11. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x\geq 0$ satisfaisant à la condition

$$x\varphi'(x)\sim\varrho\varphi(x)\qquad (x\to+\infty),\qquad 0<\varrho<\infty.$$

Montrer que pour toute valeur fixée de la constante positive a, la formule asymptotique ci-dessous est valable

$$\varphi(ax)\sim a^\varrho\varphi(x)\qquad (x\to+\infty).$$

4.12. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$x\varphi'(x) = O\left(\frac{\varphi(x)}{(\ln x)^\alpha}\right) \quad (x \to +\infty), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

et soit $a(x)$ une fonction continue pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$\ln |a(x)| = o((\ln x)^\alpha) \quad (x \to +\infty).$$

Démontrer la formule asymptotique suivante:

$$\varphi(xa(x)) \sim \varphi(x) \quad (x \to +\infty).$$

* * *

Pour les intégrales, en tant que fonctions de l'une des limites d'intégration, un grand nombre de formules asymptotiques peuvent être obtenues au moyen de l'intégration par parties.

4.13. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \sim \frac{e^x}{x} \quad (x \to +\infty).$

2. $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty).$

3. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (x \to +\infty).$

Dans certains cas, en intégrant une fois par parties on n'arrive pas au résultat cherché, mais une deuxième intégration par parties y aboutit.

4.14. Démontrer les formules asymptotiques:

1. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = +\frac{\cos x}{x} + O(x^{-2}) \qquad (x \to +\infty).$

2. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to +\infty).$

3. $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{-\alpha}\cos t\,dt = -x^{-\alpha}\sin x + O(x^{-\alpha-1}) \qquad (x \to +\infty)\ \alpha > 0.$

4. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \sin t^n\,dt = \frac{\cos x^n}{nx^{n-1}} + O(x^{-2n+1}) \qquad (x \to +\infty),\ n > 1.$

4.15. Soit $h(x)$ une fonction positive et deux fois continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$h'(x) > 0 (x > x_0), \quad h''(x) = o((h'(x))^2) \quad (x \to +\infty),$$

et soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$\varphi'(x) = o(h'(x)\varphi(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\int_0^x \varphi(t) e^{h(t)}\, dt \sim \frac{e^{h(x)} \cdot \varphi(x)}{h'(x)} \quad (x \to +\infty).$

2. $\int_x^{+\infty} \varphi(t) e^{-h(t)}\, dt \sim \frac{\varphi(x) e^{-h(x)}}{h'(x)} \quad (x \to +\infty).$

Indication. Voir le problème 4.08.

4.16. Trouver des formules asymptotiques pour les intégrales ci-dessous:

1. $\int_0^x t^\alpha e^{\frac{t^2}{2}} dt \quad (x \to +\infty).$ 2. $\int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^m} dt \quad (x \to +\infty), \quad m > 0.$

3. $\int_x^{+\infty} \sqrt{t^2+1}\, e^{-t}\, dt \quad (x \to +\infty).$ 4. $\int_x^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t^2+1}} dt \quad (x \to +\infty).$

5. $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t+1}} e^{-t}\, dt \quad (x \to +\infty).$

6. $\int_x^{+\infty} \sqrt{t^2+1} \sin e^t\, dt \quad (x \to +\infty).$

7. $\int_0^x \sqrt{t^2+1}\, e^t \sin t\, dt \quad (x \to +\infty).$

8. $\int_x^{+\infty} (\ln t)^\alpha e^{-\sqrt{t}} \sin t\, dt \quad (x \to +\infty).$

9. $\int_0^x t^\alpha e^{-\frac{1}{t}} dt \quad (x \to +0).$

10. $\int_x^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha e^{\operatorname{ctg} t} dt \quad (x \to +0).$

4.17. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$x\varphi'(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\int\limits_0^x \varphi(t)t^{\alpha-1}\,dt \sim \frac{1}{\alpha}x^\alpha\varphi(x) \quad (x \to +\infty), \quad \alpha > 0.$

2. $\int\limits_x^{+\infty} \varphi(t)t^{\alpha-1}\,dt \sim -\frac{1}{\alpha}x^\alpha\varphi(x) \quad (x \to +\infty), \quad \alpha < 0.$

Indication. Voir le problème 4.10.

4.18. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$x\varphi'(x) \sim \varrho\varphi(x) \quad (x \to +\infty), \quad 0 < \varrho < \infty.$$

Montrer que pour toute valeur de $\alpha > 0$, les formules asymptotiques ci-dessous sont valables:

1. $\int\limits_0^x \varphi(t)e^{t^\alpha}\,dt \sim \frac{1}{\alpha}x^{1-\alpha}\varphi(x)e^{x^\alpha} \quad (x \to +\infty).$

2. $\int\limits_x^{+\infty} \varphi(t)e^{-t^\alpha}\,dt \sim \frac{1}{\alpha}x^{1-\alpha}\varphi(x)e^{-x^\alpha} \quad (x \to +\infty).$

Indication. Voir le problème 4.11.

* * *

On rencontre souvent des intégrales dont les limites d'intégration sont constantes, tandis que la fonction sous le signe d'intégration dépend d'un paramètre.

A la base des procédés servant à obtenir la majeure partie des formules asymptotiques, on trouve les estimations asymptotiques dont la démonstration est laissée au lecteur dans les problèmes qui suivent.

4.19. Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment $a \leq x \leq b$. Montrer que

$$\int\limits_a^b f(x)e^{-\lambda x}\,dx = o(e^{-\lambda a}) \quad (\lambda \to +\infty).$$

4.20. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \geq a$ satisfaisant à la condition $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}(x \geq a)$ avec certaines constantes M et α. Montrer que la formule ci-dessous est valable:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dt = o(e^{-\lambda a}) \quad (\lambda \to +\infty).$$

4.21. Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment $a \leq x \leq b$, où $-\infty < a < b < +\infty$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx = o(1) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Indication. Conjointement avec l'intégrale $\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx$ examiner l'intégrale $\int_a^{b-\pi/\lambda} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda x}\,dx$. Montrer que la somme aussi bien que la différence de ces deux intégrales tendent vers zéro pour $\lambda \to +\infty$.

4.22. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \geq a$ et satisfaisant à la condition $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. Montrer que

$$\int_a^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = o(1) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

La principale méthode utilisée pour obtenir des formules asymptotiques pour les intégrales des types

$$\int_a^{\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx, \qquad \int_a^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx \qquad (\lambda \to +\infty)$$

consiste dans l'intégration par parties (l'expression $e^{\lambda x}\,dx$ est intégrée, tandis que la fonction $f(x)$ est différentiée).

4.23. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x+1}\,dx = \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

2. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

3. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

4. $$\int_0^{\infty} (t^2+1)^{-3/2} \sin \lambda t\,dt = \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

5. $$\int_0^{\infty} \frac{te^{-\lambda t}}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

6. $\int_0^\infty \frac{t \cos \lambda t}{\sqrt{1+t^4}} dt = -\frac{1}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3})$ $\quad (\lambda \to +\infty)$.

7. $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t^2}}{\sqrt{t+1}} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-1})$ $\quad (\lambda \to +\infty)$.

8. $\int_0^\infty e^{-t} \cos \lambda t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + O(\lambda^{-1})$ $\quad (\lambda \to +\infty)$.

9. $\int_0^\infty \frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}} e^{-\lambda t} dt = -\frac{\ln \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $\quad (\lambda \to +\infty)$.

10. $\int_0^\infty \frac{\ln^2 t}{t+1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}\right)$ $\quad (\lambda \to +\infty)$.

Par le symbole $\Gamma(\alpha)$ on désigne la *fonction gamma* d'Euler définie pour $\alpha > 0$ par l'intégrale

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt.$$

4.24. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\int_0^a t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \sim \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha}$ $\quad (\lambda \to +\infty)$, $a > 0$, $\alpha > 0$.

2. $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{t^2+1}} e^{-\lambda t} dt \sim \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha}$ $\quad (\lambda \to +\infty)$, $\alpha > 0$.

3. $\int_0^\infty t^\alpha e^{-\lambda t^\beta} \sqrt{t+1} \, dt \sim \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \lambda^{-(\alpha+1)/\beta}$ $\quad (\lambda \to +\infty)$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$.

4. $\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \ln t \, dt \sim -\Gamma(\alpha) \frac{\ln \lambda}{\lambda^\alpha}$ $\quad (\lambda \to +\infty)$, $\alpha > 0$.

4.25. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \geq 0$ et satisfaisant aux conditions

a) $f(0) \neq 0$; b) $|f(x)| < Me^{Kx}$ $\quad (x > x_0)$

(M et K étant des constantes). Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\int_0^\infty f(t) t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \sim f(0) \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$ $\quad (\lambda \to +\infty)$, $\alpha > 0$.

2. $\int_0^\infty f(t) t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \ln t \, dt \sim -f(0) \Gamma(\alpha) \frac{\ln \lambda}{\lambda^\alpha}$ $\quad (\lambda \to +\infty)$, $\alpha > 0$.

4.26. Soit $\varphi(x)$ une fonction positive et continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition

$$x\varphi'(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Démontrer la formule asymptotique ci-dessous:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\lambda x}\, dx \sim \Gamma(\alpha)\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^\alpha} \quad (\lambda \to +\infty),\ \alpha > 0.$$

Indication. Voir le problème 4.10.

4.27. Soit $f(x)$ une fonction continûment différentiable sur le segment $a \leq x \leq b$, où $-\infty < a < b < +\infty$ satisfaisant aux conditions

$$f(a) \neq 0, \quad f(b) = 0.$$

Montrer que pour $\lambda \to +\infty$, $0 < \alpha < 1$, la formule asymptotique ci-dessous est valable :

$$\int_a^b f(x)(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\alpha-1}e^{i\lambda x}\, dx \sim (b-a)^{\alpha-1}f(a)\Gamma(\alpha) \cdot e^{\pi i\alpha/2}\lambda^{-\alpha}e^{i\alpha\lambda}.$$

4.28. Soit $f(x)$ une fonction continûment différentiable pour $x \geq 0$ satisfaisant aux conditions

$$f(0) \neq 0, \quad |f(x)| + |f'(x)| = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty).$$

Démontrer la formule asymptotique ci-dessous:

$$\int_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}\, dx \sim f(0)\Gamma(\alpha)e^{\pi i\alpha/2}\lambda^{-\alpha} \quad (\lambda \to +\infty),\ 0 < \alpha < 1.$$

4.29. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $$\int_1^\infty \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\lambda \to +\infty).$$

2. $$\int_{-1}^1 \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \to +\infty).$$

3. $$\int_0^\infty \frac{e^{i\lambda t^2}}{1+t^2}\, dt \sim (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{8\lambda}} \quad (\lambda \to +\infty).$$

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\sqrt{t}} \ln^2 t\, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \ln^2 \lambda \quad (\lambda \to +\infty).$$

4.30. Soit $f(x)$ une fonction admettant m dérivées continues sur tout l'axe réel et soit

$$\int_0^{\infty}\{|f(x)|+|f'(x)|+\ldots+|f^{(m)}(x)|\}\,dx<\infty.$$

Montrer que

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx=o(\lambda^{-m})\qquad(\lambda\to+\infty).$$

4.31. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période ω admettant m dérivées continues sur tout l'axe réel. Montrer que

$$\int_a^{a+\omega} f(x)e^{in\frac{2\pi x}{\omega}}\,dx=o(n^{-m})\qquad(n\to+\infty,\quad n=1,\ 2,\ \ldots).$$

* * *

Les intégrales du type $\int_0^{\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx$ peuvent être considérées (du point de vue de l'obtention des formules asymptotiques) comme un cas particulier des intégrales d'un type beaucoup plus général.

4.32. Soit $K(x, \lambda)$ une fonction positive et continue (par rapport à l'ensemble des variables) pour $x>0$, $\lambda>0$, satisfaisant à la condition suivante : pour chaque valeur fixée de $a>0$, la formule ci-dessous reste valable:

$$\int_0^{a} K(x, \lambda)\,dx=o(I(\lambda))\qquad(\lambda\to+\infty),$$

où

$$I(\lambda)=\int_0^{\infty} K(x, \lambda)\,dx<\infty.$$

Montrer que, si une fonction $f(x)$ est continue pour $x\geq 0$ et si elle admet A comme limite pour $x\to+\infty$, alors

$$\int_0^{\infty} f(x)K(x, \lambda)\,dx=I(\lambda)(A+o(1))\qquad(\lambda\to+\infty).$$

4.33. Soit $Q(x, \lambda)$ une fonction continue (par rapport à l'ensemble des variables) pour $x>0$, $\lambda>0$ satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $0<Q(x, \lambda)<1$; *b)* $\int_0^{\infty}(1-Q(x, \lambda))\,dx=o(1)\quad(\lambda\to+\infty).$

Montrer que, si la fonction $f(x)$ est continue pour $x \geq 0$ et si $\int_0^\infty |f(x)|\,dx < < \infty$, alors

$$\int_0^\infty f(x)Q(x, \lambda)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx + o(1) \quad (\lambda \to +\infty).$$

Dans les cas où la fonction $f(x)$ tend vers l'infini pour $x \to +\infty$ (voir le problème 4.32), ou bien lorsque l'intégrale de cette fonction diverge (cas du problème 4.33), les formules asymptotiques obtenues sont plus compliquées et elles dépendent en une plus grande mesure du type des fonctions $K(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$.

4.34. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \geq 0$, satisfaisant à la condition $f(x) \sim x^{\alpha-1}(x \to +\infty)$ (pour α les frontières sont spécifiées dans chaque cas séparément). Démontrer les formules suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-x/\lambda}\,dx \sim \lambda^\alpha \Gamma(\alpha) \qquad (\lambda \to +\infty),\ \alpha > 0.$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+\lambda}\,dx \sim \frac{\pi\lambda^{\alpha-1}}{\sin \pi\alpha} \qquad (\lambda \to +\infty),\ 0 < \alpha < 1.$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2+\lambda^2}\,dx \sim \frac{\pi\lambda^{\alpha-2}}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \qquad (\lambda \to +\infty),\ 0 < \alpha < 2.$

Indication. Considérer les formules ci-dessous comme connues

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,\ \alpha > 0; \qquad \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{t+1} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

4.35. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \geq 0$ satisfaisant à la condition $f(x) \sim \frac{1}{x}\ (x \to +\infty)$. Montrer que

$$\int_0^\infty f(x)e^{-\varepsilon x}\,dx \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}\ (\varepsilon \to +0).$$

Indication. Intégrer par parties.

4.36. Soit $f(x)$ une fonction continue pour $0 < x \leq 1$ satisfaisant à la condition $f(x) \sim x^{\alpha-1}(x \to +0)$ (pour α, les frontières sont spécifiées dans chaque cas séparément). Démontrer les formules suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+\varepsilon}\,dx \sim \frac{\pi\varepsilon^{\alpha-1}}{\sin \pi\alpha}\ (\varepsilon \to +0), \quad 0 < \alpha < 1.$

2. $\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{(x^2+\varepsilon^2)^m} \sim \varepsilon^{\alpha-2m} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(x^2+1)^m}$ $(\varepsilon \to +0)$, $0<\alpha<2m$.

3. $\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x^4+\varepsilon^4}} \sim \varepsilon^{\alpha-2} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$ $(\varepsilon \to +0)$, $0<\alpha<2$.

4.37. Soit $k(x, \varepsilon)$ une fonction positive et continue (par rapport à l'ensemble des variables) pour $0 \leq x \leq 1$, $\varepsilon > 0$ satisfaisant aux conditions suivantes:

a) Pour chaque a, $0<a\leq 1$, la formule ci-dessous est valable:

$$\int_0^a k(x, \varepsilon)\,dx \sim I(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to +0),$$

où $I(\varepsilon) = \int_0^1 k(x, \varepsilon)\,dx$.

b) Pour $x^2+\varepsilon^2 \to 0$; $x>0$, $\varepsilon>0$, la formule ci-dessous est valable

$$\frac{1}{k(x, \varepsilon)} = (x^2+\varepsilon^2)^m(1+o(1)), \qquad m>0.$$

Montrer que, si une fonction $f(x)$ est continue pour $0<x<1$ et si $f(x) \sim x^{\alpha-1}$ $(x \to +0)$, où $0<\alpha<2m$, alors

$$\int_0^1 f(x)k(x, \varepsilon)\,dx \sim \varepsilon^{\alpha-2m} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(x^2+1)^m} \qquad (\varepsilon \to +0).$$

4.38. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\int_1^\infty \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon \to +0)$.

2. $\int_2^\infty \frac{(\ln t)^\alpha e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t+1}}\,dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^\alpha$ $(\varepsilon \to +0)$.

3. $\int_0^1 (t^4+\varepsilon^4)^{-1/4}\,dt \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon \to +0)$.

4. $\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\,dt \sim \frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$ $(\varepsilon \to +0)$.

5. $\int_2^\infty \frac{(\ln t)^{\alpha-1}\,dt}{\sqrt{t^2+1}(t+\lambda)^m} \sim \frac{(\ln\lambda)^\alpha}{\alpha\lambda^m}$ $(\lambda \to +\infty)$, $\alpha \neq 0$, $m>0$.

6. $\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}(1-rt)^{-2}\,dt \sim \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha}(1-r)^{\alpha-2}$ $(r\to 1-0)$, $0<\alpha<2$.

7. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-rt)}} \sim \ln\frac{1}{1-r}$ $(r\to 1-0)$.

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi}} \sim \ln\frac{1}{1-r}$ $(r\to 1-0)$.

9. $\int_{-\pi}^{\pi} (1+r^2-2r\cos\varphi)^{-n}\,d\varphi \sim \frac{2}{(1-r)^{2n-1}}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $(r\to 1-0)$, $n>1/2$.

10. $\int_{-\pi}^{\pi} (1+r^2-2r\cos\varphi)^{-1/2}\,d\varphi \sim 2\ln\frac{1}{1-r}$ $(r\to 1-0)$.

* * *

Pour les intégrales du type $\int_0^a f(x)e^{-\lambda x}\,dx$, les formules asymptotiques peuvent aussi être généralisées dans une autre direction.

4.39. Soient $f(x)$ une fonction continue sur le segment $0\leq x\leq a$ et $f(0)\neq 0$, et soient $h(x)$ une fonction continûment différentiable sur ce segment et $h'(x)>0$ pour $0\leq x\leq a$. Montrer que

$$\int_0^a f(x)e^{-\lambda h(x)}\,dx \sim \frac{f(0)}{\lambda h'(0)}e^{-\lambda h(0)} \qquad (\lambda\to+\infty).$$

4.40. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues et positives sur le segment $0\leq x\leq a$, et soient σ et μ des constantes positives. Démontrer que

$$\int_0^a f(x)x^{\sigma-1}e^{-\lambda x^{\mu}g(x)}\,dx \sim \frac{1}{\mu}f(0)[\lambda g(0)]^{-\frac{\sigma}{\mu}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{\mu}\right) \qquad (\lambda\to+\infty).$$

4.41. Soient $h(x)$ une fonction deux fois continûment différentiable sur le segment $a\leq x\leq b$ y admettant un maximum unique au point c, $a<c<b$, et $h''(c)\neq 0$, et soient $f(x)$ une fonction continue sur le segment $a\leq x\leq b$ et $f(c)\neq 0$. Démontrer que

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda h(x)}\,dx \sim f(c)e^{\lambda h(c)}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda h''(c)}} \qquad (\lambda\to+\infty).$$

4.42. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\,dx \sim \frac{1}{2n} \quad (n \to +\infty).$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (n \to +\infty).$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad (n \to +\infty).$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (n \to +\infty).$

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n\,dx}{(1+x^2)^n} \sim 2^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad (n \to +\infty).$

6. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}\,dx \sim e^{-\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (\lambda \to +\infty).$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin x} \sin 2mx\,dx \sim \frac{4m}{\lambda^2} \quad (\lambda \to +\infty).$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\lambda \sin x} \cos^4 x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda^5}}\,e^{\lambda} \quad (\lambda \to +\infty).$

9. $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha n}(1-x)^{(1-\alpha)n}\,dx \sim \alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}\sqrt{\frac{2\pi\alpha(1-\alpha)}{n}} \quad (n \to +\infty,\ 0<\alpha<1).$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n\alpha}}{(1+x^2)^n}\,dx \sim \alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}\sqrt{\frac{\pi}{(1-\alpha)n}} \quad (n \to +\infty,\ 0<\alpha<1).$

4.43. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{1} (1+x^4)^{-\lambda}\,dx \sim \lambda^{-1/4}\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \quad (\lambda \to +\infty).$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 x^2 + x}}{1+\lambda^2(x^2+x^4)}\,dx \sim \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt \quad (\lambda \to +\infty).$

4.44. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x\sqrt{n}}}{(1+x^2)^n}\,dx \sim e^{-n\ln 2-\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad (n \to +\infty).$

2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^n n^{-n}}{(1+x^2)^n}\,dx \sim 2^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n^3}} \quad (n\to+\infty).$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2x^2+x}}{x^2+\lambda x^4+1}\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (\lambda\to+\infty).$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x^4-x^2}}{1+x^4+\lambda x^6}\,dx \sim \lambda^{-1/4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \quad (\lambda\to+\infty).$

4.45. Démontrer la formule de Stirling

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x} \quad (x\to+\infty).$$

Indication. Dans la formule $\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt$ effectuer le changement de variable $t=xu$.

4.46. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-e^x+\lambda x\}\cdot x^{2m}\,dx \sim \sqrt{2\pi}(\ln\lambda)^{2m}\lambda^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} \quad (\lambda\to+\infty,\ m>0).$

2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x^p}{p}+\lambda x}\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p-1}}\,\lambda^{\frac{2-p}{2p-2}}\,e^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\lambda^{p/(p-1)}} \quad (\lambda\to+\infty,\ p>1).$

3. $\int\limits_0^{\infty} x^{m-1}e^{-\frac{x^p}{p}+\lambda x}\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p-1}}\,\lambda^{\frac{2m-p}{2p-2}}\,e^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\lambda^{p/(p-1)}} \quad (\lambda\to+\infty,\ p>1,\ m>0).$

4.47. Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le disque $x^2+y^2\le a^2$ telle que $f(0, 0)\ne 0$. Montrer que

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x, y)e^{-\lambda(x^2+y^2)}\,dx\,dy \sim \frac{f(0, 0)}{\lambda} \quad (\lambda\to+\infty).$$

4.48. Soit $h(x, y)$ une fonction deux fois continûment différentiable dans le disque $x^2+y^2\le a^2$ y admettant un maximum unique au point (ξ, η) strictement intérieur à ce disque, avec

$$H(\xi, \eta)=h''_{xx}(\xi, \eta)h''_{yy}(\xi, \eta)-[h''_{xy}(\xi, \eta)]^2\ne 0.$$

Montrer que

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} e^{\lambda h(x, y)}\,dx\,dy \sim -\frac{e^{\lambda h(\xi, \eta)}}{\lambda H(\xi, \eta)} \quad (\lambda\to+\infty).$$

* * *

Pour les sommes d'un nombre croissant de termes et pour les sommes des séries infinies dont les termes dépendent d'un paramètre, on arrive souvent à réduire l'obtention des formules asymptotiques à celle des formules asymptotiques pour les intégrales. Dans beaucoup de cas, cela s'effectue à l'aide des estimations qui constituent l'objet des deux problèmes suivants.

4.49. Soit $f(x)$ une fonction positive continue et monotone pour $x \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,dx + O(1) + O(f(n)) \quad (n \to \infty).$$

4.50. Soit $f(x)$ une fonction continûment différentiable pour $x \geq 0$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)\,dx \right| \leq |f(0)| + \int_0^n |f'(x)|\,dx.$$

4.51. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \quad (n \to \infty).$

2. $\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln n)^{\beta} \quad (n \to \infty),\ \alpha > -1.$

3. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}(\ln k)^{\alpha} \sim \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (n \to \infty),\ \alpha > -1.$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} e^{k^{\beta}} \sim \frac{1}{\beta} n^{\alpha-\beta+1} e^{n^{\beta}} \quad (n \to \infty),\ \beta < 1.$

5. $\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha} e^{-k^{\beta}} \sim \frac{1}{\beta} n^{\alpha-\beta+1} e^{-n^{\beta}} \quad (n \to \infty),\ \beta < 1.$

4.52. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} e^{k^{\beta}} \sim n^{\alpha} e^{n^{\beta}} \quad (n \to \infty),\ \beta > 1.$

2. $\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha} e^{-k^{\beta}} \sim n^{\alpha} e^{-n^{\beta}} \quad (n \to \infty),\ \beta > 1.$

3. $\sum_{k=1}^{n} (k!)^{\alpha} \sim (n!)^{\alpha} \quad (n \to \infty),\ \alpha > 0.$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} q^{k} \sim \frac{n^{\alpha} q^{n+1}}{q-1} \quad (n \to \infty),\ q > 1.$

5. $\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha} q^{k} \sim \frac{n^{\alpha} q^{n}}{1-q} \quad (n \to \infty),\ -1 < q < 1.$

4.53. Démontrer les formules asymptotiques suivantes:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \sim \frac{\ln 2}{1-x} \quad (x \to 1-0).$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-xn} \cdot \frac{1}{n} \sim \ln \frac{1}{x} \quad (x \to +0).$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}x^n \sim \Gamma(\alpha)(1-x)^{-\alpha} \quad (x \to 1-0),\ \alpha > 0.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-1}e^{-xn^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) x^{-\beta/\alpha} \quad (x \to +0),\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

Les estimations asymptotiques sont souvent utilisées lors de l'étude des solutions des équations transcendantes. Le procédé fondamental consiste dans l'utilisation des approximations successives de la solution cherchée.

4.54. Des considérations géométriques montrent que l'équation $\operatorname{tg} x = x$ admet pour racine x_n satisfaisant à la condition

$$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} + o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Montrer que

$$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to +\infty).$$

4.55. Montrer que la formule asymptotique

$$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to +\infty)$$

est valable pour la racine x_n de l'équation $\operatorname{tg} x = x$ citée dans le problème 4.54.

4.56. Notons x_n la racine de l'équation $\cos x + \frac{1}{x} = 0$ située sur le segment $[2\pi n,\ 2\pi n + \pi]$. Montrer que

$$x_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to +\infty).$$

4.57. Soit $0 < \alpha < 1$. Notons x_n la racine de l'équation $\sin x = x^{-\alpha}$ située sur le segment $\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ (2n+1)\pi\right]$, $n \geq 0$. Montrer que

$$x_n = (2n+1)\pi - \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} + O(n^{-2\alpha}) \quad (n \to +\infty).$$

4.58. Montrer que l'équation

$$\int_x^{+\infty} \sin t^2\, dt + \frac{1}{x^2} = 0$$

admet sur le segment $[\sqrt{2n\pi},\ \sqrt{(2n+1)\pi}]$, pour $n > 2$, exactement une racine x_n et obtenir pour celle-ci la formule asymptotique suivante:

$$x_n = \sqrt{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{n^{-3/2}}{4\pi\sqrt{2\pi}} + O(n^{-5/2}) \quad (n \to +\infty).$$

Indication. Avant d'obtenir la formule asymptotique pour x_n, démontrer la formule asymptotique suivante:

$$\int_x^{+\infty} \sin t^2\, dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O(x^{-3}) \qquad (x \to +\infty).$$

4.59. Soit $t > 0$. Notons $\lambda(t)$ la racine positive unique de l'équation $xe^x = t$. Montrer que:

1. Pour tous les $t > e$, l'inégalité
$$\ln t - \ln \ln t < \lambda(t) < \ln t$$
est valable.
2. Pour $t \to +\infty$, la formule asymptotique
$$\lambda(t) = \ln t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)$$
est valable.

4.60. Soit $t > e$. Notons $\lambda(t)$ la racine unique de l'équation $\frac{x}{\ln x} = t$ qui, elle aussi, est supérieure à e. Démontrer la formule asymptotique suivante :

$$\lambda(t) = t \ln t + O(t \ln \ln t) \qquad (t \to +\infty).$$

4.61. Soit $t > 1$. Notons $\lambda(t)$ la racine unique de l'équation $x^2 + \ln^2 x = t$ qui, elle aussi, est supérieure à l'unité. Démontrer la formule asymptotique suivante:

$$\lambda(t) = \sqrt{t} - \frac{\ln^2 t}{8\sqrt{t}} + O\left(\frac{\ln^4 t}{t}\right) \qquad (t \to +\infty).$$

RÉPONSES

4.16.

1. $x^{\alpha-1}e^{x^2/2}$. 2. $\frac{1}{m} x^{\alpha-m+1}e^{-x^m}$.

3. xe^{-x}. 4. $\frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. 5. $\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}(\sin x + \cos x)$.

6. $xe^{-x}\cos e^x$. 7. $\frac{x}{2} e^x(\sin x - \cos x)$.

8. $(\ln x)^\alpha e^{-\sqrt{x}} \cos x$.

9. $x^{\alpha+2}e^{-1/x}$. 10. $x^{\alpha+2}e^{1/x}$.

§ 5. Fonctions uniformes élémentaires

En se familiarisant avec les fonctions d'une variable complexe, il est souvent commode d'en parler en termes des applications qu'elles réalisent (voir 6°, § 3).

Si l'on ne prend pas en considération les fonctions identiquement constantes, les plus simples fonctions d'une variable complexe seront représentées par la *fonction linéaire*

$$w = Az + B, \qquad A \neq 0$$

et la *fonction homographique*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

(Les conditions $A \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$, en vertu desquelles les fonctions ne sont pas identiquement constantes, sont considérées remplies partout dans ce qui suit.)

5.01. Montrer qu'une fonction linéaire réalise une application biunivoque du plan complexe des z dans le plan complexe des w.

5.02. Montrer qu'une fonction homographique réalise une application biunivoque du plan complexe élargi des z dans le plan complexe élargi des w.

5.03. Montrer que la réalisation consécutive d'un nombre arbitraire d'applications linéaires (c'est-à-dire des applications réalisées par une fonction linéaire) se réduit à une seule application linéaire.

5.04. Montrer que la réalisation consécutive d'un nombre arbitraire d'applications homographiques se réduit à une seule application homographique.

5.05. Montrer qu'une application linéaire transforme une droite en une droite et une circonférence en une circonférence.

5.06. Montrer que l'application linéaire $w=Az+B$, $A \neq 1$, se réduit à une homothétie (de centre $B/1-A$ et de rapport de similitude $|A|$) et à une rotation de l'angle $\arg A$ autour du centre d'homothétie dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

5.07. Montrer qu'une application homographique transforme une circonférence sur la sphère de Riemann en une circonférence sur la sphère de Riemann.

5.08. Soit $w(z)$ une application linéaire et soient z_1, z_2, z_3 trois points arbitraires deux à deux distincts. Posons $w_k=w(z_k)$. Montrer que

$$\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$$

5.09. Soit $w(z)$ une application homographique et soient z_1, z_2, z_3, z_4 4 points arbitraires deux à deux distincts. Posons $w_k=w(z_k)$. Montrer que

$$\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

5.10. Trouver les images des ensembles E par les applications réalisées par les fonctions ci-dessous :

1. E : $\operatorname{Im} z=1$; $\quad w=\dfrac{z-1}{z+1}$.

2. E : $x^2+y^2+2x+2y+1=0$; $\quad w=\dfrac{2z+3}{z+i}$ $\quad (x+iy=z)$.

3. E : $|z+1|=1$; $\quad w=\dfrac{1}{z}$. $\qquad$ 4. E : $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{4}$; $\quad w=-\dfrac{1}{z}$.

5. E : $|z|=2$; $\quad w=\dfrac{z}{z+1}$.

6. E : $\operatorname{Re} z=1$; $\quad w=\dfrac{z}{1+z}$. $\qquad$ 7. E : $|z|=1$; $\quad w=\dfrac{i+z}{i-z}$.

8. $E: |z| \leq 1;$ $w = \dfrac{z+2}{1+2z}$. 9. $E: |z| \geq 1;$ $w = 2\dfrac{2z-1}{z-2}$.

10. $E: \operatorname{Re} z > 0;$ $w = \dfrac{z+a}{z-a}$, $a < 0$.

* * *

Il est extrêmement difficile de décrire les applications réalisées par un polynôme arbitraire ou par une fonction rationnelle. L'étude des applications réalisées par les fonctions $w = z^n$ et $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est relativement aisée.

5.11. Trouver les images des ensembles E par les applications réalisées par les fonctions ci-dessous:

1. $E: \left\{|z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\};$ $w = z^4$.
2. $E: \{|z| > 2, \quad 0 < \arg z < \pi\};$ $w = z^3$.
3. $E: \operatorname{Re} z = 1;$ $w = z^2$.
4. $E: \operatorname{Im} z = 1;$ $w = z^2$.
5. $E: |z| = 2;$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
6. $E: |z| = \frac{1}{2};$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
7. $E: (|z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0);$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
8. $E: |z| < \frac{1}{2};$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
9. $E: \arg z = \frac{\pi}{4};$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
10. $E: \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4};$ $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.



Pour les valeurs complexes de z, la fonction e^z est définie comme la somme de la série entière $e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$, qui converge dans chaque cercle $|z| \leq R < \infty$.

5.12. En multipliant des séries entières démontrer la formule

$$e^z \cdot e^\zeta = e^{z+\zeta}.$$

5.13. Soient $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Montrer que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

5.14. Calculer les valeurs de la fonction e^z aux points suivants:

1. $z=2\pi i$. 2. $z=\pi i$. 3. $z=\pi i/2$. 4. $z=-\pi i/2$.
5. $z=\pi i/4$.

5.15. Montrer que $|e^z|=e^{\operatorname{Re} z}$.

5.16. Montrer que pour tous les z l'égalité ci-dessous a lieu

$$e^{z+2\pi i}=e^z.$$

5.17. Montrer qu'il n'y a aucune valeur de z pour laquelle la fonction e^z s'annule.

5.18. Soit A un nombre complexe arbitraire non nul. Montrer que toutes les solutions de l'équation $e^z=A$ sont données par la formule

$$z=\ln|A|+i\arg A+2k\pi i,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

5.19. Décrire tous les points z, où la fonction e^z prend:

1. Des valeurs réelles.
2. Des valeurs purement imaginaires.

* * *

Pour les valeurs complexes de z, les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont définies par les formules

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

(pour les fonctions $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, les formules, qui les expriment par les fonctions fondamentales $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, sont conservées).

5.20. En partant de la définition ci-avant, démontrer les formules suivantes:

1. $\cos(-z)=\cos z$. 2. $\sin(-z)=-\sin z$.
3. $\operatorname{ch}(-z)=\operatorname{ch} z$. 4. $\operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z$.
5. $\cos^2 z+\sin^2 z=1$. 6. $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$.
7. $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.
8. $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.
4. $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z$.
9. $\operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2$.
10. $\cos z_1+\cos z_2=2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$.

5.21. Démontrer les formules suivantes:

1. $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$. 2. $\sin(z+\pi)=-\sin z$.
3. $\sin(z+2\pi)=\sin z$. 4. $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z$.
5. $\cos(z+2\pi)=\cos z$. 6. $\operatorname{tg}(z+\pi)=\operatorname{tg} z$.

7. $\operatorname{sh}\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)=i \operatorname{ch} z$. 8. $\operatorname{ch}\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)=i \operatorname{sh} z$.

9. $\operatorname{sh}(z+\pi i)=-\operatorname{sh} z$. 10. $\operatorname{ch}(z+\pi i)=-\operatorname{ch} z$.

11. $\operatorname{th}(z+\pi i)=\operatorname{th} z$. 12. $\operatorname{ch}(z+2\pi i)=\operatorname{ch} z$.

5.22. Démontrer les formules suivantes:

1. $\operatorname{sh} z=-i \sin(iz)$. 2. $\operatorname{sh}(iz)=i \sin z$.
3. $\cos(iz)=\operatorname{ch} z$. 4. $\operatorname{ch}(iz)=\cos z$.
5. $\operatorname{tg}(iz)=i \operatorname{th} z$. 6. $\operatorname{th}(iz)=i \operatorname{tg} z$.
7. $\operatorname{ctg}(iz)=-i \operatorname{cth} z$. 8. $\operatorname{cth}(iz)=-i \operatorname{ctg} z$.

5.23. Soient $x=\operatorname{Re} z$ et $y=\operatorname{Im} z$. Montrer que

1. $\operatorname{Re} \sin z=\sin x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} \sin z=\cos x \cdot \operatorname{sh} y$.
2. $\operatorname{Re} \cos z=\cos x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} \cos z=-\sin x \cdot \operatorname{sh} y$.
3. $\operatorname{Re} \operatorname{sh} z=\operatorname{sh} x \cdot \cos y$, $\operatorname{Im} \operatorname{sh} z=\operatorname{ch} x \cdot \sin y$.
4. $\operatorname{Re} \operatorname{ch} z=\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} \operatorname{ch} z=\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.
5. $\operatorname{Re} \operatorname{tg} z=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$, $\operatorname{Im} \operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x+\operatorname{ch} 2y}$.
6. $\operatorname{Re} \operatorname{ctg} z=\frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}$, $\operatorname{Im} \operatorname{ctg} z=\frac{-\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}$.

5.24. Soient $x=\operatorname{Re} z$ et $y=\operatorname{Im} z$. Montrer que

1. $|\sin z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-\cos^2 x}$. 2. $|\cos z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-\sin^2 x}$.
3. $|\operatorname{sh} z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-\cos^2 y}$. 4. $|\operatorname{ch} z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-\sin^2 y}$.
5. $|\operatorname{tg} z|=\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y+\cos 2x}}$. 6. $|\operatorname{cth} z|=\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x+\cos 2y}{\operatorname{ch} 2x-\cos 2y}}$.

5.25. Décrire les points z, où les fonctions ci-dessous prennent des valeurs réelles:

1. $\cos z$. 2. $\operatorname{ch} z$. 3. $\sin z$. 4. $\operatorname{tg} z$. 5. $\operatorname{cth} z$.

5.26. Décrire les points z, où les fonctions ci-dessous prennent des valeurs purement imaginaires:

1. $\sin z$. 2. $\operatorname{sh} z$. 3. $\cos z$. 4. $\operatorname{ctg} z$. 5. $\operatorname{tg} z$.

5.27. Trouver tous les points, où les fonctions ci-dessous s'annulent:

1. $\sin z$. 2. $\cos z$. 3. $\operatorname{sh} z$. 4. $\operatorname{ch} z$.

5.28. Trouver toutes les solutions des équations suivantes:

1. $\sin z=4i/3$. 2. $\sin z=5/3$. 3. $\cos z=3i/4$.
4. $\cos z=(3+i)/4$. 5. $\operatorname{tg} z=5i/3$. 6. $\operatorname{ctg} z=-3i/5$.
7. $\operatorname{sh} z=i/2$. 8. $\operatorname{ch} z=1/2$.

5.29. En développant la fonction $\cos xz$ en série de Fourier sur le segment $-\pi \leq x \leq \pi$, obtenir la formule

$$\cos xz=\frac{\sin \pi z}{\pi z}-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z \sin \pi z}{n^2-z^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

5.30. En s'appuyant sur la formule du problème 5.29, démontrer les formules suivantes:

1. $\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$. 2. $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$.

3. $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

4. $\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n-\frac{1}{2}}$. 5. $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

6. $\pi \operatorname{cth} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2}$.

7. $\operatorname{sh} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$.



Lors de l'étude de la convergence des séries ou des intégrales, de même qu'en beaucoup d'autres circonstances, il est utile de se rappeler diverses inégalités concernant les fonctions exponentielle et trigonométriques.

5.31. Montrer que pour $|z| \leq R$, les inégalités ci-dessous ont lieu:

1. $|\operatorname{ch} z| \leq \operatorname{ch} R$. 2. $|\operatorname{sh} z| \leq \operatorname{sh} R$. 3. $|\cos z| \leq \operatorname{ch} R$.

4. $|\sin z| \leq \operatorname{sh} R$.

5.32. Soient $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Montrer que:

1. La fonction e^z tend vers l'infini lorsque x tend vers $+\infty$, cette tendance étant uniforme par rapport à y.

2. La fonction e^z tend vers zéro lorsque $x \to -\infty$, cette tendance étant uniforme par rapport à y.

3. Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ tendent vers l'infini lorsque $y \to \pm\infty$, cette tendance étant uniforme par rapport à x.

5.33. Montrer que:

1. La fonction e^{z^2} tend vers l'infini pour $z \to \infty$, en tout angle du type $|\arg z - \pi| \leq \alpha$ et en tout angle du type $|\arg z| \leq \alpha$, si seulement $\alpha < \pi/4$.

2. La fonction e^{z^2} tend vers zéro, pour $z \to \infty$, en tout angle du type $|\arg z \pm \pi/2| \leq \alpha < \pi/4$.

5.34. Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Montrer que la fonction $e^{P(z)}$ tend vers l'infini pour $z \to \infty$ dans les angles

$$\left|\arg z - \frac{2k\pi}{n}\right| \leq \alpha < \frac{\pi}{2n} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

et qu'elle tend vers zéro pour $z \to \infty$ dans les angles

$$\left|\arg z - \frac{(2k+1)\pi}{n}\right| \leq \alpha < \frac{\pi}{2n} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

5.35. Soient $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Montrer les inégalités suivantes:

1. $\dfrac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \leq |\sin z| \leq \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$.

2. $\dfrac{e^{|y|} - e^{-|y|}}{2} \leq |\cos z| \leq \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$.

3. $\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \leq |\operatorname{tg} z - i| \leq \dfrac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \quad (y > 0)$.

4. $\dfrac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} \leq |\operatorname{tg} z + i| \leq \dfrac{2e^{2y}}{1-e^{2y}} \quad (y < 0)$.

5. $\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \leq |\operatorname{ctg} z + i| \leq \dfrac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \quad (y > 0)$.

6. $\dfrac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} \leq |\operatorname{ctg} z - i| \leq \dfrac{2e^{2y}}{1-e^{2y}} \quad (y < 0)$.

5.36. Soit $0 < \varrho < \pi/2$. Notons D_ϱ tout le plan complexe privé des disques $|z - \pi n| < \varrho$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ Montrer que

1. $|\operatorname{ctg} z| \leq \operatorname{cth} \varrho \quad (z \in D_\varrho)$. 2. $|\sin z| \geq \sin \varrho \quad (z \in D_\varrho)$.

5.37. Soit $f(z)$ une fonction continue pour $\operatorname{Re} z \geq 0$, $|z| \geq R$ satisfaisant à la condition $f(z) \to 0$ ($\operatorname{Re} z \geq 0$, $|z| \to \infty$). Montrer que

$$\int_{C_r} f(z) e^{iz}\, dz \to 0 \quad (r \to \infty); \qquad (C_r : |z| = r, \ \operatorname{Re} z \geq 0).$$

Indication. Voir le problème 3.71.

5.38. Soit $f(z)$ une fonction continue dans le domaine D

$$|z| \geq R, \qquad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

satisfaisant à la condition $|f(z)| = o(|z|^{\alpha})$ ($z \to \infty$, $z \in D$). Montrer que

$$\int_{C_r} f(z) e^{-z^n}\, dz = o(r^{\alpha - n + 1}) \quad (r \to \infty), \ (C_r : |z| = r, \ z \in D).$$

5.39. Soit $f(z)$ une fonction continue dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq A$ satisfaisant à la condition $f(z) \to 0$ ($\operatorname{Re} z \to +\infty$). Montrer que:

1. $\displaystyle\int_{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\infty} f(z) \frac{dz}{\sin z} \to 0 \quad (n \to +\infty, \ n = 1, 2, \ldots)$.

2. $\displaystyle\int_{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\infty} f(z)(\operatorname{ctg} z + i)\, dz \to 0 \quad (n \to +\infty, \ n = 1, 2, \ldots)$.

* * *

5.40. Trouver la grandeur $H_f(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}$ pour les fonctions $f(z)$ suivantes :

1. e^z. 2. $\sin z$. 3. $\operatorname{ch} z$. 4. $(\operatorname{sh} z - \alpha_1)(\operatorname{sh} z - \alpha_2)$.

5.41. Trouver la grandeur $\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \frac{\ln|f(\lambda z)|}{\lambda}$ pour les fonctions $f(z)$ suivantes :

1. e^z. 2. $\sin z$. 3. $\cos z$. 4. $\operatorname{sh} z$. 5. $\operatorname{ch} z$.

5.42. Trouver la grandeur $\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln|f(x+iy)|}{y}$ pour les fonctions $f(z)$ suivantes :

1. $\sin z$. 2. e^{iz^2}. 3. e^{-2iz^2}.

RÉPONSES

5.10.

1. La circonférence $|w-1-i|=1$.
2. La droite $-6 \operatorname{Re} w + 4 \operatorname{Im} w = 1$.
3. La droite $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$.
4. La circonférence $\left|w+\frac{8}{3}\right| = \frac{4}{3}$.
5. La circonférence $\left|w-\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}$.
6. La circonférence $\left|w-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$.
7. L'axe imaginaire.
8. L'extérieur du cercle unité.
9. $|w| \geq 2$. 10. Le cercle unité.

5.11.

1. Le demi-disque $|w| \leq 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$. 2. Le domaine $|w| > 8$.
3. La parabole $u = 1 - v^2/4$, $w = u + iv$.
4. La parabole $u = v^2/4 - 1$, $w = u + iv$.
5. L'ellipse ayant pour foyers 1 et -1 et pour demi-axes 5/4 et 3/4.
6. L'ellipse ayant pour foyers 1 et -1 et pour demi-axes 5/4 et 3/4.
7. Tout le plan complexe élargi présentant une coupure suivant le segment $(-1, 1)$ de l'axe réel.
8. L'extérieur de l'ellipse $\frac{u^2}{(5/4)^2} + \frac{v^2}{(3/4)^2} = 1$, $w = u + iv$.
9. La branche de droite de l'hyperbole $u^2 - v^2 = 1/2$, $w = u + iv$.
10. Le domaine compris entre les deux branches de l'hyperbole $u^2 - v^2 = 1/2$, $w = u + iv$.

5.14.

1. 1; 2. -1; 3. i; 4. $-i$; 5. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

5.19.

1. $\operatorname{Im} z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $\operatorname{Im} z = (2k+1)\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.25.

1. $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = (k+1/2)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $\operatorname{Im} z = 0$. 5. $\operatorname{Im} z = k\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.26.

1. $\operatorname{Im} z=0$; $\operatorname{Re} z=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $\operatorname{Re} z=0$; $\operatorname{Im} z=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. $\operatorname{Im} z=0$; $\operatorname{Re} z=(k+1/2)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $\operatorname{Re} z=k\pi/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $\operatorname{Im} z=(k+1/2)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.27.

1. $z=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $z=(k+1/2)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. $z=k\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $z=(k+1/2)\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.28.

1. $z=i(-1)^k \ln 3+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $z=\pm i \ln 3+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. $z=\pm\left(-i \ln 2+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $z=\pm\left(-\frac{i}{2} \ln 2+\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $z=i \ln 2+\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
6. $z=i \ln 2+\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
7. $z=(-1)^k \frac{\pi i}{6}+k\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
8. $z=\pm \frac{\pi i}{3}+2k\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.40.

1. $\cos \varphi$. 2. $|\sin \varphi|$. 3. $|\cos \varphi|$. 4. $2|\cos \varphi|$.

5.41.

1. $\operatorname{Re} z$. 2. $|\operatorname{Im} z|$. 3. $|\operatorname{Im} z|$. 4. $|\operatorname{Re} z|$. 5. $|\operatorname{Re} z|$.

5.42.

1. 1. 2. $-2x$. 3. $4x$.

§ 6. Convergence uniforme. Séries entières

Une suite $\{f_n(z)\}$, $n=1, 2, \ldots$, de fonctions définies sur un ensemble E est appelée *uniformément convergente sur l'ensemble E* vers la fonction $f(z)$ si, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tous les points $z \in E$, il existe un numéro N (dépendant de ε, mais indépendant de z) tel que pour $n>N$ l'inégalité $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ $(z \in E)$ ait lieu.

6.01. Montrer que sur chaque ensemble fermé E contenu dans le disque $|z|<1$ la suite $\left\{\frac{1}{1+z^n}\right\}$ converge uniformément vers la fonction $f(z)=1$, tandis que sur chaque ensemble fermé E contenu dans le domaine $|z|>1$ cette suite converge uniformément vers la fonction $f(z)=0$.

6.02. Montrer que la suite $\{nze^{-n^2z^2}\}$ converge uniformément vers la fonction $f(z)=0$ dans l'angle $|\arg z| \leq \alpha$ pour tout α, $0 \leq \alpha < \pi/4$.

6.03. Soit $\{f_n(z)\}$ une suite qui converge uniformément vers une fonction $f(z)$ sur un ensemble E, et supposons les fonctions $f_n(z)$ continues sur l'ensemble E. Montrer que la fonction $f(z)$ est continue elle aussi sur cet ensemble.

La majeure partie des critères de convergence uniforme n'est pas formulée pour les suites mais pour les séries fonctionnelles.

La série fonctionnelle $\sum_1^\infty u_n(z)$ est appelée *uniformément convergente sur un ensemble E* si la suite $\left\{\sum_1^n u_k(z)\right\}$ de ses sommes partielles converge uniformément vers une certaine fonction sur cet ensemble.

6.04. Soit $\sum_1^\infty |u_n(z)|$ une série uniformément convergente sur un ensemble E et soient $v_n(z)$ des fonctions définies sur cet ensemble satisfaisant aux inégalités $|v_n(z)| \leq |u_n(z)| (z \in E)$. Montrer que la série $\sum_1^\infty v_n(z)$ est uniformément convergente sur l'ensemble E.

6.05. Soient $a_n \geq 0$ et $\sum_1^\infty a_n < \infty$ et soient $u_n(z)$ des fonctions définies sur un ensemble E satisfaisant aux inégalités

$$|u_n(z)| \leq a_n \quad (z \in E,\ n > n_0).$$

Montrer que la série $\sum_1^\infty u_n(z)$ converge uniformément sur l'ensemble E.

6.06. Montrer que les séries ci-dessous convergent uniformément sur les ensembles E indiqués entre parenthèses:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n} \quad (E : |z| \geq 1).$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz} \quad (E : \operatorname{Re} z \geq \delta > 0).$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n + z^{-n}} \quad \left(E : |z| \leq \varrho < \frac{1}{2}\right).$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad (E : \operatorname{Re} z \geq \delta > 1).$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z} \quad (E : \operatorname{Re} z \geq \delta > 0).$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nz \quad (E : |\operatorname{Im} z| \leq \delta < \ln 2).$

Parfois, ce n'est pas privé de sens de parler de la convergence uniforme d'une série dont les termes peuvent devenir infinis (la somme aussi). Dans

ces cas, nous allons utiliser une définition quelque peu différente de la convergence:

Une série fonctionnelle $\sum_{1}^{\infty} u_n(z)$ est appelée *uniformément convergente sur un ensemble E*, sur lequel sont définies les fonctions $u_n(z)$ (mais elles peuvent prendre la valeur ∞), si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous les $z \in E$, il existe un numéro N (dépendant de ε mais indépendant de z) tel que pour $n > N$ toutes les fonctions $u_n(z)$ soient finies sur l'ensemble E et l'inégalité ci-dessous soit satisfaite:

$$\left| \sum_{n=N}^{N+m} u_n(z) \right| < \varepsilon \qquad (z \in E, \ m > 0).$$

6.07. Montrer que les séries suivantes convergent uniformément sur les ensembles E indiqués entre parenthèses:

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \quad (E : |z| \leq R < \infty).$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{e^z - n} (E : |z| \leq R < \infty).$ 3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{(z-n)n} (E : \operatorname{Re} z \leq 0).$

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^z}{n+z} (E : \operatorname{Re} z \leq \delta - 1).$

6.08. Soit $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Montrer que:

1. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément pour $|z| \leq \varrho < 1$.

2. La série $\sum_{0}^{\infty} a_n e^{-nz}$ converge uniformément pour $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$.

3. La série $\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \cos nz$ converge uniformément pour $|\operatorname{Im} z| \leq \delta < \ln 2$.

4. La série $\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n R^n}{z^n + z^{-n}}$ converge uniformément pour $|z| \leq \varrho < \min\left(1, \frac{1}{R}\right)$.

5. La série $\sum_{0}^{\infty} a_n e^{-n^2 z}$ converge uniformément pour $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$.

6.09. Définissons les fonctions $f_n(z)$ par les égalités

$$f_0(z) = \frac{z(z+1)}{2}, \quad f_{n+1}(z) = f_0(f_n(z)).$$

Montrer que la suite $\{f_n(z)\}$ converge uniformément vers zéro sur chaque ensemble fermé E contenu dans le disque $|z| < 1$.

6.10. Montrer que la suite $\{2^n f_n(z)\}$, où les fonctions $f_n(z)$ sont définies dans le problème 6.09, converge uniformément vers une certaine fonction sur chaque ensemble fermé E contenu dans le disque $|z| < 1$.

* * *

Soient $q_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, des fonctions définies sur un ensemble E. Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} q_n(z)$ est appelé uniformément convergent sur l'ensemble E, si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous les points $z \in E$, il existe un numéro N (dépendant de ε mais indépendant de z) tel que pour tout m entier positif et pour tous les $z \in E$ l'inégalité ci-dessous soit satisfaite:

$$\left| \prod_{n=N}^{N+m} q_n(z) - 1 \right| < \varepsilon.$$

6.11. Montrer que, si la série $\sum_1^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformément sur un ensemble E, le produit infini $\prod_1^{\infty} (1+u_n(z))$ converge uniformément lui aussi sur l'ensemble E.

6.12. Montrer que les produits infinis ci-dessous convergent uniformément sur les ensembles E indiqués entre parenthèses:

1. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ $(E : |z| \leq R < \infty)$.
2. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ $(E : |z| \leq R < \infty)$.
3. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + n^{-z})$ $(E : \operatorname{Re} z \geq \delta > 1)$.
4. $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^n)$ $(E : |z| \leq \varrho < 1)$.

6.13. Montrer que, si les séries $\sum_1^{\infty} u_n(z)$ et $\sum_1^{\infty} |u_n(z)|^2$ convergent uniformément sur un ensemble E, le produit infini $\prod_1^{\infty} (1+u_n(z))$ converge uniformément lui aussi sur l'ensemble E.



Admettons que pour toute valeur du paramètre z, faisant partie d'un ensemble E, la fonction $F(t, z)$ soit continue par rapport à t dans l'intervalle $a \leq t < b$ et qu'au point $t = b$ elle devienne infinie (ou bien $b = \infty$). L'intégrale impropre $\int_a^b F(t, z)\,dt$ ayant une singularité au point $t = b$ est appelée *uniformément convergente par rapport à z sur l'ensemble E* si, indépendamment du choix de la suite $\{b_n\}$, où $a < b_n < b$, $b_n \to b$, la suite des fonctions $\left\{ \int_a^{b_n} F(t,z)\,dt \right\}$ converge uniformément sur l'ensemble E. La convergence uniforme d'une intégrale, ayant une singularité au point $t = a$, est définie d'une manière absolument analogue.

6.14. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue et positive dans l'intervalle (a, b) et soit $\int_a^b \varphi(t)\, dt < \infty$. Montrer que, si la fonction $F(t, z)$ satisfait à la condition $|F(t, z)| \le \varphi(t)$ $(z \in E, a < t < b)$, l'intégrale $\int_a^b F(t, z)\, dt$ converge uniformément par rapport à z sur l'ensemble E.

6.15. Montrer que les intégrales ci-dessous convergent uniformément par rapport à z sur les ensembles E indiqués entre parenthèses:

1. $\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (E : |z| \le r < \infty)$.

2. $\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (E : \operatorname{Re} z \ge \delta > 0)$.

3. $\int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+t^2}\, dt \quad (E : \operatorname{Re} z \ge 0)$. 4. $\int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+e^{tz}}\, dt \quad (E : \operatorname{Re} z \ge \delta > 0)$.

5. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z}\, dt \quad (E : \{|\arg z| \le \pi - \delta,\ |z| > \varrho\},\ \delta > 0,\ \varrho > 0)$.

6. $\int_1^\infty \frac{\ln^2 t}{(t-z)^2}\, dt \quad (E : |\arg(1-z)| \le \alpha < \pi)$.

7. $\int_0^\infty \frac{t\, dt}{e^t - z} \quad (E : |\arg(1-z)| \le \alpha < \pi)$.

8. $\int_0^\infty t^{z-1} \sin t^2\, dt \quad (E : \delta \le \operatorname{Re} z \le 2 - \delta,\ \delta > 0)$.

9. $\int_0^\infty \exp(it^2 z^2)\, dt \quad \left(E : 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2},\ |z| \ge \varrho > 0\right)$.

10. $\int_0^\infty \frac{t \sin t}{t^2 + z^2}\, dt \quad (E : \operatorname{Re} z \ge \delta > 0)$.

6.16. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue dans l'intervalle d'intégration satisfaisant à la condition $|\varphi(t)| \le 1$. Montrer que les intégrales ci-dessous convergent uniformément par rapport à z sur les ensembles E indiqués entre parenthèses:

1. $\int_0^\infty \varphi(t) e^{-tz}\, dt \quad (E : \operatorname{Re} z \ge \delta > 0)$.

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t+1} t^{z-1}\,dt \quad (E\ :\ \delta \leq \operatorname{Re} z \leq 1-\delta,\ \delta > 0).$

3. $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\frac{e^{-tz}}{1+e^{-tz}}\,dt \quad (E\ :\ \operatorname{Re} z \geq \delta > 0).$

4. $\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-t}\cos tz\,dt \quad (E\ :\ |\operatorname{Im} z| \leq 1-\delta,\ \delta > 0).$

5. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch} t} e^{-tz}\,dt \quad (E\ :\ |\operatorname{Re} z| \leq 1-\delta,\ \delta > 0).$

6.17. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t \geq 0$ satisfaisant à la condition $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\ln|\varphi(t)|}{t} < \sigma$. Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-tz}\,dt$ converge uniformément par rapport à z dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq \sigma$.

* * *

On appelle *rayon de convergence* d'une série entière $\sum\limits_0^\infty c_n(z-z_0)^n$ un nombre R, $0 \leq R \leq \infty$, tel que pour tout z, pour lequel $|z-z_0| < R$, cette série converge, tandis que pour tout z, pour lequel $|z-z_0| > R$, elle diverge.

Le disque $|z-z_0| < R$, où R est le rayon de convergence de la série entière, est appelé *disque de convergence*.

6.18. Montrer que pour le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_0^\infty c_n(z-z_0)^n$, la *formule de Cauchy-Hadamard* $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ est valable.

6.19. Montrer que, si la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$ existe, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_0^\infty c_n(z-z_0)^n$ est égal à R.

6.20. Trouver les rayons de convergence des séries entières suivantes:

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty n^k z^n$. 2. $\sum\limits_{n=0}^\infty [\ln(n+2)]^k z^n$.

3. $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{z^n}{(n!)^\alpha}$, $\alpha > 0$. 4. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n^n}{n!} z^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$. 6. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(kn)!\,z^n}{n!(n+1)!\ldots(n+k-1)!}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^\infty e^{-\sqrt{n}} z^n$. 8. $\sum\limits_{n=0}^\infty n!\,e^{-n^\alpha} z^n$, $\alpha > 1$.

6.21. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_0^\infty c_n z^n$. Trouver les rayons de convergence des séries entières suivantes:

1. $\sum_0^\infty c_n^m z^n \quad (m = 1, 2, \ldots)$.

2. $\sum_0^\infty c_n z^{mn} \quad (m = 1, 2, \ldots)$.

3. $\sum_0^\infty \frac{c_n}{1 + |c_n|} z^n$.

6.22. Notons les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_0^\infty a_n z^n, \quad \sum_0^\infty b_n z^n, \quad \sum_0^\infty (a_n + b_n) z^n, \quad \sum_0^\infty a_n b_n z^n$$

respectivement R_a, R_b, R_{a+b}, R_{ab}. Montrer que

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b), \qquad R_{ab} \geq R_a R_b.$$

6.23. Soit une série entière $\sum_0^\infty c_n z^n$ dont le rayon de convergence $R > 0$. Montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_0^n c_k z^k \right|^{1/n} \leq \begin{cases} 1 & (|z| < R), \\ \frac{|z|}{R} & (|z| \geq R). \end{cases}$$

6.24. Soit une série entière $\sum_0^\infty a_n z^n$ dont le rayon de convergence $R > 0$ et soit $|z_0| < R$. Notons $b_n(z_0) = \sum_{m=0}^\infty a_{n+m} \cdot \frac{(n+m)!}{n!\, m!} z_0^m$. Montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |b_n(z_0)|^{1/n} \leq R - |z_0|.$$

6.25. Soit $f(z)$ une fonction représentable dans le disque $|z| < R$ par la série entière convergente $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. Montrer que pour tout α, $|\alpha| < R$, la fonction $f(z)$ est représentable dans le disque $|z - \alpha| < R - |\alpha|$ par la série entière $f(z) = \sum_0^\infty b_n (z - \alpha)^n$, où

$$b_n = \sum_{m=0}^\infty a_{n+m} \cdot \frac{(n+m)!}{n!\, m!} \alpha^m.$$

6.26. Soit $f(z)$ une fonction représentable par une série entière qui converge dans un certain voisinage du point $z = z_0$. Montrer que, si les coefficients de cette série ne sont pas tous nuls, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, pour $0 < |z - z_0| < \delta$, la fonction $f(z)$ ne s'annule pas.

6.27. Soit $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ et soit $R > 0$ le rayon de convergence de cette série entière. Montrer que, dans chaque disque $|z| \leq r$, où $r < R$, la fonction $f(z)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points si seulement $f(z) \not\equiv 0$.

Dans certains cas, il est nécessaire d'étudier la convergence de la série entière sur la circonférence du disque de convergence.

6.28. Montrer que, si l'inégalité

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \geq R\left(1+\frac{\alpha}{n}\right), \quad n > n_0,$$

où $\alpha > 1$, a lieu, la série entière $\sum_0^\infty c_n z^n$ converge en tous les points de la circonférence de son disque de convergence.

6.29. Soient c_n des nombres positifs tels que

$$c_0 > c_1 > c_2 > \ldots, \quad c_n \to 0.$$

Montrer que la série entière $\sum_0^\infty c_n z^n$ converge en tous les points de la circonférence $|z| = 1$, sauf, peut-être, au point $z = 1$.

6.30. Dire en quels points de la circonférence du disque de convergence les séries ci-dessous convergent:

1. $z+\frac{2}{1\cdot 3}z^2+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}z^3+\ldots$

2. $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$. 3. $\sum_2^\infty \frac{z^n}{n \ln^2 n}$.

4. $\sum_1^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$. 5. $\sum_1^\infty \frac{(3n)!}{(2n)!\, n!}(-1)^n z^{2n}$.

6. $\sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n \ln n} z^{3n}$. 7. $\sum_n^\infty \frac{e^{\pi i n^2/2}}{n} z^n$.

8. $\sum_1^\infty \frac{e^{\pi i n^2/2}}{\sqrt{n}} z^n$.

6.31. Démontrer le *deuxième théorème d'Abel :* Si la série entière $\sum_0^\infty c_n z^n$ converge au point z_0, elle converge uniformément sur tout le segment de droite joignant le point $z=0$ au point z_0.

6.32. En s'appuyant sur le deuxième théorème d'Abel, montrer que la convergence des séries $\sum_0^\infty u_n$ et $\sum_0^\infty v_n$ entraîne la convergence de la série $\sum_0^\infty w_n$, où $w_n = \sum_0^n u_k v_{n-k}$.



6.33. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t \geq 0$. Montrer l'existence d'un nombre σ tel que, pour tous les z satisfaisant à l'inégalité $\operatorname{Re} z > \sigma$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(t) e^{-tz}\, dt \qquad (1)$$

converge, tandis que pour tous les z satisfaisant à l'inégalité $\operatorname{Re} z < \sigma$ cette intégrale diverge (le nombre σ peut être égal à $\pm\infty$). Un tel nombre est appelé *abscisse de convergence de l'intégrale* (1).

6.34. Trouver les abscisses de convergence des intégrales suivantes:

1. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+t^2}\,dt.$ 2. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{\operatorname{ch} t}\,dt.$ 3. $\int\limits_0^\infty (\operatorname{ch} t)^\alpha e^{-tz}\,dt, \quad \alpha > 0.$

4. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{2+e^{i\alpha t}}\,dt, \ \alpha > 0.$ 5. $\int\limits_0^\infty e^{it^2-tz}\,dt.$ 6. $\int\limits_0^\infty e^{ie^{2t}-tz}\,dt.$

6.35. Notons les abscisses de convergence des intégrales

$$\int\limits_0^\infty a(t)e^{-tz}\,dt, \quad \int\limits_0^\infty b(t)e^{-tz}\,dt, \quad \int\limits_0^\infty (a(t)+b(t))e^{-tz}\,dt, \quad \int\limits_0^\infty a(t)b(t)e^{-tz}\,dt$$

respectivement σ_a, σ_b, σ_{a+b}, σ_{ab}. Montrer que

$$\sigma_{a+b} \geq \min(\sigma_a,\ \sigma_b), \quad \sigma_{ab} \geq \sigma_a + \sigma_b.$$

6.36. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t \geq 0$ et supposons que l'intégrale $\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-tz}\,dt$ converge pour $z = z_0$. Montrer que cette intégrale converge uniformément sur toute la demi-droite $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0$, $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$.

RÉPONSES

6.20.

1. 1. 2. 1. 3. ∞. 4. $1/e$. 5. $1/4$. 6. k^{-k}. 7. 1. 8. ∞.

6.21.

1. R^m. 2. $\sqrt[m]{R}$. 3. $\max(R, 1)$.

6.30.

1. Pour $z \neq 1$. 2. En tous les points. 3. En tous les points. 4. Pour $z \neq 1/4$. 5. Pour $z \neq \pm 4i/27$. 6. Pour $z \neq -1$, $z \neq \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7. Pour $z \neq 1$, $z \neq \pm i$. 8. Pour $z \neq 1$, $z \neq \pm i$.

6.34.

1. 0. 2. -1. 3. α. 4. 0. 5. 0. 6. -2.

§ 7. Homotopies des courbes planes

Soient E un ensemble fermé quelconque du plan complexe élargi, E_0 un sous-ensemble quelconque de cet ensemble, φ_0 une fonction définie et continue sur ce sous-ensemble, et D un domaine quelconque du plan complexe.

Par le symbole $\mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$ nous allons désigner l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)$ définies et continues sur l'ensemble E et possédant les propriétés suivantes:

a) Les valeurs prises par chaque fonction $f(t) \in \mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$ aux points de l'ensemble E sont contenues dans le domaine D.

b) Aux points de l'ensemble E_0, l'égalité $f(t) = \varphi_0(t)$ a lieu pour toutes les fonctions $f(t) \in \mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$.

Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ appartenant à la même classe $\mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$ sont dites *homotopes* dans cette classe s'il existe une famille de fonctions $\Phi_s(t) \in \mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$ continûment dépendantes du paramètre s, qui varient sur le segment $0 \leq s \leq 1$, et telles que $\Phi_0(t) = f(t)$, $\Phi_1(t) = g(t)$.

La famille de fonctions $\Phi_s(t)$, $0 \leq s \leq 1$, est appelée *homotopies de la fonction $f(t)$ à la fonction $g(t)$*.

L'écriture $f(t) \approx g(t)(\mathcal{A})$ signifie que la fonction $f(t)$ est homotope à la fonction $g(t)$ dans la classe $\mathcal{A}$.

7.01. Montrer que la notion d'homotopie des fonctions possède les propriétés suivantes:

1. $f(t) \approx f(t)$.
2. Si $f(t) \approx g(t)$, on a aussi $g(t) \approx f(t)$.
3. Si $f(t) \approx g(t)$ et $g(t) \approx h(t)$, on a aussi $f(t) \approx h(t)$.

7.02. Montrer que pour chaque fonction $f(t) \in \mathcal{A}$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que toute fonction $g(t) \in \mathcal{A}$ satisfaisant à la condition $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$, pour tous les $t \in E$, soit homotope à la fonction $f(t)$.

Indication. Examiner les homotopies $\Phi_s(t) = (1-s)f(t) + sg(t)$.

7.03. Soit $F[f]$ une grandeur définie (elle peut être un nombre, un vecteur, une fonction, etc.) pour chaque fonction $f(t) \in \mathcal{A}$. Supposons que pour chaque fonction $f(t) \in \mathcal{A}$ il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour toutes les fonctions $g(t) \in \mathcal{A}$ satisfaisant à la condition $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ $(t \in E)$ l'égalité $F[g] = F[f]$ ait lieu. Montrer qu'alors la relation $f(t) \approx g(t)(\mathcal{A})$ entraîne $F[f] = F[g]$.

7.04. Soit $f(t) \approx g(t)(\mathcal{A})$ et supposons que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ admettent des dérivées partielles continues sur l'ensemble E. Montrer qu'il existe des homotopies $\Phi_s(t)$ de la fonction $f(t)$ à la fonction $g(t)$ qui admettent elles aussi des dérivées partielles continues sur l'ensemble E.

7.05. Soit D un domaine convexe. Montrer que deux fonctions quelconques de la classe $\mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$ sont homotopes.

* * *

Au moyen de la notion d'homotopies des fonctions, on peut définir les homotopies de certains autres objets mathématiques (courbes, domaines, etc.). Dans la théorie des fonctions analytiques on n'utilise pratiquement que les homotopies des courbes.

Deux courbes C' et C'' contenues dans un domaine D sont appelées *homotopes* dans ce domaine, si ces courbes admettent comme équations paramétriques

$$C' : \quad z = z_1(t), \quad a \leq t \leq b \ ; \quad C'' : \quad z = z_2(t), \quad a \leq t \leq b,$$

avec les fonctions $z_1(t)$ et $z_2(t)$ homotopes dans la classe $\mathcal{A}(E, E_0, \varphi_0, D)$, où l'ensemble E est le segment $[a, b]$, l'ensemble E_0 est constitué par les extrémités de ce segment, φ_0 étant une fonction arbitraire définie aux extrémités du segment $[a, b]$.

L'homotopie des courbes C' et C'' dans le domaine D est facile à décrire en utilisant des termes géométriques:

La courbe C'' est dite homotope à la courbe C' dans le domaine D s'il est possible de la déformer continûment en la courbe C' sans dépasser les limites du domaine D et en gardant ses extrémités fixes.

L'homotopie de la courbe C'' à la courbe C' dans le domaine D sera notée de la façon suivante : $C'' \approx C'(D)$.

7.06. Montrer que la notion d'homotopie des courbes jouit des propriétés suivantes:

1. $C \approx C$. 2. Si $C'' \approx C'$, on a également $C' \approx C''$.
3. Si $C'' \approx C'$ et si $C''' \approx C''$, on a également $C''' \approx C'$.

Admettons que l'extrémité de la courbe C_1 coïncide avec l'origine de la courbe C_2. Dans ce cas, on appellera *produit* C_1C_2 de la courbe C_1 par la courbe C_2 la courbe obtenue en parcourant consécutivement d'abord la courbe C_1, ensuite la courbe C_2 (pour plus de détails, voir les explications précédant le problème repéré 3.34). Le symbole C^{-1} signifie que la courbe C est parcourue en sens inverse.

7.07. Montrer que:

1. Si $C = C_1C_2$ et si $C_1 \approx C_1'$ et $C_2 \approx C_2'$, on a également $C \approx C_1'C_2'$.
2. Si $C' \approx C$, on a également $(C')^{-1} \approx C^{-1}$.
3. Si $C = C_1C_2$ et si $C_1 \approx C_1'$ et $C_2 \approx C_2'$, on a également $C^{-1} \approx (C_2')^{-1}(C_1')^{-1}$.
4. Si l'extrémité de la courbe C coïncide avec l'origine de la courbe C_1 et si $C_1' \approx C_1$, on a également $C \approx CC_1(C_1')^{-1}$.

7.08. Montrer que, si un domaine D est convexe, toute courbe qu'il contient est homotope dans ce domaine à un segment de droite allant de l'origine de la courbe à son extrémité.

7.09. Montrer que chaque courbe est homotope à une certaine ligne brisée comportant un nombre fini de segments.

L'homotopie des courbes fermées sera conçue comme l'homotopie des courbes non fermées dont l'origine et l'extrémité coïncident. Cela signifie que sur la courbe fermée il faut désigner un point d'origine qui doit rester fixe lors de la déformation.

7.10. Montrer que chaque courbe fermée C est homotope à une ligne polygonale du type $C_1C_2 \ldots C_n$, où C_k sont des lignes polygonales fermées simples.

7.11. Montrer que chaque courbe fermée C d'origine z_0 est homotope à une ligne polygonale du type $C_1C_2 \ldots C_n$, où C_k sont des lignes polygonales fermées simples d'origine z_0.

Une courbe fermée d'origine z_0 est dite *homotope à zéro* dans un domaine D si elle est contenue dans le domaine D et si l'on peut la contracter au point z_0 sans dépasser les limites du domaine D ni déplacer son point d'origine z_0.

7.12. Soit C une ligne polygonale fermée simple qui borne le domaine simplement connexe D_1 contenu dans un domaine D. Montrer que la ligne polygonale C est homotope à zéro dans le domaine D.

Indication. Montrer d'abord que sur la ligne polygonale C on peut toujours trouver trois sommets consécutifs tels que le triangle qu'ils déterminent soit contenu dans le domaine D_1. Cela permettra de remplacer la ligne polygonale C par une ligne polygonale homotope présentant un sommet de moins.

7.13. Montrer que dans un domaine simplement connexe toute ligne polygonale fermée est homotope à zéro.

Indication. Voir les problèmes 7.11 et 7.12.

* * *

Soient deux courbes C' et C'' homotopes dans un domaine D. Les courbes C_s, $0 \leq s \leq 1$, qui dépendent continûment du paramètre s, sont appelées *homotopies de la courbe C' à la courbe C''* dans le domaine D si :

a) toutes les courbes C_s sont contenues dans le domaine D, $C_0 = C'$ et $C_1 = C''$;

b) toutes les courbes C_s ont leur origine en un même point et finissent en un même point.

7.14. Soient deux courbes C' et C'' homotopes dans un domaine D. Montrer que:

1. Si les courbes C' est C'' sont des courbes lisses par morceaux, les homotopies C_s, $0 \leq s \leq 1$, peuvent être choisies de telle façon que toutes les courbes C_s soient lisses par morceaux.

2. Si les courbes C' et C'' sont des courbes lisses, toutes les homotopies C_s, $0 \leq s \leq 1$, peuvent être choisies en tant que courbes lisses.

3. Si C' et C'' sont des lignes polygonales, les homotopies C_s, $0 \leq s \leq 1$, peuvent être choisies en tant que lignes polygonales comportant un nombre de segments uniformément limité.

4. Si C' et C'' sont des courbes rectifiables respectivement de longueur l' et l'', les homotopies C_s, $0 \leq s \leq 1$, peuvent être choisies en tant que courbes rectifiables telles que la longueur de chaque courbe C_s ne dépasse pas la grandeur $\max (l', l'')$.

7.15. Soient C' et C'' deux courbes homotopes dans un domaine arbitraire D. Montrer que ces courbes sont aussi homotopes dans un certain domaine plus restreint $D_1 \subset D$ borné par un nombre fini de lignes polygonales fermées simples.

Indication. Soient C_s, $0 \leq s \leq 1$, les homotopies de la courbe C' à la courbe C''. L'ensemble des points du domaine D situés au moins sur l'une des courbes C_s est un ensemble fermé.

On appelle composante de la frontière du domaine D l'ensemble fermé maximal contenu par la frontière du domaine D et qui ne peut pas être décomposé en deux ensembles fermés ne possédant pas de points communs. Le nombre de composantes de la frontière du domaine D du plan complexe élargi constitue une caractéristique topologique importante du domaine. Si la frontière du domaine D du plan complexe élargi est constituée par m composantes, le domaine D est un domaine *m-connexe*.

7.16. Soit D un domaine m-connexe arbitraire privé du point $z=\infty$ et soient C' et C'' deux courbes contenues dans ce domaine. Prenons un point sur chacune des composantes de la frontière du domaine D (admettons que le point $z=\infty$ se trouve parmi ces points) et notons D^* tout le plan complexe élargi privé des points considérés. Montrer que les courbes C' et C'' sont homotopes dans le domaine D si, et seulement si, elles sont homotopes dans le domaine D^*.

Indication. Voir les problèmes 7.13 et 7.15.

* * *

Soit C une courbe qui se présente sous la forme $C=C_1C_1'C_2C_2'\ldots C_nC_n'$, où C_k' sont des tronçons de cette courbe contenus dans un domaine D, tandis que C_k sont des tronçons situés en dehors de ce domaine. Nous allons appeler *déformation de la courbe C dans le domaine D* le remplacement de la courbe C par la courbe $C=C_1C_1''C_2C_2''\ldots C_nC_n''$, où C_k'' est une courbe arbitraire contenue dans le domaine D et dont l'origine et l'extrémité coïncident respectivement avec l'origine et l'extrémité de la courbe C_k'.

7.17. Soit $F[C]$ une grandeur définie pour chaque courbe C contenue dans un domaine D. Montrer que, si lors de la déformation de chaque courbe C la grandeur $F[C]$ ne varie pas dans un voisinage assez petit de chacun de ses points, la relation $C'\approx C''(D)$ entraîne l'égalité $F[C']=F[C'']$.

Soit C une courbe qui ne passe pas par le point z_0. La grandeur $\nu(z_0, C)$, qui est l'indice du point z_0 par rapport à la courbe C, est définie comme la variation de la grandeur $\frac{1}{2\pi}\arg(z-z_0)$ lorsque le point z parcourt la courbe C [dans ce cas, la grandeur $\arg(z-z_0)$ doit varier continûment].

7.18. Soient C' et C'' deux courbes contenues dans un domaine D et soit z_0 un point situé en dehors de ce domaine. Montrer que, si les courbes C' et C'' sont homotopes dans le domaine D, $\nu(z_0, C')=\nu(z_0, C'')$.

7.19. Montrer que la circonférence $|z|=1$ parcourue une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ($z=1$ étant le point de départ) n'est pas homotope à zéro dans le domaine $0<|z|<\infty$.

Indication. Voir le problème 7.18.

7.20. Soit C une ligne brisée fermée simple d'origine $z=1$, qui ne passe pas par le point $z=0$, et soit D le domaine borné par cette ligne polygonale (la ligne polygonale C est parcourue de façon que le domaine reste à sa gauche). Notons Γ la circonférence $|z|=1$ d'origine $z=1$ parcourue une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Montrer que:

1. Si $0\in D$, alors $C\approx\Gamma$ dans le domaine $0<|z|<\infty$.
2. Si $\infty\in D$, alors $C\approx\Gamma^{-1}$ dans le domaine $0<|z|<\infty$.
3. Si le domaine D ne contient ni le point $z=0$, ni le point $z=\infty$, la ligne polygonale C est homotope à zéro dans le domaine $0<|z|<\infty$.

7.21. Montrer qu'une ligne fermée arbitraire C est homotope à zéro dans le domaine $0<|z|<1$ si, et seulement si, $\nu(0, C)=0$.

Indication. Voir le problème 7.11.

7.22. Soit D un domaine doublement connexe et soit z_0 un point quelconque situé en dehors de ce domaine. Montrer que les courbes C' et C'' contenues dans le domaine D sont homotopes dans ce domaine si, et seulement si:

a) les courbes C' et C'' ont les mêmes origine et extrémité;

b) $\nu(z_0, C') = \nu(z_0, C'')$.

7.23. Soit C une ligne polygonale fermée simple qui ne passe pas par le point $z=0$. Notons n^+ le nombre d'intersections de la ligne polygonale C avec le demi-axe réel positif de bas en haut et notons n^- le nombre de ces mêmes intersections, mais de haut en bas. Montrer que

$$n^+ - n^- = \nu(0, C).$$

7.24. Soient D_1 et D_2 deux domaines, dont l'intersection est un domaine non vide simplement connexe D_0, et soit D la réunion de ces domaines. Montrer qu'une ligne polygonale fermée arbitraire C d'origine $z_0 \in D_0$ contenue dans le domaine D est homotope à une certaine ligne polygonale C^* de la forme $C^* = C_1'C_1''C_2'C_2'' \dots C_n'C_n''$, où C_k' sont des lignes polygonales fermées d'origine z_0 contenues dans le domaine D_1, tandis que C_k'' sont des lignes polygonales fermées d'origine z_0 contenues dans le domaine D_2.

Indication. Séparer en deux parties le domaine D_0 par une ligne polygonale Γ joignant le point z_0 aux deux points frontières communs des domaines D_1 et D_2. La ligne polygonale Γ convenablement choisie va couper chaque ligne polygonale C en parties dont chacune est contenue seulement dans l'un des domaines D_1 ou D_2.

7.25. Conservons les notations du problème 7.24 conformément auxquelles

$$C \approx C_1'C_1''C_2'C_2'' \dots C_n'C_n''.$$

Montrer que la courbe C est homotope à zéro dans le domaine D si, et seulement si, toutes les courbes C_k' sont homotopes à zéro dans le domaine D_1, tandis que toutes les courbes C_k'' sont homotopes à zéro dans le domaine D_2.

Indication. Voir le problème 7.17.

7.26. Désignons par le symbole D^* le plan complexe élargi privé des points $z=1$, $z=-1$ et $z=\infty$, par le symbole C_1 la circonférence $|z-1|=1$, parcourue une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et par le symbole C_2 la circonférence $|z+1|=1$ parcourue une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le point $z=0$ est pris comme point de départ pour les deux circonférences). Montrer que la courbe $C = C_1C_2C_1^{-1}C_2^{-1}$ n'est pas homotope à zéro dans le domaine D^*, bien que la grandeur $\nu(z_0, C)$ soit nulle pour tout point $z_0 \neq \infty$ situé en dehors du domaine D^*. (Cela signifie, en particulier, que la condition d'homotopie de deux courbes proposée au problème 7.18 n'est que nécessaire sans être pour autant suffisante si le nombre de connexions du domaine est supérieur à 2.)

7.27. Soit γ une composante quelconque de la frontière d'un domaine D. Montrer que toutes les courbes fermées simples de même origine bornant un certain domaine, qui contient la composante γ sans contenir de points

des autres composantes de la frontière du domaine D, sont homotopes entre elles dans le domaine D (en parcourant la courbe, le domaine qu'elle borne doit rester à gauche).

* * *

Un ensemble $\mathcal{G}$ est appelé *groupe* si:

a) Pour tout couple d'éléments $a \in \mathcal{G}$ et $b \in \mathcal{G}$, leur produit ab est défini et constitue aussi un élément de l'ensemble $\mathcal{G}$.

b) La multiplication est associative, c'est-à-dire que pour trois éléments quelconques a, b, c de l'ensemble $\mathcal{G}$ l'égalité $(ab)c = a(bc)$ est valable.

c) Dans l'ensemble $\mathcal{G}$ il y a un élément e (l'unité du groupe) tel que pour tout élément $a \in \mathcal{G}$ les égalités $ae = a$ et $ea = a$ aient lieu.

d) Pour chaque élément a de l'ensemble $\mathcal{G}$, on trouve dans ce même ensemble un élément a^{-1} (l'inverse de a) tel que les égalités $aa^{-1} = e$ et $a^{-1}a = e$ aient lieu.

7.28. Montrer que l'ensemble de tous les nombres complexes différents de zéro forme un groupe si comme multiplication on admet la multiplication ordinaire des nombres complexes.

7.29. Montrer que l'ensemble de tous les nombres entiers forme un groupe si comme opération de multiplication dans ce groupe on considère l'addition des nombres.

7.30. Montrer que l'ensemble de toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont des entiers satisfaisant à la condition $ad - bc = 1$, forme un groupe si la multiplication de deux matrices est définie par l'égalité

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

7.31. Montrer que l'ensemble de toutes les fonctions homographiques de la forme $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d sont des nombres complexes arbitraires satisfaisant à la condition $ad - bc \neq 0$, forme un groupe si par la multiplication de $T_1(z)$ par $T_2(z)$ dans ce groupe on entend le passage à la fonction $T_2(T_1(z))$.

Soient donnés $2m$ symboles $a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \ldots, a_m, a_m^{-1}$ que nous allons appeler « lettres ». Appelons « mot » un nombre fini arbitraire de « lettres » écrites l'une après l'autre. Deux de ces « mots » sont considérés égaux s'ils coïncident à la suite du biffage de toutes les combinaisons $a_k a_k^{-1}$, se trouvant côte à côte, qu'ils contiennent. Nous allons appeler multiplication de deux « mots » le « mot » obtenu en écrivant le deuxième facteur à la suite du premier.

7.32. Montrer que l'ensemble de tous les « mots » possibles (y compris le « mot » vide), composés à partir de $2m$ « lettres » données, forme un groupe par rapport à l'opération de multiplication des « mots » décrite ci-dessus.

Deux groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1$ sont appelés *isomorphes* si entre leurs éléments on peut établir une correspondance biunivoque telle qu'au produit de tout couple d'éléments d'un groupe corresponde le produit des images de ces éléments dans l'autre groupe.

7.33. Montrer que le groupe des « mots » formés de deux « lettres » a et a^{-1} est isomorphe au groupe des nombres entiers par rapport à l'addition.

Soit C une courbe contenue dans un domaine D. L'ensemble de toutes les courbes homotopes à la courbe C dans le domaine D est appelé *classe d'homotopie de la courbe C* et est noté $[C]$. Pour les classes d'homotopie (pas pour tout couple, il est vrai), la multiplication peut être définie en posant $[C_1][C_2]=[C_1C_2]$. On vérifie aisément que la possibilité de multiplier les classes d'homotopie données et le résultat de cette multiplication ne dépendent pas du choix du représentant dans chacune des classes d'homotopie multipliées.

7.34. Montrer que l'ensemble de toutes les classes d'homotopie des courbes fermées, contenues dans un domaine D et d'origine $z_0 \in D$, forme un groupe par rapport à l'opération de multiplication des classes d'homotopie définie plus haut.

Le groupe de toutes les classes d'homotopie des courbes fermées contenues dans le domaine D et d'origine $z_0 \in D$ est appelé *groupe fondamental du domaine D par rapport au point* z_0 et se note $\pi_1(z_0, D)$.

7.35. Montrer que les groupes fondamentaux d'un même domaine par rapport à différents points de ce domaine sont isomorphes.

7.36. Montrer que le groupe fondamental d'un domaine doublement connexe est isomorphe au groupe des nombres entiers par rapport à l'addition.

Indication. Voir le problème 7.22.

7.37. Soient D_1 et D_2 deux domaines arbitraires, dont l'intersection est un domaine non vide simplement connexe D_0, et soit D la réunion de ces domaines. Montrer que le groupe fondamental du domaine D_0 est isomorphe au groupe de « mots » de la forme $a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n$, où a_k sont des éléments du groupe fondamental du domaine D_1, tandis que b_k sont des éléments du groupe fondamental du domaine D_2. Avec cela, les « mots » sont considérés égaux s'ils coïncident à la suite de toutes les simplifications possibles (biffage des éléments unités qui se rencontrent parmi a_k et b_k et réunion en un seul élément des produits d'éléments appartenant à un même groupe).

Indication. Voir les problèmes 7.24 et 7.25.

7.38. Montrer que le groupe fondamental d'un domaine m-connexe est isomorphe au groupe de « mots » composés à partir de $2m - 2$ « lettres ».

Indication. Opérer par récurrence sur m en considérant le domaine m-connexe comme la réunion d'un domaine $(m-1)$-connexe et d'un domaine doublement connexe. Utiliser les résultats des problèmes 7.36 et 7.37.

Les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_m$ d'un groupe $\mathcal{G}$ sont appelés *éléments générateurs* si chaque élément de ce groupe peut être présenté sous la forme d'un

« mot » composé de « lettres » $a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_m, a_m^{-1}$ (cette fois-ci, le « mot » signifie le produit des « lettres » qui le composent). Si, dans ce cas, les « mots » distincts (c'est-à-dire qui ne sont pas égaux dans le sens défini immédiatement avant le problème 7.32) sont des éléments distincts du groupe $\mathcal{G}_f$, le groupe $\mathcal{G}_f$ est appelé *groupe libre à éléments générateurs* $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

7.39. Montrer que le groupe fondamental d'un domaine m-connexe D par rapport à un point $z_0 \in D$ est un groupe libre à éléments générateurs $[\Gamma_1], \ldots, [\Gamma_{m-1}]$, où $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1}$ sont des lignes polygonales fermées simples d'origine z_0 telles que le domaine D_k borné par la ligne polygonale Γ_k contient dans son intérieur l'une des composantes intérieures de la frontière du domaine D, sans contenir de points appartenant aux autres composantes de la frontière de ce domaine. (Il est bien naturel que différentes lignes polygonales Γ_k correspondent à différentes composantes de la frontière du domaine D.)

7.40. Admettons les notations du problème 7.39. Soit donnée une fonction $F[C]$ définie dans toutes les classes d'homotopie, formant le groupe fondamental $\pi_1(z_0, D)$ telle que

$$F[C_1C_2] = F[C_1] + F[C_2]$$

pour tout couple de classes d'homotopie $[C_1]$ et $[C_2]$ du groupe fondamental $\pi_1(z_0, D)$. Montrer que pour toute courbe fermée C d'origine z_0 contenue dans le domaine D, l'égalité $F[C] = \sum_{k=1}^{m-1} \nu(z_k, C)F[\Gamma_k]$ est valable (ici z_k est un point arbitraire situé sur la composante de la frontière du domaine D contenue dans l'intérieur de la ligne polygonale Γ_k).

CHAPITRE II

FONCTIONS RÉGULIÈRES

§ 8. Conditions de Cauchy-Riemann. Fonctions harmoniques

Une fonction $f(z)$ définie dans un certain voisinage d'un point z_0 est appelée *différentiable en ce point* si la limite finie

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0),$$

appelée *dérivée de la fonction* $f(z)$, existe.

Une fonction $f(z)$ est appelée *différentiable dans un domaine D* si elle est définie dans ce domaine y étant différentiable en chacun de ses points.

8.01. Trouver tous les points où les fonctions ci-dessous sont différentiables:

1. $\operatorname{Re} z$. 2. $x^2y^2 (z=x+iy)$. 3. $|z|^2$. 4. $x^2+iy^2 (z=x+iy)$.
5. $z \operatorname{Re} z$. 6. $2xy-i(x^2-y^2)\ (z=x+iy)$.

8.02. Montrer que:

1. Si deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont différentiables en un point z_0, les fonctions $F_1(z)=f(z)+g(z)$ et $F_2(z)=f(z)g(z)$ sont différentiables elles aussi en ce point, et

$$F_1'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0), \qquad F_2'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

2. Si deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont différentiables en un point z_0 et si $g(z_0)\neq 0$, la fonction $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ est également différentiable au point z_0 et

$$F'(z_0)=\frac{g(z_0)f'(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

3. Si une fonction $f(z)$ est différentiable en un point z_0, tandis qu'une fonction $g(\zeta)$ est différentiable en un point $\zeta_0=f(z_0)$, la fonction $F(z)=g(f(z))$ est aussi différentiable au point z_0 et $F'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0)$.

8.03. Montrer que, pour tout n entier, la fonction z^n est différentiable dans tout le plan, où bien dans tout le plan privé du point $z=0$ (pour $n<0$), et que $(z^n)'=nz^{n-1}$.

8.04. Montrer qu'un polynôme en z est une fonction différentiable dans tout le plan, tandis qu'une fonction rationnelle est différentiable dans tout le plan à l'exception des points où le dénominateur s'annule.

8.05. Soit $f(z)$ une fonction définie dans le disque $|z-a|<R$ par l'égalité

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|c_n|^{1/n}\leq\frac{1}{R}.$$

Montrer que la fonction $f(z)$ est différentiable dans le disque $|z-a|<R$ et que

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

8.06. Définissons la fonction e^z, pour toute valeur complexe de z, par l'égalité $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{n!}$. Montrer que, pour toute valeur complexe de la constante a, l'égalité $(e^{az})'=ae^{az}$ reste valable.

8.07. Définissons les fonctions $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ par les égalités suivantes:

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),\qquad \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}),$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\quad \cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}).$$

Montrer que:

1. $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$. 2. $(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$.
3. $(\sin z)'=\cos z$. 4. $(\cos z)'=-\sin z$.

8.08. Trouver où les fonctions ci-dessous sont différentiables et écrire les formules pour leurs dérivées:

1. $e^{\operatorname{ch} z}$. 2. $\sin(2e^z)$.
3. $\sin z \operatorname{ch} z - i\cos z \operatorname{sh} z$.
4. ze^{-z}. 5. $\frac{e^z}{z}$. 6. $\frac{z\cos z}{1+z^2}$.

8.09. Dire où les fonctions ci-dessous sont différentiables et trouver leurs dérivées:

1. $\operatorname{tg} z$. 2. $\operatorname{ctg} z$. 3. $\frac{e^z+1}{e^z-1}$. 4. $\frac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$.
5. $(e^z-e^{-z})^{-2}$. 6. $\frac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions réelles définies dans un certain voisinage d'un point (x_0, y_0) et différentiables en ce point. Si

$$u'_x(x_0, y_0)=v'_y(x_0, y_0),\qquad u'_y(x_0, y_0)=-v'_x(x_0, y_0),$$

on dit que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ satisfont *aux conditions de Cauchy-Riemann au point* (x_0, y_0).

8.10. Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions satisfaisant aux conditions de Cauchy-Riemann en un point (x_0, y_0). Notons $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{n}$ deux vecteurs orthogonaux, et désignons par $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial n}$ les différentiations suivant les directions de ces vecteurs (au point (x_0, y_0)). Montrer que, si le couple de vecteurs $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$ est orienté positivement (le produit vectoriel $[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}]$ est positif), alors

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

8.11. Montrer qu'en coordonnées polaires r, φ les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Pour la résolution des problèmes ci-après, l'utilisation du théorème qui suit est essentielle:

Pour qu'une fonction $f(z)$ soit différentiable en un point $z_0=x_0+iy_0$, il faut et il suffit que les fonctions $u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$ soient différentiables au point (x_0, y_0) et satisfassent aux conditions de Cauchy-Riemann en ce point.

8.12. Soit $f(z)$ une fonction différentiable en un point $z_0=x_0+iy_0$. Posons

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy), \qquad v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy).$$

Démontrer que les formules suivantes sont vraies :

1. $f'(z_0)=u'_x(x_0, y_0)+iv'_x(x_0, y_0)$.
2. $f'(z_0)=v'_y(x_0, y_0)-iu'_y(x_0, y_0)$.
3. $f'(z_0)=u'_x(x_0, y_0)-iu'_y(x_0, y_0)$.
4. $f'(z_0)=v'_y(x_0, y_0)+iv'_x(x_0, y_0)$.
5. $|f'(z_0)|^2=u'^2_x+u'^2_y=u'^2_x+v'^2_x=u'^2_y+v'^2_y=v'^2_x+v'^2_y$.

8.13. Soit $f(z)$ une fonction différentiable dans un domaine D en tous les points duquel sa dérivée s'annule. Montrer que $f(z)\equiv\text{const}$.

8.14. Soit $f(z)$ une fonction différentiable dans un domaine D. Montrer que si l'une des fonctions

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(x+iy),\quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(x+iy),$$
$$\varrho(x, y)=|f(x+iy)|,\quad \varphi(x, y)=\arg f(x+iy)$$

reste constante dans le domaine D, alors $f(z)\equiv\text{const}$.

8.15. Soit $f(z)$ une fonction différentiable dans un domaine D et soit

$$A \operatorname{Re} f(z)+B \operatorname{Im} f(z)+C\equiv 0,$$

où A, B et C sont des constantes réelles parmi lesquelles l'une au moins est différente de zéro. Montrer que $f(z)\equiv\text{const}$.

8.16. Soit $f(z)$ une fonction différentiable dans un domaine D et soit

$$\operatorname{Re} f(z)=F(\operatorname{Im} f(z)),$$

où $F(t)$ est une fonction strictement monotone et continûment différentiable sur tout l'axe réel. Montrer que $f(z)\equiv\text{const}$.

Indication. Utiliser la formule 5 du problème 8.12.

Une fonction $f(z)$ est appelée *régulière en un point* z_0 si dans un certain voisinage de ce point elle est représentable par la série entière convergente $f(z)=\sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$ (si $z_0=\infty$, la différence $z-z_0$ est à remplacer par $1/z$).

Une fonction $f(z)$ définie dans un domaine D est appelée *régulière dans ce domaine* si elle est régulière en chaque point de ce domaine.

Un critère de régularité important est à retenir:
Si une fonction est différentiable dans un domaine D, elle est régulière dans ce domaine.

8.17. En s'appuyant exclusivement sur la définition d'une fonction régulière, démontrer les assertions suivantes:

1. La somme et le produit des fonctions régulières en un point z_0 sont réguliers au point z_0.
2. Le quotient de deux fonctions régulières en un point z_0 est également régulier au point z_0 si en ce point le dénominateur est différent de zéro.
3. Si une fonction $f(z)$ est régulière en un point z_0 et si une fonction $g(z)$ est régulière en un point $\zeta_0 = f(z_0)$, alors la fonction $F(z) = g(f(z))$ est régulière au point z_0.
4. La somme d'une série entière est une fonction régulière dans le disque de convergence de cette série.
5. Une fonction régulière en un point z_0 est indéfiniment différentiable au point z_0.

8.18. Soit $f(z)$ une fonction régulière en un point $z_0 = x_0 + iy_0$. Montrer que les fonctions $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ et $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ sont indéfiniment différentiables au point (x_0, y_0) et qu'elles sont représentables par les séries

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m,$$

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m,$$

qui convergent pour $|x-x_0|$ et $|y-y_0|$ assez petits.

* * *

Une fonction réelle $u(x, y)$ définie dans un domaine D et admettant dans ce dernier des dérivées partielles continues du premier et du second ordre est appelée *harmonique dans le domaine D* si elle y vérifie l'*équation de Laplace*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(par le symbole Δ on désigne l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, nommé *opérateur de Laplace*).

Il est connu qu'une *fonction u(x, y) harmonique dans un domaine D est indéfiniment différentiable en chaque point de ce domaine* (par rapport aux variables réelles x et y).

8.19. Montrer qu'une combinaison linéaire à coefficients constants de n'importe quel nombre de fonctions harmoniques dans un domaine D est également une fonction harmonique dans ce domaine.

8.20. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans un domaine D. Montrer que la fonction ci-dessous est harmonique dans le domaine D:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} u(x, y) \qquad (m=0, 1, 2, \ldots ; n=0, 1, 2, \ldots).$$

8.21. Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions définies dans un domaine D y admettant des dérivées partielles continues du premier et du second ordre. Montrer que, si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables dans le domaine D et satisfont dans ce dernier aux conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, alors elles sont harmoniques dans le domaine D.

Un couple de fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$ harmoniques dans un domaine D et y satisfaisant aux conditions de Cauchy-Riemann est appelé *couple de fonctions harmoniques conjuguées* (l'ordre que les fonctions occupent dans le couple est essentiel).

8.22. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D. Montrer qu'un couple de fonctions u, v, où $u=\operatorname{Re} f(x+iy)$, $v=\operatorname{Im} f(x+iy)$, constitue un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans le domaine D.

8.23. Soit u, v, ou bien u_k, v_k $(k=1, 2)$ des couples de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine D. Montrer que les couples U, V cidessous forment également des couples de fonctions harmoniques conjuguées dans le domaine D:

1. $U=au-bv$, $\quad V=bu+av$ (a et b sont des constantes).
2. $U=au_1+bu_2$, $\quad V=av_1+bv_2$ (a et b sont des constantes).
3. $U=u_1u_2-v_1v_2$, $\quad V=u_1v_2+v_1u_2$.
4. $U=e^u \cos v$, $\quad V=e^u \sin v$.
5. $U=e^{u^2-v^2} \cos 2uv$, $\quad V=e^{u^2-v^2} \sin 2uv$.
6. $U=e^{uv} \cos \frac{u^2-v^2}{2}$, $\quad V=e^{uv} \sin \frac{v^2-u^2}{2}$.

8.24. Soit u, v un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine D, et soit φ, ψ un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine G. Montrer que, si les valeurs de $u(x, y)+iv(x, y)$ se situent dans le domaine G pour tous $x+iy \in D$, alors le couple U, V, où

$$U(x, y)=\varphi(u(x, y), \quad v(x, y)), \quad V(x, y)=\psi(u(x, y), \quad v(x, y))$$

représente un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans le domaine D.

8.25. Soit u, v un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine D. Montrer que le couple U, V, où

$$U(x, y)=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} u(x, y), \quad V(x, y)=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} v(x, y),$$

représente un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans le domaine D.

8.26. Soit u, v un couple de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine D en aucun point duquel les fonctions u et v ne s'annulent simultanément. Montrer que la fonction

$$U(x, y)=\ln [u^2(x, y)+v^2(x, y)]$$

est harmonique dans le domaine D.

8.27. Soient u, v_1 et u, v_2 deux couples de fonctions harmoniques conjuguées dans un domaine D, la première des fonctions composant les couples étant la même. Montrer que $v_1(x, y) - v_2(x, y) \equiv \text{const}$.

8.28. Soit D un domaine simplement connexe et soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans ce domaine. Montrer que l'intégrale

$$\int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

(la courbe Γ est rectifiable et est contenue dans le domaine D) ne dépend pas du chemin d'intégration, étant fonction seulement des points de départ et d'arrivée de ce chemin.

8.29. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans un domaine simplement connexe D. Montrer que:

1. La fonction définie par l'égalité ci-dessous est une fonction harmonique dans le domaine D:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

(le chemin d'intégration est contenu dans le domaine D).

2. Les fonctions u, v constituent un couple de fonctions harmoniques conjuguées, tandis que la fonction $f(z)$ définie par l'égalité $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ est une fonction régulière de $z = x + iy$ dans le domaine D.

8.30. Dans les problèmes qui suivent, l'une des fonctions (u ou v) constituant un couple de fonctions harmoniques conjuguées (dans tout le plan) est donnée. Trouver la seconde fonction du couple.

1. $u = xy$. 2. $u = x^2 - y^2 + xy$. 3. $v = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x$.

4. $u = r\varphi \cos \varphi + r \ln r \sin \varphi$ $(z = x + iy = re^{i\varphi})$.

8.31. Trouver toutes les fonctions harmoniques de la forme:

1. $u = \varphi(x^2 + y^2)$. 2. $u = \varphi(x^2 - y^2)$.

3. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 4. $u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

8.32. Trouver les fonctions harmoniques conservant une valeur constante sur chaque courbe des familles de courbes ci-dessous:

1. $x = C$. 2. $y = Cx$. 3. $x^2 + y^2 = C$. 4. $x^2 + y^2 = Cx$.

8.33. Soit $\mu(x, y)$ une fonction continue, de même que ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclusivement, dans un domaine D. Montrer que la condition

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \mu}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta \mu}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2} \right) \equiv 0$$

est nécessaire et suffisante pour que la fonction $u(x, y) = \varphi(\mu(x, y))$ harmonique dans le domaine D existe.

Indication. Utiliser le critère suivant de la dépendance fonctionnelle $f(x, y) = F(g(x, y))$: l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$ doit être identiquement nulle.

* * *

Parfois, à la place des variables x et y il est commode d'utiliser les variables $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

Les opérations $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ seront formellement définies par les égalités

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

La prise de la dérivée partielle formelle $\frac{\partial}{\partial z}$ ne doit pas être confondue avec l'opération de différentiation $\frac{d}{dz}$ définie au début du paragraphe.

8.34. Soit $f(x, y)$ une fonction admettant des dérivées partielles continues du premier ordre. Vérifier que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

8.35. Vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann exprimées à l'aide des variables z et $\bar{z}$ prennent la forme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ où $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$ (ici, $f = u + iv$).

8.36. Vérifier que l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, dans laquelle figurent les variables z et $\bar{z}$, est de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0$.

8.37. Montrer que pour la fonction u, qui prend des valeurs réelles, la relation $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}$ a lieu.

8.38. Vérifier que la formule du jacobien $J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$, contenant les variables z et $\bar{z}$, prend la forme $J = 4i \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$.

8.39. Trouver $\frac{\partial F}{\partial z}$ et $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ pour les fonctions suivantes:

1. $F = |z|$. 2. $F = |z - a|^p$, $-\infty < p < \infty$.

3. $F = \sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}$. 4. $F = \frac{|z-a| + i|z+a|}{|z-a| - i|z+a|}$.

8.40. Trouver $\frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ pour les fonctions suivantes:

1. $F = |z|^p$, $-\infty < p < \infty$. 2. $F = e^{p|z|}$, $-\infty < p < \infty$.

3. $F = \ln|z - a|$. 4. $F = \ln(1 + |z|^2)$. 5. $F = \operatorname{arctg}\frac{1 + |z|}{1 - |z|}$.

8.41. Soit $f(z)$ une fonction régulière. Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\frac{\partial}{\partial z}(|f(z)|)=\frac{1}{2}|f(z)|\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}$.

2. $\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}(|f(z)|^p)=\frac{p^2}{4}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2, \qquad -\infty<p<\infty$.

3. $\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} f(z))=\frac{1}{2}f'(z)$.

4. $\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Im} f(z))=\frac{1}{2i}f'(z)$.

5. $\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}e^{p|f(z)|}=\frac{p^2}{4}e^{p|f(z)|}\left(p+\frac{1}{|f(z)|}\right)|f'(z)|^2$.

6. $\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\ln(1+|f(z)|^2)=\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}$.

8.42. Soient $F(t)$ une fonction deux fois différentiable d'une variable réelle, $w(z)$ une fonction régulière et $u(x, y)$ une fonction harmonique. Démontrer les formules ci-dessous:

1. $\frac{\partial}{\partial z}F(u(x, y))=F'(u(x, y))\frac{\partial u}{\partial z}$.

2. $\frac{\partial}{\partial z}F(|f(z)|)=\frac{1}{2}F'(|f(z)|)|f(z)|\frac{f'(z)}{f(z)}$.

3. $\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}F(u(x, y))=F''(u(x, y))\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2$.

4. $\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}F(|f(z)|)=\frac{1}{4}|f'(z)|^2\{F''(|f(z)|)+|f(z)|^{-1}F'(|f(z)|)\}$.

8.43. Soit u, v un couple de fonctions harmoniques conjuguées. Montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial z}=i\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=-i\frac{\partial v}{\partial\bar{z}}.$$

8.44. Soit $P(x, y)$ un polynôme en x et y à coefficients complexes. Notons $P^*(z, \bar{z})=P\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$. Montrer que:

1. Les fonctions

$$u(x, y)=\operatorname{Re} P(x, y), \qquad v(x, y)=\operatorname{Im} P(x, y)$$

satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann si, et seulement si, le polynôme $P^*(z, \bar{z})$ ne dépend pas de $\bar{z}$.

2. Le polynôme $P(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace $\Delta P=0$ si, et seulement si, le polynôme $P^*(z, \bar{z})$ peut être mis sous la forme $Q_1(z)+Q_2(\bar{z})$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes.

8.45. Définissons pour les polynômes $Q(z, \bar{z})$ les opérations $\frac{\partial^*}{\partial z}$ et $\frac{\partial^*}{\partial\bar{z}}$ comme des opérations linéaires satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial^*}{\partial z}(z^m\bar{z}^n)=mz^{m-1}\bar{z}^n, \qquad \frac{\partial^*}{\partial\bar{z}}(z^m\bar{z}^n)=nz^m\bar{z}^{n-1}$$

(m et n sont des entiers non négatifs). Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^* P^*}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial \bar z}=\frac{\partial^* P^*}{\partial \bar z}; \quad \left(P^*(z,\bar z)=P\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)\right).$$

8.46. Soit $P(z)$ un polynôme à une indéterminée z. Posons

$$Q(z)=\overline{P(\bar z)}.$$

Montrer que :

1. La fonction $Q(z)$ est un polynôme à une indéterminée z.
2. Les formules suivantes ont lieu:

$$P(z)+Q(\bar z)=2\operatorname{Re}P(z); \quad P(z)-Q(\bar z)=2i\operatorname{Im}P(z).$$

8.47. Soit un polynôme $P(z)$. Posons

$$u(x, y)=\operatorname{Re}P(x+iy); \quad v(x, y)=\operatorname{Im}P(x+iy).$$

Montrer que les formules ci-dessous sont valables:

1. $P(z)=2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-\overline{P(0)}$. 2. $P(z)=2iv\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)+\overline{P(0)}$.

8.48. Soit un polynôme $P(z)$. Posons

$$R(x, y)=|P(x+iy)|, \quad \Phi(x, y)=\arg P(x+iy).$$

Montrer que les formules ci-dessous sont vraies:

1. $P(z)\overline{P(0)}=R^2\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)$. 2. $P(z)=\overline{P(0)}e^{2i\Phi\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)}$.

8.49. Démontrer la formule ci-dessous qui permet de reconstituer le polynôme $P(z)$ d'après la fonction $a\operatorname{Re}P(x+iy)+b\operatorname{Im}P(x+iy)=g(x, y)$:

$$P(z)=\frac{2}{a-ib}g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-\frac{a+ib}{a-ib}\overline{P(0)}$$

(ici a et b sont des constantes réelles, l'une d'elles au moins étant différente de zéro).

8.50. Montrer que les formules des problèmes 8.47 à 8.49 restent valables si $P(z)$ n'est plus considéré comme un polynôme mais comme une fonction rationnelle dont le dénominateur est différent de zéro au point $z=0$.

Nota. En effet, à l'aide du théorème d'unicité, il est facile de montrer que ces formules restent valables pour toute fonction régulière au point $z=0$.

8.51. Reconstituer la fonction régulière $f(z)$ d'après la fonction donnée:

1. $\operatorname{Re}f=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, \quad f(0)=0$.
2. $\operatorname{Re}f=e^x(x\cos y-y\sin y), \quad f(0)=0$.
3. $\operatorname{Re}f=x\cos x\operatorname{ch}y+y\sin x\operatorname{sh}y, \quad f(0)=0$.
4. $\operatorname{Im}f=y\cos y\operatorname{ch}x+x\sin y\operatorname{sh}x, \quad f(0)=0$.
5. $|f|=(x^2+y^2)e^x$. 6. $\arg f=xy$.
7. $|f|=e^{r^2\cos 2\varphi}\,(z=re^{i\varphi})$.
8. $\arg f=\varphi+r\sin\varphi\,(z=re^{i\varphi})$.

Dans le cas où les fonctions $\mathrm{Re}\, f(z)$, $\mathrm{Im}\, f(z)$, $|f(z)|$, $\arg f(z)$ ne sont pas données comme des fonctions de x et y, mais comme des fonctions de z et $\bar{z}$, la reconstitution de $f(z)$ d'après l'une des fonctions citées plus haut s'effectue d'une façon encore plus simple.

8.52. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas pour $z=a$ et soient

$$\mathrm{Re}\, f(z)=u(z, \bar{z}), \quad \mathrm{Im}\, f(z)=v(z, \bar{z}),$$
$$|f(z)|=\mathrm{Re}(z, \bar{z}), \quad \arg f(z)=\Phi(z, \bar{z}).$$

Montrer que

1. $f(z)=2u(z, \bar{a})-\overline{f(a)}$. 2. $f(z)=2iv(z, \bar{a})+\overline{f(a)}$.
3. $f(z)\overline{f(a)}=R^2(z, \bar{a})$. 4. $f(z)=\overline{f(a)}e^{2i\Phi(z, \bar{a})}$.

8.53. Soient $f(z)$, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ trois fonctions rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas pour $z=a$. Montrer que, si ces fonctions satisfont à la condition $|f(z)|=\dfrac{1+|\varphi(z)|^2}{1+|\psi(z)|^2}$, elles vérifient également la condition

$$f(z)\overline{f(a)}=\left(\frac{1+\varphi(z)\overline{\varphi(a)}}{1+\psi(z)\overline{\psi(a)}}\right)^2.$$

Indication. La grandeur $|w(z)|^2$ peut être mise sous la forme $w(z)\, w_1(\bar{z})$, où $w_1(z)=\overline{w(\bar{z})}$.

8.54. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle régulière au point $z=0$ satisfaisant à la condition

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{1}{1+|z|^2}.$$

Montrer que $f(z)$ est une fonction homographique, c'est-à-dire $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

8.55. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ y satisfaisant aux conditions

$$|f(z)|<1, \quad \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}=\frac{1}{1-|z|^2}.$$

Montrer que $f(z)$ est une fonction homographique, c'est-à-dire $f(z)=$ $=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Nota. Conformément au nota du problème 8.50, la condition de rationalité de la fonction $f(z)$ est superflue dans les problèmes 8.54 et 8.55.



8.56. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un certain domaine D. Montrer que la somme $f(z)+\overline{g(z)}$ est réelle dans tout le domaine D si, et seulement si, $f(z)=g(z)+C$, où C est une constante réelle.

8.57. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un certain domaine D et soit $g(z) \not\equiv 0$. Montrer que le produit $f(z)\overline{g(z)}$ n'est pas négatif dans tout le domaine D si, et seulement si, $f(z) = C\overline{g(z)}$, où C est une constante non négative.

8.58. Les conditions du problème 8.57 restant les mêmes, montrer que le produit $f(z)\overline{g(z)}$ est réel dans tout le domaine D si, et seulement si, $f(z) = Cg(z)$, où C est une constante réelle.

8.59. Soient $f_1(z)$, $f_2(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ des fonctions régulières dans un certain domaine D et soit $|g_1(z)|^2 + |g_2(z)|^2 \not\equiv 0$. Montrer que l'expression $f_1(z)\overline{g_1(z)} + f_2(z)\overline{g_2(z)}$ est réelle dans tout le domaine D si, et seulement si,

$$f_1(z) = \alpha_{11}g_1(z) + \alpha_{12}g_2(z), \quad f_2(z) = \alpha_{21}g_1(z) + \alpha_{22}g_2(z),$$

où les constantes α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} satisfont aux conditions

$$\operatorname{Im}\alpha_{11} = 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} = \overline{\alpha}_{21}.$$

Indication. En écrivant la condition de réalité sous la forme

$$f_1(z)\overline{g_1(z)} + f_2(z)\overline{g_2(z)} = \overline{f_1(z)}g_1(z) + \overline{f_2(z)}g_2(z),$$

la différentier deux fois par rapport à z et trouver la condition de compatibilité des trois équations linéaires à deux inconnues $\overline{g_1(z)}$ et $\overline{g_2(z)}$ obtenues.

8.60. Les conditions du problème 8.59 étant les mêmes, montrer que l'expression $f_1(z)\overline{g_1(z)} + f_2(z)\overline{g_2(z)}$ n'est pas négative dans tout le domaine D si, et seulement si,

$$f_1(z) = \alpha_{11}g_1(z) + \alpha_{12}g_2(z), \quad f_2(z) = \alpha_{21}g_1(z) + \alpha_{22}g_2(z),$$

où les constantes α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} satisfont aux conditions

$$\alpha_{11} \geqslant 0, \quad \alpha_{22} \geqslant 0, \quad \alpha_{12} = \overline{\alpha}_{21}, \quad |\alpha_{12}|^2 \leqslant \alpha_{11}\alpha_{22}.$$

8.61. Soient $F(z)$ et $G(z)$ deux vecteurs d'un espace complexe à n dimensions, dont les composantes sont des fonctions régulières dans un certain domaine D, et soit $G(z)$ non identiquement nul. Montrer que le produit scalaire $(F(z), G(z)) = \sum_{k=1}^{n} F_k(z)\overline{G_k(z)}$ est réel dans tout le domaine D si, et seulement si, $F(z) = CUG(z)$, où C est une constante réelle, U étant une matrice unitaire constante.

8.62. Les conditions du problème 8.61 restant les mêmes, montrer que le produit scalaire $(F(z), G(z))$ est positif dans tout le domaine D si, et seulement si, $F(z) = CUG(z)\overline{U}$, où C est une constante positive, U étant une matrice unitaire constante.

RÉPONSES

8.01.

1. Nulle part. 2. Sur l'axe réel et sur l'axe imaginaire. 3. Au point $z = 0$. 4. Sur la droite $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$. 5. Au point $z = 0$. 6. Partout.

8.08.

1. $\operatorname{sh} z e^{\operatorname{ch} z}$. 2. $2e^z \cos(2e^z)$.
3. $(1-i)\cos z \operatorname{ch} z + (1+i)\sin z \operatorname{sh} z$. 4. $(1-z)e^{-z}$.
5. $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)e^z$, $z \neq 0$. 6. $\frac{(1+z^2)(\cos z - z\sin z) - 2z^2\cos z}{(1+z^2)^2}$, $z \neq \pm i$.

8.09.

1. $\dfrac{1}{\cos^2 z}$. 2. $-\dfrac{1}{\sin^2 z}$. 3. $\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. 4. $\cos 2z$. 5. $-2\dfrac{e^z+e^{-z}}{(e^z-e^{-z})^3}$.
6. $\dfrac{1}{(\cos z-\sin z)^2}$.

8.30.

1. $-\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+C$. 2. $2xy-\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+C$.
3. $x\cos y \operatorname{sh} x - y \sin y \operatorname{ch} x + C$. 4. $r\varphi\sin\varphi - r\ln r\cdot\cos\varphi + C$.

8.31.

1. $C\ln(x^2+y^2)+C_1$. 2. $C(x^2-y^2)+C_1$.
3. $C\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+C_1$. 4. $C\dfrac{x}{x^2+y^2}+C_1$.

8.32.

1. $Ax+B$. 2. $A\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+B$. 3. $A\ln(x^2+y^2)+B$. 4. $\dfrac{Ax}{x^2+y^2}+B$.

8.39.

1. $\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{|z|}{z}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{z}{|z|}$.
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{|z-a|^p}{z-a}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \bar z}=\dfrac{p}{2}\,\dfrac{|z-a|^p}{\bar z-\bar a}$.
3. $\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{2z-a-b}{2\sqrt{|z-a|^2+|z-b|^2}}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \bar z}=\dfrac{2\bar z-\bar a-b}{2\sqrt{|z-a|^2+|z-b|^2}}$.
4. $\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{2iz}{a^2-z^2}\cdot\dfrac{|z^2-a^2|}{(|z+a|-i|z-a|)^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \bar z}=\dfrac{2i\bar z}{\bar a^2-\bar z^2}\cdot\dfrac{|z^2-a^2|}{(|z+a|-i|z-a|)^2}$.

8.40.

1. $\dfrac{p^2}{4}|z|^{p-2}$. 2. $\dfrac{p}{4}e^{p|z|}\left(p+\dfrac{1}{|z|}\right)$. 3. 0.
4. $\dfrac{1}{(1+|z|^2)^2}$. 5. $\dfrac{1-|z|^2}{4|z|(1+|z|^2)^2}$.

8.51.

1. $(1-2i)z^3$. 2. ze^z. 3. $z\cos z$. 4. $z \operatorname{ch} z$.
5. $e^{i\alpha}z^2e^z$, $\operatorname{Im}\alpha=0$, $\alpha=$ const. 6. $Ae^{z^2/2}$, $A>0$ – const.
7. $e^{z^2+i\alpha}$, $\operatorname{Im}\alpha=0$, $\alpha=$ const. 8. Aze^{z^2}, $A>0$ – const.

§ 9. Interprétation géométrique de la dérivée

Soit $w(z)$ une fonction définie dans un domaine D. L'application linéaire $w=Az+B\bar z+C$ est appelée *partie linéaire principale au point* $z=z_0$ de l'application $w=w(z)$ si

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|w(z)-(Az+B\bar z+C)|}{|z-z_0|}=0.$$

9.01. Trouver la partie linéaire principale des applications ci-dessous au point z_0 indiqué:

1. $w=z^2$, $z_0=i$. 2. $w=\bar{z}^2$, $z_0=1$. 3. $w=|z|^2$, $z_0=i$.

4. $w=\frac{z-1}{z+1}$, $z_0=2$. 5. $w=e^z$, $z_0=\pi i$. 6. $w=\frac{1}{\bar{z}}$, $z_0=-i$.

9.02. Soit $w=Az+B\bar{z}+C$ la partie linéaire principale de l'application $w=z^2+az+b$ au point $z=z_0$. Calculer la grandeur

$$\max_{|z-z_0|\leq\varrho} |z^2+az+b-(Az+B\bar{z}+C)|.$$

9.03. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0. Montrer que la partie linéaire principale de l'application $w=w(z)$ au point z_0 est de la forme $w=w(z_0)+(z-z_0)w'(z_0)$.

9.04. Soit $w(z)$ une fonction définie dans un domaine D, et supposons que la partie linéaire principale de l'application $w=w(z)$ en chaque point z_0 du domaine D existe et qu'elle soit de la forme $w=A(z_0)z+B(z_0)$. Montrer que la fonction $w(z)$ est régulière dans le domaine D et que $w'(z)=A(z)$.

9.05. Soit $w(z)$ une fonction définie dans un domaine D, et supposons que les fonctions

$$u(x, y)=\text{Re } w(x+iy), \quad v(x, y)=\text{Im } w(x+iy)$$

admettent des dérivées partielles continues dans le domaine D. Montrer que, si l'application $w=w(z)$ conserve la distance entre les points correspondants, c'est-à-dire si, pour tout couple de points $z_1\in D$ et $z_2\in D$, l'égalité $|w(z_1)-w(z_2)|=|z_1-z_2|$ a lieu, alors $w(z)\equiv e^{i\varphi}z+a$, où φ est une constante réelle, a étant une constante complexe.



Soit $w=w(z)$ une application lisse d'un certain voisinage d'un point z_0 (c'est-à-dire que les fonctions Re $w(x+iy)$ et Im $w(x+iy)$ ont des dérivées partielles continues dans ce voisinage du point z_0). Déterminons deux grandeurs pour chaque courbe lisse C passant par le point z_0:

Soit φ l'angle que fait la tangente à la courbe C au point z_0 avec le demi-axe positif réel dans le plan des z (fig. 4,a) et soit φ_1 l'angle entre la tangente à la courbe C' (image de la courbe C par l'application $w=w(z)$) et le demi-axe positif réel dans le plan des w (fig. 4,b) (les deux courbes sont orientées

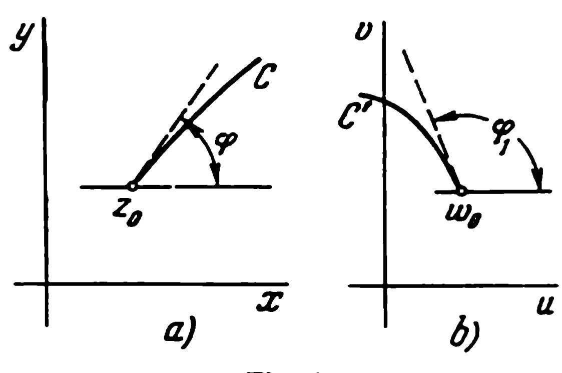


Fig. 4

et on considère que les tangentes sont orientées dans le même sens que les courbes). La grandeur $\alpha=\varphi_1-\varphi$ est appelée *angle de rotation de la courbe* C au point z_0.

Soit z un point arbitraire de la courbe C assez voisin du point z_0. Notons $\Delta z=z-z_0$, $\Delta w=w(z)-w(z_0)$ (fig. 5). On appelle *coefficient de dilatation linéaire de la courbe C au point* z_0 la limite $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=R$ qui existe en vertu du fait que l'application $w=w(z)$ est lisse dans le voisinage du point z_0.

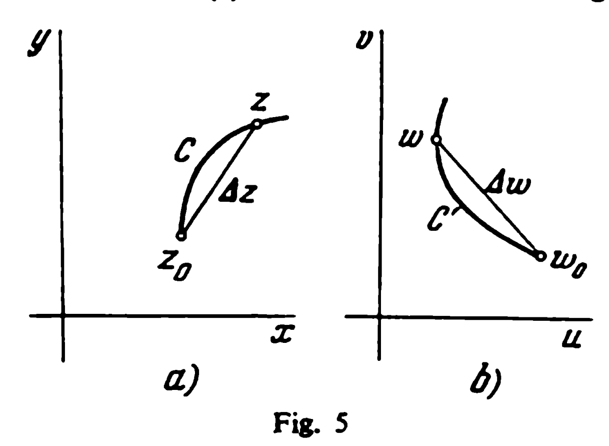


Fig. 5

9.06. Supposons qu'une courbe C soit représentée par la demi-droite $\arg(z-z_0)=\varphi$ sortant du point z. Trouver le coefficient de dilatation linéaire $R(\varphi)$ au point z_0 et l'angle de rotation $\alpha(\varphi)$ au point z_0 de cette demi-droite par les applications suivantes:

1. $w=z^2$, $z_0=1$. 2. $w=\bar{z}^2$, $z_0=i$. 3. $w=ie^{2z}$, $z_0=0$.

4. $w=2z+i\bar{z}$, $z_0=0$. 5. $w=\frac{z-z_0}{z+z_0}$ $(z_0\neq 0)$. 6. $w=\frac{1-iz}{1+iz}$, $z_0=-i$.

9.07. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0. Montrer que l'angle de rotation α d'une courbe C au point z_0 aussi bien que le coefficient de dilatation linéaire R de cette courbe au point z_0 par l'application $w=w(z)$ ne dépendent pas du choix de la courbe C passant par le point z_0, et que pour ces grandeurs, pour $w'(z_0)\neq 0$, les formules ci-dessous sont valables:

$$R=|w'(z_0)|,\quad \alpha=\arg w'(z_0)+2k\pi \quad (k \text{ est un entier}).$$

9.08. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0. Notons respectivement $\alpha(\varphi)$ et $R(\varphi)$ l'angle de rotation et le coefficient de dilatation linéaire au point z_0 de la demi-droite $\arg(z-z_0)=\varphi$ par l'application $w=\overline{w(z)}$. Montrer que, pour $w'(z_0)\neq 0$,

$$R(\varphi)=|w'(z_0)|,\quad \alpha(\varphi)=-2\varphi-\arg w'(z_0)+2k\pi$$

(k est un certain entier).

9.09. Trouver les ensembles de tous les points z_0 en lesquels le coefficient de dilatation linéaire, par les applications suivantes, est égal à 1:

1. $w=z^2$. 2. $w=z^3$. 3. $w=z^2-2z$.

4. $w=\frac{1}{z}$. 5. $w=\frac{1+iz}{1-iz}$. 6. $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$.

9.10. Trouver les ensembles de tous les points z_0 en lesquels l'angle de rotation, par les applications suivantes, est égal à zéro:

1. $w = iz^2$. 2. $w = -z^3$. 3. $w = z^2 - 2z$.

4. $w = \frac{i}{z}$. 5. $w = \frac{1+iz}{1-iz}$. 6. $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $c \neq 0$.

9.11. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0, et supposons que deux courbes lisses C_1 et C_2 passant par le point z_0 jouissent de la propriété exprimée par les relations suivantes:

$$\operatorname{Re} w(z) = \operatorname{Re} w(z_0) \quad (z \in C_1); \qquad \operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im} w(z_0) \quad (z \in C_2).$$

Montrer que, si $w'(z_0) \neq 0$, les courbes C_1 et C_2 se coupent à angle droit.

9.12. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0, et supposons que deux courbes lisses C_1 et C_2 passant par le point z_0 possèdent la propriété:

$$|w(z)| = |w(z_0)| (z \in C_1); \qquad \arg w(z) = \arg w(z_0) \quad (z \in C_2).$$

Montrer que, si $w'(z_0) \neq 0$, les courbes C_1 et C_2 se coupent à angle droit.

9.13. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0, et supposons que deux courbes lisses C_1 et C_2 passant par le point z_0 possèdent la propriété:

$$|w(z)| = |w(z_0)| (z \in C_1), \qquad \operatorname{Re} w(z) = \operatorname{Re} w(z_0) \quad (z \in C_2).$$

Montrer que, si $w'(z_0) \neq 0$, les courbes C_1 et C_2, qui se coupent au point z_0, forment entre elles les angles $\pm \arg w(z_0) + k\pi$.

* * *

9.14. Soit $w(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine D et soit D' l'image du domaine D par l'application $w = w(z)$. Montrer que, si l'application $w = w(z)$ est biunivoque dans le domaine D, l'aire $\sigma(D')$ du domaine D' est donnée par la formule

$$\sigma(D') = \iint_D |w'(z)|^2 \, dx \, dy.$$

Indication. Montrer que le jacobien de l'application $w = w(z)$ est égal à $|w'(z)|^2$.

9.15. Soit $w(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et soit C une courbe rectifiable arbitraire contenue dans ce domaine. Montrer que la longueur $l(C')$ de l'image C' de la courbe C par l'application $w = w(z)$ est donnée par la formule $l(C') = \int_C |w'(z)| \, |dz|$.

9.16. Trouver les longueurs des images des courbes C données ci-dessous par les applications indiquées:

1. $C : z = it + 1$, $0 \leq t \leq 1$; $w = z^2$.
2. $C : z = it$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $w = e^z$.
3. $C : z = it$, $0 \leq t \leq 6\pi$; $w = e^z$.

4. $C : z=(1+i)t, \quad 0 \le t \le 2\pi \; ; \quad w=e^z.$

5. $C : z=(1+i)t, \quad 0 \le t \le 1 \; ; \quad w=z^m \; (m=1, 2, \ldots).$

6. $C : z=e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi \; ; \quad w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$

9.17. Trouver les aires des images des domaines D suivants par les applications indiquées:

1. $D : \left\{2<|z|<3, \; |\arg z|<\frac{\pi}{4}\right\} \; ; \quad w=z^2.$

2. $D : \{0<\operatorname{Re} z<1, \; |\operatorname{Im} z|<\pi\} \; ; \quad w=e^z.$

3. D : un carré ayant pour sommets $0, 1, i+1, i$; $w=\frac{z-1}{z+1}$.

9.18. Soit $P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Notons $L(r)$ la longueur de l'image de la circonférence $|z|=r$ par l'application $w=P(z)$, et $S(r)$ l'aire de l'image du disque $|z|<r$ par la même application. Montrer que:

1. L'inégalité $S(r) \ge \pi r^2 |P'(0)|^2$ est valable.

2. L'inégalité $\int_0^r \frac{L^2(t)}{t}\, dt \le 2\pi S(r)$ est valable.

3. L'inégalité $L(r) \ge 2\pi r |P'(0)|$ est valable.

Indication. Démontrer d'abord les formules suivantes:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P'(re^{i\varphi})\, d\varphi = P'(0) \; ; \qquad \iint\limits_{|z|<r} |P'(z)|^2\, dx\, dy = \pi \sum_{m=0}^{n} m|a_m|^2 r^{2m}.$$

9.19. Soit $Q(z)=z+\sum_{k=1}^{n} c_k z^{-k}$. Trouver l'aire de l'image de la couronne $r<|z|<R$ par l'application $w=Q(z)$ en comptant l'aire de chaque surface élémentaire de centre w_0 autant de fois que la fonction $Q(z)$ devient égale à w_0 dans la couronne $r<|z|<R$.



La grandeur

$$k(z, \zeta)=\frac{|z-\zeta|}{\sqrt{1+|z|^2}\cdot\sqrt{1+|\zeta|^2}}$$

est appelée *distance cordale* entre les points z et ζ du plan complexe élargi.

Soient z et ζ deux points arbitraires du disque $|z|<1$. La grandeur

$$\varrho(z, \zeta)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\bar{\zeta}|+|z-\zeta|}{|1-z\bar{\zeta}|-|z-\zeta|}$$

est appelée *distance non euclidienne* entre les points z et ζ par rapport au disque $|z|<1$.

9.20. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0. Montrer que la limite $\lim\limits_{z_1 \to z_0} \dfrac{k(w(z_1),\ w(z_0))}{k(z_1,\ z_0)}$ existe et trouver cette limite.

9.21. Soit $w(z)$ une fonction régulière en un point z_0, $|z_0| < 1$, et soit $|w(z_0)| < 1$. Montrer que la limite

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{\varrho(w(z_1),\ w(z_0))}{\varrho(z_1,\ z_0)}$$

existe et la trouver.

9.22. Soit $w(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et soit $w = w(z)$ une application qui conserve la distance euclidienne entre les points correspondants, c'est-à-dire que, pour tout couple de points $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$, l'égalité $|w(z_2) - w(z_1)| = |z_2 - z_1|$ a lieu. Montrer que $w(z) = e^{i\varphi}z + a$, où φ est une constante réelle, a étant une constante complexe.

9.23. Soient $w(z)$ une fonction rationnelle et $w = w(z)$ une application qui conserve la distance cordale entre les points correspondants, c'est-à-dire que, pour tout couple de points z_1 et z_2, l'égalité

$$k(w(z_1),\ w(z_2)) = k(z_1,\ z_2)$$

a lieu. Montrer que $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d sont des constantes.

Indication. Voir le problème 8.54.

9.24. Soient $w(z)$ une fonction rationnelle satisfaisant à la condition $|w(z)| < 1$ ($|z| < 1$) et $w = w(z)$ une application qui conserve la distance non euclidienne entre les points du disque $|z| < 1$ par rapport à ce disque, c'est-à-dire que, pour tout couple de points z_1 et z_2 du disque $|z| < 1$, l'égalité $\varrho(w(z_1),\ w(z_2)) = \varrho(z_1,\ z_2)$ a lieu. Montrer que $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d sont des constantes.

Indication. Voir le problème 8.55.

Nota. Dans les problèmes 8.54 et 8.55, la condition de rationalité de la fonction $w(z)$ est superflue. En utilisant le principe de prolongement analytique, il est aisé de transposer les assertions de ces problèmes aux fonctions $w(z)$ régulières dans un domaine D quelconque.

RÉPONSES

9.01.

1. $w = 2iz + 1$. 2. $w = 2\bar{z} - 1$. 3. $w = -iz + i\bar{z} - 1$.

4. $w = \dfrac{2}{9}z - \dfrac{1}{9}$. 5. $w = -z + \pi i - 1$. 6. $w = \bar{z} - 2i$.

9.02. ϱ^2.

9.06.

1. $R(\varphi) = 2$, $\alpha(\varphi) = 0$. 2. $R(\varphi) = 2$, $\alpha(\varphi) = -2\varphi - \dfrac{\pi}{2}$.

3. $R(\varphi) = 2$, $\alpha(\varphi) = \pi/2$.

4. $R(\varphi) = \sqrt{5 + 4\sin 2\varphi}$, $\alpha(\varphi) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi}\right)$.

5. $R(\varphi) = 1/2|z_0|$, $\alpha(\varphi) = -\arg z_0$. 6. $R(\varphi) = 1/2$, $\alpha(\varphi) = -\pi/2$.

9.09.

1. $|z_0| = 1/2$. 2. $|z_0| = 1/\sqrt{3}$. 3. $|z_0 - 1| = 1/2$.

4. $|z_0| = 1$. 5. $|z_0 + i| = \sqrt{2}$. 6. $|cz_0 + d| = \sqrt{|ad - bc|}$.

9.10.

1. $\arg z_0 = -\pi/2$. 2. $\operatorname{Re} z_0 = 0$. 3. $1 < z_0 < +\infty$.

4. $\operatorname{Im}((1+i)z_0) = 0$. 5. $\operatorname{Im}((1-i)(z_0+i)) = 0$. 6. $\operatorname{Im}(cz_0 + d) = 0$.

9.16.

1. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. 2. 2π. 3. 6π.

4. $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$. 5. $2^{\pi/2}$. 6. 4.

9.17.

1. $\frac{65}{2}\pi$. 2. $\pi(e^2 - 1)$. 3. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

9.19.

$\pi(R^2 - r^2) + \pi \sum_{1}^{n} k |c_k|^2 (r^{-2k} - R^{-2k})$.

9.20.

$|w'(z_0)| \cdot \frac{1 + |z_0|^2}{1 + |w(z_0)|^2}$.

9.21.

$|w'(z_0)| \cdot \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |w(z_0)|^2}$.

§ 10. Théorème de Cauchy. Intégrale du type de Cauchy

La résolution des problèmes ci-après est basée sur l'utilisation du *théorème de Cauchy* formulé de la façon suivante:

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine fini simplement connexe D. Si les courbes rectifiables C_1 et C_2 contenues dans le domaine D ont même origine et même extrémité, alors

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

En particulier, si C est une courbe rectifiable fermée contenue dans le domaine D,

$$\int_{C} f(z)\, dz = 0.$$

En vertu du théorème de Cauchy, la notation

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta, \quad z_1 \in D, \ z_2 \in D$$

a un sens pour une fonction $f(z)$ régulière dans un domaine fini simplement connexe D.

10.01. Montrer que, si une fonction $f(z)$ est régulière dans le disque $|z-a|<R$ et si elle satisfait à la condition $|f(z)|\leq M$ $(|z-a|<R)$, pour tout couple de points z_1 et z_2 de ce disque, l'inégalité ci-dessous a lieu:

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq M|z_2-z_1|.$$

10.02. Montrer que l'assertion du problème 10.01 reste en vigueur si, comme domaine de régularité de la fonction $f(z)$, on ne prend pas le disque mentionné mais un domaine fini convexe arbitraire.

Nota. Le domaine est appelé *convexe* si, pour tout couple de points qu'il contient, il contient le segment de droite qui joint ces points.

10.03. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine fini simplement connexe D satisfaisant à la condition $|f(z)|\leq M$ $(z\in D)$. Notons $\varrho_D(z_1,\ z_2)$, où $z_1\in D$ et $z_2\in D$, la borne inférieure des longueurs des lignes polygonales joignant les points z_1 et z_2 et contenues dans le domaine D. Montrer que

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq M\varrho_D(z_1,\ z_2).$$

10.04. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine fini convexe D satisfaisant à la condition $\operatorname{Re} f(z)\geq M>0$, $(z\in D)$. Montrer que, pour tout couple de points z_1 et z_2 de ce domaine,

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta\right| \geq M|z_2-z_1|.$$

10.05. Montrer que l'assertion du problème 10.04 reste en vigueur si la condition $\operatorname{Re} f(z)\geq M$ $(z\in D)$ est remplacée par la condition $\operatorname{Re}\{e^{i\varphi}f(z)\}\geq M$ (le nombre réel φ ne dépend pas du point z).

* * *

Une fonction $\Phi(z)$ définie et différentiable dans un domaine D est appelée *primitive* d'une fonction $f(z)$ définie dans le domaine D si

$$\Phi'(z)=f(z) \qquad (z\in D).$$

Il est connu que, *si la primitive existe, elle est unique à un terme constant près.*

10.06. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine fini simplement connexe D. Montrer que la fonction

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta+\text{const} \qquad (z_0\in D,\ z\in D)$$

est la primitive de la fonction $f(z)$.

10.07. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un domainc fini simplement connexe D et soient respectivement $F(z)$ et $G(z)$ les primitives de ces fonctions. Démontrer la formule d'intégration par parties suivante:

$$\int_a^b F(z)g(z)\,dz = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(z)G(z)\,dz.$$

10.08. Soit $f(z)$ une fonction définie, pour $|z-a| < R$, par la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |c_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R}.$$

Montrer que sa primitive est égale à

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z-a)^n + \text{const.}$$

10.09. Trouver les primitives des fonctions ci-dessous:

1. e^{az}. 2. $\operatorname{ch} az$. 3. $\operatorname{sh} az$. 4. $\cos az$. 5. $\sin az$.
6. $e^{az}\cos bz$. 7. ze^{az}. 8. $z^2 \operatorname{ch} az$. 9. $z \cos az$.

Dans les problèmes qui suivent, on recommande d'utiliser une autre formulation du théorème de Cauchy:

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine borné à un nombre fini de connexions D dont la frontière ∂D est constituée par un nombre fini de courbes fermées lisses par morceaux. Si la fonction $f(z)$ est continue jusqu'à la frontière du domaine D, alors

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

10.10. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $r < |z-a| < R$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{|z-a|=\varrho} f(z)\,dz, \quad r < \varrho < R$$

ne dépend pas du nombre ϱ (la circonférence est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

10.11. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $r < |z| < R$ et soit C une courbe lisse par morceaux simple qui borne le domaine contenant le disque $|z| \leq r$ et contenu dans le disque $|z| < R$ (la courbe C est parcourue de façon que le domaine reste à gauche). Montrer que l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$ ne dépend pas du choix de la courbe C qui satisfait aux conditions citées plus haut.

Indication. Examiner la fonction $f(z)$ dans le domaine compris entre la courbe C et la circonférence $|z| = r + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

10.12. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine arbitraire D du plan complexe. Montrer que, pour qu'il existe une primitive de la fonction

$f(z)$ dans le domaine D, il faut et il suffit que l'intégrale de $f(z)$ prise sur toute ligne polygonale simple fermée contenue dans le domaine D soit nulle.

10.13. Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de primitives dans les domaines indiqués entre parenthèses:

1. $\frac{1}{z}\,(0<|z|<\infty)$. 2. $\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\,(0<|z|<1)$.

3. $\frac{z}{1+z^2}\,(1<|z|<\infty)$. 4. $\frac{1}{z(1-z^2)}\,(0<|z|<1)$.

10.14. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine borné doublement connexe D, compris entre deux courbes fermées lisses par morceaux C_1 et C_2, et continue jusqu'à sa frontière. Montrer que la fonction $f(z)$ a une primitive dans le domaine D si, et seulement si, $\int\limits_{C_1} f(z)\,dz=0$.

10.15. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine simplement connexe contenant le point $z=\infty$. Montrer que la fonction $f(z)$ admet une primitive dans ce domaine si, et seulement si, $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$.

10.16. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine simplement connexe D contenant le point $z=\infty$. Notons D' le domaine D privé du point $z=\infty$. Montrer que la fonction $f(z)$ admet une primitive dans le domaine D' si, et seulement si,

$$\lim_{z\to\infty} z(f(z)-f(\infty))=0.$$

10.17. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine D, contenant le point $z=\infty$, admettant des primitives dans le domaine D' (le domaine D privé du point $z=\infty$). Montrer que les fonctions

$$f(z)+g(z),\quad f(z)g(z),\quad P(f(z)),\quad e^{f(z)}$$

[$P(w)$ est un polynôme arbitraire] sont aussi régulières dans le domaine D et admettent une primitive dans le domaine D'.

10.18. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine fini m-connexe D borné par les courbes fermées lisses par morceaux $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$. Montrer que, pour que la fonction $f(z)$ ait une primitive dans le domaine D, il faut et il suffit que

$$\int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz=0 \quad (k=1, 2, \ldots, m-1).$$

10.19. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $-a<\operatorname{Im} z<a$ satisfaisant à la condition $f(z)\to 0$ ($z\to\infty$, $-a<\operatorname{Im} z<a$). Montrer que, si l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge, alors, pour tout α compris dans l'intervalle $(-a, a)$, l'intégrale $\int\limits_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z)dz$ converge également et ne dépend pas de α.

Indication. Appliquer le théorème de Cauchy à l'un des rectangles ci-dessous

$$-R_1 < \operatorname{Re} z < R_2, \quad 0 < |\operatorname{Im} z| < |\alpha|,$$

ensuite, passer à la limite pour $R_1 \to +\infty$, $R_2 \to +\infty$.

10.20. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans l'angle $-a < \arg z < a$ satisfaisant aux conditions

$$zf(z) \to 0 \ (z \to 0, \ |\arg z| < a), \quad zf(z) \to 0 \ (z \to \infty, \ |\arg z| < a).$$

Montrer que, si l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge, alors, pour tout α compris dans l'intervalle $(-a, a)$, l'intégrale $\int_{\arg z = \alpha} f(z)\,dz$ converge aussi et ne dépend pas de α.

10.21. De l'analyse mathématique on sait que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Calculer l'intégrale ci-dessous:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x\,dx, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Indication. Utiliser la solution du problème 10.19 avec $f(x) = e^{-x^2}$.

10.22. Calculer les intégrales de Fresnel

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx,$$

en utilisant la formule

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Indication. Voir les problèmes 10.20 et 5.38.

* * *

La résolution des problèmes qui suivent implique l'utilisation de la *formule intégrale de Cauchy:*

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine borné D et continue jusqu'à sa frontière ∂D constituée par un nombre fini de courbes fermées lisses par morceaux (ces courbes sont parcourues de façon que le domaine D reste à gauche). *Alors,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z) & (z \in D), \\ 0 & (z \notin \overline{D}), \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) & (z \in D), \\ 0 & (z \notin \overline{D}). \end{cases}$$

10.23. A l'aide de la formule intégrale de Cauchy calculer les intégrales suivantes (toutes les circonférences sont parcourues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre):

1. $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}$. 2. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$. 3. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$.

4. $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$. 5. $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$. 6. $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$.

7. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$ $(D$: a) $|z|<1/2$; b) $|z|<3/2$; c) $|z-1|<1/2)$.

8. $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ $(|a|<r<|b|,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$.

10.24. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans le disque $|z|<1$ et continues dans le disque $|z|\leq 1$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{zg(\zeta)}{z\zeta-1}\right]d\zeta=\begin{cases} f(z) & (|z|<1),\\ g(1/z) & (|z|>1).\end{cases}$$

10.25. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D, contenant le point $z=\infty$, et continue jusqu'à sa frontière. Montrer que, dans ce cas, la formule intégrale de Cauchy prend la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz=\begin{cases} f(z)-f(\infty) & (z\in D),\\ -f(\infty) & (z\notin \bar{D}),\end{cases}$$

tandis que la formule des dérivées de $f(z)$ reste inchangée.

Indication. Utiliser la formule de Cauchy appliquée à la fonction $f(z)$ dans le domaine D_R, obtenu en enlevant du domaine D le domaine $|z|\geq R$, ensuite, poser $R\to\infty$.

10.26. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z-a|<R$ et continue dans le disque $|z-a|\leq R$. Démontrer la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\varphi})\,d\varphi=f(a),$$

qui est connue sous le nom de *théorème de la moyenne*.

10.27. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ et continue dans le disque $|z|\leq R$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{r<|z|<R} f(z)\,dx\,dy$.

10.28. Montrer qu'une fonction régulière dans un certain domaine et non identiquement constante ne peut pas présenter un maximum en module en un point intérieur à ce domaine *(principe du maximum du module)*.

Indication. Voir le problème 10.26.

10.29. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans le disque $|z-a| \leq R$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\alpha + R\cos\varphi,\ \beta + R\sin\varphi)\,d\varphi = u(\alpha,\ \beta) \quad (a = \alpha + i\beta).$$

Indication. Voir les problèmes 10.26 et 8.29.

10.30. Montrer qu'une fonction harmonique dans un certain domaine et non identiquement constante ne peut admettre ni un maximum ni un minimum en un point intérieur à ce domaine *(principe du maximum pour les fonctions harmoniques)*.

10.31. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine fini D et continue jusqu'à sa frontière ∂D constituée par un nombre fini de courbes fermées lisses par morceaux. Montrer l'inégalité ci-dessous

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{M\cdot L}{2\pi\varrho^{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

où $M = \max\limits_{z\in\partial D} |f(z)|$, ϱ est la distance du point z à la frontière du domaine D, L est la longueur entière de la frontière du domaine D.

10.32. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z| < R$ et continue dans le disque $|z| \leq R$. Montrer l'inégalité ci-dessous

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),\ (|z| < R),$$

où $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$.

10.33. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z| < R$ et continue dans le disque $|z| \leq R$. Montrer l'inégalité ci-dessous

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{MR}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (R^2 + |z|^2 - 2R|z|\cos\varphi)^{-(n+1)/2}\,d\varphi, \quad (|z| < R),$$

où $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$, et faire voir que, pour $n = 1$, cette inégalité peut s'écrire

$$|f'(z)| \leq \frac{MR}{R^2 - |z|^2} \quad (|z| < R).$$

10.34. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan satisfaisant à la condition $|f(z)| \leq M$ pour tous les z. Montrer que $f(z)$ est identiquement constante *(théorème de Liouville)*.

Indication. Utiliser, par exemple, l'inégalité pour $|f'(z)|$ du problème 10.32, z étant fixé et $R \to \infty$.

10.35. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan vérifiant l'inégalité $|f(z)| \leq M(1 + |z|)^p$, $p > 0$. Montrer que $f(z)$ est un polynôme de degré p au plus.

Dans les problèmes qui suivent, on considère connu le fait suivant:
Si une fonction $f(z)$ est représentable par la série entière

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

qui converge dans un certain voisinage du point $z=a$, alors $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$.

10.36. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ et soit

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

dans un certain voisinage du point $z=0$. Montrer que

$$|c_n|\leq\inf_{r<R}\frac{M(r)}{r^n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

où $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|,\ r<R.$

10.37. Soit $f(z)=\sum\limits_{0}^{\infty}c_n z^n$ une fonction régulière dans le disque $|z|\leq R$ y vérifiant l'inégalité $|f'(z)|\leq M$. Montrer que

$$|c_n|\leq\frac{M}{nR^{n-1}}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

10.38. Soit $f(z)=\sum\limits_{0}^{\infty}c_n z^n$ une fonction régulière dans tout le plan satisfaisant à l'inégalité $|f(z)|\leq Me^{|z|}$. Montrer que

$$|c_n|\leq M\left(\frac{n}{e}\right)^{-n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$



10.39. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans l'angle $|\arg z|<\alpha<\pi$, et supposons valable pour cette fonction l'estimation asymptotique $f(z)=O(1)$ $(z\to\infty)$ dans chaque angle intérieur $|\arg z|\leq\alpha-\eta,\ \eta>0$. Montrer que dans chaque angle $|\arg z|\leq\alpha-\eta,\ \eta>0$, l'estimation $f'(z)=O(1/z)$ $(z\to\infty)$ est valable.

10.40. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $|\mathrm{Im}\, z|<a$, et supposons valable pour cette fonction l'estimation asymptotique $f(z)=o(1)$ $(z\to\infty)$ dans chaque bande intérieure $|\mathrm{Im}\, z|\leq a-\eta,\ \eta>0$. Montrer que dans chaque bande $|\mathrm{Im}\, z|\leq a-\eta,\ \eta>0$, l'estimation

$$f'(z)=o(1)\quad(z\to\infty)$$

est aussi valable.

10.41. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $|\mathrm{Im}\, z|<a$, et supposons valable pour cette fonction la formule asymptotique $f(z)\sim 1/z$

$(z \to \infty)$ dans chaque bande intérieure $|\mathrm{Im}\, z| \le a - \eta$, $\eta > 0$. Montrer que dans toute bande $|\mathrm{Im}\, z| \le a - \eta$, $\eta > 0$, l'estimation asymptotique $f'(z) = o(1/z)$ $(z \to \infty)$ est valable.

10.42. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $|\mathrm{Im}\, z| < a$, et supposons que, pour cette fonction, dans chaque bande intérieure $|\mathrm{Im}\, z| \le a - \eta$, $\eta < 0$, on a la série asymptotique $f(z) \approx \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}$ $(z \to \infty)$. Montrer que dans chaque bande $|\mathrm{Im}\, z| \le a - \eta$, $\eta > 0$, pour la fonction $f'(z)$, on a la série asymptotique

$$f'(z) \approx -\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{-k-1} \qquad (z \to \infty).$$

10.43. Existe-t-il une fonction $f(z)$ régulière dans la bande $|\mathrm{Im}\, z| < 1$ satisfaisant aux conditions

$$f(z) = O(1/z) \quad (z \to \infty), \qquad |f'(x)| \ge 1/x \quad (x > 0)?$$

* * *

La résolution des problèmes ci-après nécessite l'utilisation du théorème suivant:

Soient C une courbe rectifiable, $D_1, D_2, \ldots$ des domaines du plan des z séparés par la courbe C et $\varphi(t)$ une fonction continue sur la courbe C. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt,$$

appelée intégrale du type de Cauchy *est définie pour tous les z, qui ne sont pas situés sur la courbe C, et dans chacun des domaines D_k elle représente une fonction régulière $f_k(z)$. Pour les dérivées de ces fonctions, les formules ci-dessous sont valables:*

$$\frac{1}{n!} f_k^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t)}{(t - z)^{n+1}}\, dt \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Généralement parlant, le nombre de domaines D_k est arbitraire. Si C est une courbe *fermée* simple, ce nombre est égal à deux, et si C est une courbe *non fermée simple*, il est égale à l'unité.

10.44. Trouver les domaines D_k et les fonctions $f_k(z)$ pour les intégrales du type de Cauchy suivantes:

1. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - 2)(\zeta - z)}$. 2. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.

3. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)}$, $\displaystyle D : \left\{ |z| < 1,\ \left| z + \frac{2}{3} \right| > \frac{1}{3} \right\}$.

10.45. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $r < |\zeta - a| < R$. Montrer que l'intégrale du type de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = \varrho} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad r < \varrho < R$$

ne dépend pas de ϱ pour $|z| < r$ (ou pour $|z| > R$).

Indication. Voir le problème 10.10.

10.46. Soit $f(\zeta)$ une fonction régulière dans la couronne $r < |\zeta| < R$ et continue dans la couronne $r \leq |\zeta| \leq R$. Notons

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (|z| < R),$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (|z| > r)$$

(les circonférences sont parcourues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Montrer que, pour $r < |z| < R$, l'égalité $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ a lieu.

10.47. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $r < |z - a| < R$. Montrer que cette fonction peut être mise sous la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, où la fonction $f_1(z)$ est régulière dans le disque $|z - a| < R$, tandis que la fonction $f_2(z)$ est régulière pour $|z - a| > r$ et $f_2(\infty) = 0$.

10.48. Montrer que la représentation de la fonction $f(z)$ du problème précédent est unique.

Indication. Utiliser le théorème de Liouville (voir le problème 10.34).

10.49. Soit C_1 une courbe fermée simple qui borne un domaine fini D_1 et soit C_2 une courbe simple fermée contenue dans le domaine D_1 bornant un domaine fini $D_2 \subset D_1$. Montrer que toute fonction $f(z)$ régulière dans le domaine en forme de couronne $D = D_1 - \overline{D}_2$ peut être mise sous la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, où la fonction $f_1(z)$ est régulière dans le domaine D_1, tandis que la fonction $f_2(z)$ est régulière en dehors du domaine D_2. Montrer que cette représentation est unique à condition que $f_2(\infty) = 0$.

10.50. Soient C une courbe fermée simple bornant un domaine fini D et $\varphi(z)$ une fonction régulière dans un certain domaine contenant la courbe C. Montrer que, pour qu'une fonction $f(z)$ régulière dans la fermeture du domaine D et coïncidant avec la fonction $\varphi(\zeta)$ sur la courbe C existe, il faut et il suffit que

$$\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0 \quad (z \notin \overline{D}).$$

10.51. Soit C une courbe simple fermée lisse par morceaux bornant un domaine fini D et soit $\varphi(t)$ une fonction continue sur la courbe C. Montrer que, pour l'égalité

$$\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{t - z} dt \equiv 0 \quad (z \notin \overline{D}),$$

il faut et il suffit que

$$\int\limits_C t^n \varphi(t)\, dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

tandis que pour l'égalité

$$\int_C \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \equiv 0 \qquad (z \in D)$$

il faut et il suffit que

$$\int_C t^n \varphi(t)\,dt = 0 \qquad (n = -1,\ -2,\ \ldots).$$

10.52. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $-a < \operatorname{Im} z < a$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{f(z)}{z} \to 0 \ (z \to \infty, \quad |\operatorname{Im} z| < a), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\,dx < \infty.$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être mise sous la forme $f_1(z)+f_2(z)$, où la fonction $f_1(z)$ est régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > -a$ et satisfait à la condition

$$\frac{f_1 z}{z} \to 0 \ (z \to \infty, \quad \operatorname{Im} z \geq -a+\varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ arbitraire), tandis que la fonction $f_2(z)$ est régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z < a$ et satisfait à la condition

$$\frac{f_2(z)}{z} \to 0 \ (z \to \infty, \quad \operatorname{Im} z \leq a-\varepsilon)$$

($\varepsilon > 0$ arbitraire). Montrer également qu'une telle représentation est unique.

Indication. Mettre

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ia'-\infty}^{-ia'+\infty} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad \operatorname{Im} z > -a' > -a,$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ia'-\infty}^{ia'+\infty} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad \operatorname{Im} z < a' < a.$$

10.53. Soit $f(\zeta)$ une fonction régulière dans l'angle $-a < \operatorname{arc} \zeta < a$, $0 < a < \pi$, continue jusqu'à sa frontière et satisfaisant aux conditions

$$f(z) \to 0 \ (z \to \infty, \ |\arg z| \leq a), \qquad \int_0^{\infty} |f(x)|\, \frac{dx}{1+x} < \infty.$$

Notons

$$f_1(z) = \int_{\arg \zeta = -a} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad f_2(z) = \int_{\arg \zeta = a} f(z)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Montrer que:

1. La fonction $f_1(z)$ est régulière dans tout le plan des z présentant une coupure suivant la demi-droite $\arg z = -a$, tandis que la fonction $f_2(z)$ est

régulière dans tout le plan des z muni d'une coupure suivant la demi-droite $\arg z = a$.

2. En dehors de l'angle $|\arg z| \leq a$, l'égalité $f_1 = f_2$ a lieu.
3. A l'intérieur de l'angle $|\arg z| < a$, l'égalité $f_1 - f_2 = 2\pi i f$ a lieu.



10.54. Soit D la demi-bande $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| < \pi$, et soit $F(z)$ une fonction définie en dehors de D par l'égalité

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{e^{e^{\zeta}}}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \notin D).$$

Montrer que la fonction $F(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe.

10.55. Soit D le domaine $|z| > 1$, $|\arg z| < \frac{\pi}{\varrho}$, $\varrho > 1$, et soit $F(z)$ une fonction définie en dehors de D par l'égalité

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{e^{\zeta^{\varrho}}}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \notin \overline{D})$$

(pour ζ^{ϱ} on prend la détermination principale). Montrer que la fonction $F(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe.

10.56. Montrer que pour la fonction $F(z)$ du problème 10.54 (après la réalisation du prolongement), les formules asymptotiques ci-dessous sont valables:

$$F(z) \sim -1/z \qquad (z \to \infty,\ z \notin D),$$
$$F(z) = -1/z + e^{e^z} + O(1/z^2) \qquad (z \to \infty,\ z \in D).$$

10.57. Montrer que pour la fonction $F(z)$ du problème 10.55 (après la réalisation du prolongement), les formules asymptotiques ci-dessous sont valables:

$$F(z) \sim -\frac{1}{z} \Gamma\left(\frac{1}{\varrho} + 1\right) \sin\frac{\pi}{\varrho} \qquad (z \to \infty,\ z \notin D),$$

$$F(z) = -\frac{1}{z} \Gamma\left(\frac{1}{\varrho} + 1\right) \sin\frac{\pi}{\varrho} - e^{z^{\varrho}} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (z \to \infty,\ z \in D)$$

(pour z^{ϱ} on prend la détermination principale).

RÉPONSES

10.09.

1. $\frac{1}{a} e^{az} + C$. 2. $\frac{1}{a} \operatorname{sh} az + C$. 3. $\frac{1}{a} \operatorname{ch} az + C$. 4. $\frac{1}{a} \sin az + C$.
5. $-\frac{1}{a} \cos az + C$.

6. $e^{az}\dfrac{a\cos bz+b\sin bz}{a^2+b^2}+C.$ 7. $\dfrac{1}{a}\left(z-\dfrac{1}{a}\right)e^{az}+C.$

8. $\dfrac{z^2}{a}\operatorname{sh} az-\dfrac{2z}{a^2}\operatorname{ch} az+\dfrac{2}{a^3}\operatorname{sh} az+C.$ 9. $\dfrac{z}{a}\sin az+\dfrac{1}{a^2}\cos az+C.$

10.21.

$\sqrt{\pi}\exp(-\alpha^2/4).$

10.22.

$I_1=I_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$

10.23.

1. $2\pi\operatorname{sh}1.$ 2. 0. 3. $2\pi i\operatorname{sh}1.$ 4. 0. 5. $-\pi i/4.$ 6. $-\pi i\operatorname{ch}1.$ 7. *a)* $2\pi i$; *b)* $\pi i(2-e)$; *c)* $-\pi ie.$ 8. $-2\pi i(b-a)^{-n}.$

10.27.

$\pi(R^2-r^2)f(0).$

10.43.

Oui. Exemple : $f(z)=\dfrac{1}{z+i}e^{iz}.$

10.44.

1. $D_1 : \{|z|<1\}$, $f_1(z)=\dfrac{1}{2(z-2)}$; $D_2 : \{|z|>1\}$, $f_2(z)=\dfrac{1}{2z}.$

2. $D_1 : \left\{\left|\arg\dfrac{z-1}{z}\right|<\pi\right\}$, $f_1(z)=\dfrac{1}{2\pi}\arg\dfrac{z-1}{z}-\dfrac{i}{2\pi}\ln\left|\dfrac{1-z}{z}\right|.$

3. $D_1 : \left\{\left|z+\dfrac{2}{3}\right|<\dfrac{1}{3}\right\}$, $f_1(z)=-\dfrac{1}{2z}$; $D_2 : \{|z|>1\}$, $f_2(z)=-\dfrac{1}{2z}$;

$D_3 : \left\{|z|<1,\ \left|z+\dfrac{2}{3}\right|>\dfrac{1}{3}\right\}$, $f_3(z)=\dfrac{2z+5}{2(2z^2+5z+2)}.$

§ 11. Série de Taylor

Il est connu que chaque fonction $f(z)$ régulière dans un disque quelconque $|z-z_0|<R$ est développable en série entière

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

qui converge dans ce disque et dont les coefficients a_n sont déterminés par la formule

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \qquad (1)$$

où

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)(z-z_0)^{-n-1}\,dz, \qquad r<R. \qquad (2)$$

Cette série entière est appelée ***série de Taylor*** de la fonction $f(z)$ au voisinage du point $z=z_0$.

Ce n'est pas toujours que les formules (1) permettent de calculer avec succès les coefficients a_n. Les formules (2) y conviennent encore moins. Pour calculer d'une manière efficace les coefficients de la série de Taylor. on utilise certains artifices dont on va parler plus bas.

11.01. Par calcul direct de $f^{(n)}(0)$ démontrer les formules ci-dessous qui sont valables pour tous les z:

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. 2. $e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{az_0} \frac{a^n}{n!}(z-z_0)^n$.

3. $\operatorname{ch} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$. 4. $\operatorname{sh} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

5. $\sin az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. 6. $\cos az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

11.02. En s'appuyant sur le développement $e^{az} = \sum_{0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!}$, démontrer les formules suivantes:

1. $\cos \sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$.

2. $\frac{1}{4}(e^z + e^{-z} + 2\cos z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$.

3. $\frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-\frac{z}{2}} \cos \frac{z\sqrt{3}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.

4. $e^{z \operatorname{ctg} \alpha} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sin^n \alpha} \frac{z^n}{n!}$, $\alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

11.03. En s'appuyant sur le développement $\frac{1}{1-z} = \sum_{0}^{\infty} z^n$, qui est valable pour $|z| < 1$, démontrer les formules suivantes:

1. $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (|z| < 1)$.

2. $\frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n \quad (|z| < 1)$.

3. $\frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}} \quad (|z| < |a|,\ a \neq 0)$.

4. $\frac{1}{z^2+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-2n-2} z^{2n} \quad (|z| < |a|,\ a \neq 0)$.

5. $\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$.

6. $\frac{z^2+4z^4+z^6}{(1-z^2)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^{2n} \quad (|z| < 1)$.

7. $(1-z)^{-m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!} z^n \quad (m = 1, 2 \ldots)$.

11.04. Trouver le développement en série de Taylor au voisinage du point $z=0$ des fonctions ci-dessous:

1. $\frac{1}{(1+z)^2}$. 2. $\frac{1}{(1-z^2)^2}$.

3. $\frac{1}{(1+z^3)^2}$. 4. $\frac{1}{(1-z^6)^3}$.

En développant en série de Taylor des fonctions rationnelles, il est souvent utile de décomposer ces dernières en une somme de fractions plus simples (il n'est pas nécessaire d'arriver à la décomposition complète en fractions simples).

11.05. Effectuer le développement en série de Taylor au voisinage du point $z=0$ des fonctions rationnelles suivantes:

1. $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$. 2. $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$.

3. $\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$. 4. $\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$.

5. $\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

Dans certains cas, la fonction rationnelle peut être simplifiée en multipliant son numérateur et son dénominateur par un facteur convenablement choisi.

11.06. Effectuer le développement en série de Taylor au voisinage du point $z=0$ des fonctions suivantes:

1. $\frac{1}{1+z+z^2}$. 2. $\frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$.

3. $\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$. 4. $\frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$.

En développant en série de Taylor des combinaisons de fonctions exponentielles et trigonométriques, il est souvent utile de transformer la fonction intéressée en une combinaison de fonctions exclusivement exponentielles.

11.07. Effectuer le développement en série de Taylor au voisinage du point $z=0$ des fonctions ci-dessous:

1. $\sin^2 z$. 2. $\cos^3 z$. 3. $\sin^4 z+\cos^4 z$.

4. $\cos^2 z+\operatorname{ch}^2 z$. 5. $e^z \sin z$. 6. $\operatorname{ch} z\cdot\cos z$.

De l'analyse mathématique, on connaît les développements suivants :

1. $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad -1<x<1.$

2. $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}C_\alpha^n x^n, \quad -1<x<1.$

Ici, α est un nombre complexe arbitraire et

$$C_\alpha^n=\begin{cases}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, & n=1, 2, \ldots,\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

Les séries ci-dessus convergent non seulement pour les valeurs réelles de x dans l'intervalle $(-1, 1)$, mais aussi pour toutes valeurs complexes de z contenues dans le disque $|z|<1$. Pour les sommes de ces séries (et des séries semblables), nous allons conserver, dans le domaine complexe (dans le disque de convergence), les mêmes notations que celles adoptées pour les valeurs réelles de la variable. (L'argumentation stricte de ce qui vient d'être dit constitue le contenu du principe du prolongement analytique.)

11.08. En s'appuyant sur le développement taylorien de la fonction $(1+z)^\alpha$, démontrer les formules ci-dessous:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n} \quad (|z|<1).$

2. $\sqrt{1+z^2}=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}z^{2n} \quad (|z|<1).$

3. $\arcsin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z|<1).$

4. $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}.$

11.09. Démontrer les formules suivantes:

1. $\ln\dfrac{1+z}{1-z}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z|<1).$

2. $\operatorname{arctg} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z|<1).$

3. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} z+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+z}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{4n+1}}{4n+1} \quad (|z|<1).$

4. $\dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)=-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n(n+1)} \quad (|z|<1).$

11.10. Trouver le développement en série de Taylor au voisinage du point $z=z_0$ des fonctions suivantes:

1. $\operatorname{sh}\sqrt{z}\cdot\sin\sqrt{z}, \quad z_0=0.$ 2. $\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}, \quad z_0=0.$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^3}}, \quad z_0=0.$ 4. $\ln(1+z+z^2), \quad z_0=0.$

5. $\operatorname{ch} z, \quad z_0=1.$ 6. $\cos z, \quad z_0=\pi/4.$

7. $\dfrac{z}{(z+1)(2-z)}, \quad z_0=1.$ 8. $\dfrac{z^2-5}{z^2-4z+3}, \quad z_0=2.$

9. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{\dfrac{z-1}{2}}+\sqrt{\dfrac{z+1}{2}}\right)}{\sqrt{z-1}}, \quad z_0=1.$

* * *

Il y a encore un autre procédé très efficace de développement des fonctions en série de Taylor. Ce procédé consiste dans l'utilisation de la méthode des coefficients indéterminés cherchés à l'aide de telles où telles relations vérifiées par la fonction à développer. Le plus simple exemple d'application de ce procédé est fourni par le problème concernant la recherche des coefficients de la série de Taylor d'un rapport de deux fonctions dont les séries de Taylor sont connues.

11.11. En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouver les trois premiers termes différents de zéro du développement taylorien au voisinage du point $z=0$ des fonctions suivantes:

1. $\frac{z}{\ln(1+z)}$. 2. $\operatorname{tg} z$. 3. $\frac{z}{\operatorname{arctg} z}$.

4. $\frac{z}{\arcsin z}$. 5. $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$. 6. $e^{z\cos z}$.

11.12. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un certain voisinage du point $z=0$ liées par la relation $g(z)=\frac{f(z)}{1-\alpha z}$. Posons

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n.$$

Montrer que

$$b_0=a_0, \quad b_{n+1}-\alpha b_n=a_{n+1} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

11.13. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans un certain voisinage du point $z=0$ liées par la relation

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2-\ldots-\alpha_m z^m}.$$

Posons

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{0}^{\infty}b_n z^n.$$

Montrer que

$$b_n-\alpha_1 b_{n-1}-\ldots-\alpha_m b_{n-m}=a_n \quad (n=m,\ m+1,\ \ldots)$$

et que cette relation reste valable pour $n<m$ aussi si l'on considère les grandeurs $b_{-1}, \ldots, b_{-m}$ égales à zéro.

11.14. Soit $A(z)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n$ une fonction régulière dans un certain voisinage du point $z=0$. Montrer que

$$\frac{1}{A(z)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n,$$

où

$$a_n=\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \ldots & & \alpha_1 & -1 \\ \alpha_n & \ldots & & \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

11.15. Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Introduisons la notation suivante:

$$D_n(f)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Montrer que la fonction $f(z)$ est une fonction rationnelle si, et seulement si, tous les déterminants $D_n(f)$ à partir d'un certain numéro n_0 sont égaux à zéro.

11.16. Les nombres A_n, $n=0, 1, 2, \dots$, déterminés par les conditions

$$A_0=1,\ A_1=1,\ A_{n+2}=A_{n+1}+A_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

forment l'ainsi nommée *série de Fibonacci.*

1. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

2. Montrer que

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \quad n=0, 1, 2, \dots$$

La méthode des coefficients indéterminés est très utile si la fonction développée en série de Taylor vérifie une équation différentielle linéaire.

11.17. Trouver les développements tayloriens au voisinage du point $z=0$ des fonctions $f(z)$ ci-dessous qui sont régulières au point $z=0$ et satisfont aux conditions suivantes:

1. $f'(z)=f(z)$, $\quad f(0)=1$.
2. $(1+z^2)f'(z)=1$, $\quad f(0)=0$.
3. $f''(z)+\lambda^2 f(z)=0$, $\quad f(0)=0,\ f'(0)=\lambda$.
4. $f''(z)+zf(z)=0$, $\quad f(0)=1,\ f'(0)=0$.
5. $(1-z^2)f''(z)-zf'(z)=0$, $\quad f(0)=0,\ f'(0)=1$.
6. $f''(z)+\frac{1}{z}f'(z)+f(z)=0$, $\quad f(0)=1,\ f'(0)=0$.
7. $(1-z^2)f''(z)-5zf'(z)-4f(z)=0$, $\quad f(0)=1,\ f'(0)=0$.

11.18. En utilisant le fait que la fonction $f(z)=\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-z^2)f'(z)-zf(z)=1, \quad f(0)=0,$$

montrer que

$$\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}z^{2n+1}.$$

11.19. Démontrer les formules suivantes:

1. $$\left(\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\right)^2=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{z^{2n}}{n+1} \quad (|z|<1).$$

2. $\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+z)}{z}\right]^2 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)\frac{z^n}{n+2} \quad (|z|<1).$

3. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z\cdot\ln(1+z^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z|<1).$

Indication. Choisir convenablement les équations différentielles vérifiées par les fonctions développées en série.

11.20. Montrer que

$$e^{\lambda \arcsin z} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)(\lambda^2+4^2)\ldots(\lambda^2+4n^2)}{(2n+2)!}z^{2n+2} + \lambda z + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda^2+1^2)(\lambda^2+3^2)\ldots(\lambda^2+(2n-1)^2)}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

Indication. La fonction $f(z)=e^{\lambda\arcsin z}$ vérifie l'équation différentielle $(1-z^2)f''(z)-\lambda z f'(z)-\lambda^2 f(z)=0$.

11.21. Montrer que

1. $\cos(\lambda\arcsin z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)\ldots(\lambda^2-4n^2)}{(2n+2)!}\cdot(-1)^n z^{2n+2}.$

2. $\sin(\lambda\arcsin z) = \lambda z - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda^2-1^2)\ldots(\lambda^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n z^{2n+1}.$

3. $(\arcsin z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}z^{2n}.$

4. $\frac{\ln(z+\sqrt{1+z^2})}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$

5. $\sqrt{1+z^2}\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = z - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^{2n-1}(n-1)!n!}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$

6. $\frac{1}{12}(\arcsin z)^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2n+1)(n!)^2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}$

7. $\frac{1}{6}(\arcsin z)^4 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n((n-1)!)^2}{(2n)!}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}\right]z^{2n}.$

8. $[\ln(z+\sqrt{1+z^2})]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}\cdot(-1)^{n-1}z^{2n}.$

9. $(z+\sqrt{1+z^2})^\lambda = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)\ldots(\lambda^2+4n^2)}{(2n+2)!}\cdot z^{2n+2} + \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda^2+1^2)(\lambda^2+3^2)\ldots(\lambda^2+(2n-1)^2)}{(2n+1)!}\cdot z^{2n+1}.$

La méthode des coefficients indéterminés est aussi utile dans les cas où la fonction développée en série de Taylor vérifie des équations fonctionnelles d'un autre type et pas obligatoirement des équations différentielles.

11.22. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ satisfaisant aux conditions $f(z)=z+f(z^2)$, $f(0)=0$. Montrer que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}.$$

11.23. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ satisfaisant aux conditions $f(z)=(1+qz)f(q^2z)$, $f(0)=1$, où q, $|q|<1$, est un certain nombre fixé. Montrer que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}z^n \qquad (|z|<\infty).$$

11.24. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ vérifiant l'équation $f'(z)=f(qz)$, $f(0)=1$, où q est un certain nombre $|q|\leq 1$. Montrer que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}q^{n(n+1)/2}.$$



Les coefficients des séries de Taylor de beaucoup de fonctions très usuelles sont exprimés par l'intermédiaire de certaines suites de nombres spéciales.

Les *nombres de Bernoulli* B_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, sont déterminés par les relations

$$B_0=1,\ C_{n+1}^0B_0+C_{n+1}^1B_1+\ldots+C_{n+1}^nB_n=0 \qquad (n\geq 1),$$

et les *nombres d'Euler*, par les relations

$$E_0=1, \quad E_{2k+1}=0, \quad E_0+C_{2n}^2E_2+C_{2n}^4E_4+\ldots+C_{2n}^{2n}E_{2n}=0.$$

11.25. Montrer que

$$B_{2k+1}=0 \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

11.26. Montrer que

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n=\frac{z}{e^z-1} \qquad (|z|<2\pi).$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}=\frac{1}{\cos z} \qquad \left(|z|<\frac{\pi}{2}\right).$

11.27. Démontrer les formules suivantes:

1. $\displaystyle z\operatorname{ctg} z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n} \qquad (|z|<\pi).$
2. $\displaystyle \ln\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}B_{2n}}{n(2n)!}z^{2n} \qquad (|z|<\pi).$
3. $\displaystyle \operatorname{tg} z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(1-2^{2n})}{(2n)!}B_{2n}z^{2n-1} \qquad \left(|z|<\frac{\pi}{2}\right).$
4. $\displaystyle \frac{z}{\sin z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2-2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}z^{2n} \qquad (|z|<\pi).$
5. $\displaystyle \ln\cos z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n(2n)!}B_{2n}z^{2n} \qquad \left(|z|<\frac{\pi}{2}\right).$
6. $\displaystyle \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n+1)(2n)!}z^{2n+1} \qquad \left(|z|<\frac{\pi}{2}\right).$

11.28. Les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, sont déterminés par l'égalité

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n \qquad (|z|<2\pi).$$

Montrer que

1. $B_n(0)=B_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k B_k(x)=x^n, \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$.

* * *

Des fois, il est plus commode d'utiliser à la place de la série de Taylor la formule de Taylor à terme résiduel.

11.29. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine simplement connexe D contenant un point z_0. Montrer que, pour tout point $z \in D$, la formule ci-dessous est valable:

$$f(z)-f(z_0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=\frac{1}{n!}\int_{z_0}^{z}(z-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

11.30. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ et soit r un nombre satisfaisant à la condition $0<r<1$. Montrer que, pour tout couple de points z et ζ satisfaisant aux inégalités $|z|<R$, $|\zeta|<R$,

$$|z-\zeta|<\min\left((1-r)(R-|z|), \quad \left(\frac{1}{r}-1\right)(R-|\zeta|)\right),$$

la formule ci-dessous est valable :

$$f(z)-f(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(z-\zeta)^n}{(1-r)^n}[f^{(n)}(z)-r^n f^{(n)}(\zeta)].$$

11.31. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ et supposons que deux points z et ζ de ce disque satisfont à la condition

$$|z-\zeta|<R-\left|\frac{z+\zeta}{2}\right|.$$

Montrer que

$$f(z)-f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\zeta)^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)!}f^{(2n+1)}\cdot\left(\frac{z+\zeta}{2}\right).$$

RÉPONSES

11.04.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$. 2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{2n}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{3n}$. 4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}z^{4n}$.

11.05.

1. $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-2^{-n-1})z^n$. 2. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}+3^{-n-1})z^n$.

3. $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-4^{-n-1})z^{2n+1}$. 4. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z^{4n}+z^{4n-1})$.

5. $\frac{1}{25}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(5n+6+(-1)^n4^{-n-1})z^{2n}$.

11.06.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z^{3n}-z^{3n+1})$. 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{3n+2}z^{3n+2}-2^{3n}z^{3n})$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z^{8n}-z^{8n+1})$. 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^{8n}-z^{8n+1})$.

11.07.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$. 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}+3}{4}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

3. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n-2}}{(2n)!}z^{2n}$. 4. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n+1}}{(4n)!}z^{4n}$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{z^n}{n!}$. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n}\frac{z^{4n}}{(4n)!}$.

11.10.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(4n+2)!}z^{2n+1}$. 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n}$. 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z^{n+1}-z^{3n+3})$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\,1\cdot\frac{(z-1)^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{sh}\,1\cdot\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$.

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$. 7. $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^{n+1})(z-1)^n$.

8. $1-4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^{2n+1}$. 9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}\frac{(z-1)^n}{2n+1}$.

11.11.

1. $1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{12}+\ldots$ 2. $z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\ldots$

3. $1+\frac{z^2}{3}-\frac{4}{45}z^4$ 4. $1-\frac{z^2}{6}-\frac{17}{360}z^4+\ldots$

5. $1+2z+\frac{19}{6}z^2+\ldots$ 6. $1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots$

11.17.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

4. $1 - \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{z^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \ldots$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$.

§ 12. Suites de fonctions régulières. Intégrales dépendant d'un paramètre

Les problèmes qui suivent impliquent l'utilisation du *théorème de Weierstrass:*

La limite d'une suite de fonctions régulières dans un domaine D est aussi une fonction régulière dans le domaine D si cette suite converge uniformément dans ce domaine.

On considère connus les différents critères de convergence uniforme des suites de fonctions (voir § 6).

12.01. Démontrer la variante suivante du théorème de Weierstrass:

Soient $f_n(z)$ des fonctions régulières dans un domaine D et supposons que la suite $\{f_n(z)\}$ converge uniformément sur chaque ensemble fermé contenu dans le domaine D. Alors, la limite de la suite $\{f_n(z)\}$ est aussi une fonction régulière dans le domaine D. En outre, pour tout m, la suite $\{f_n^{(m)}(z)\}$ converge uniformément sur chaque ensemble fermé, contenu dans le domaine D, vers la dérivée $m^{\text{ième}}$ de la fonction limite de la suite $\{f_n(z)\}$.

12.02. Montrer que les sommes des séries ci-dessous sont régulières dans les domaines indiqués entre parenthèses :

1. $\sum_{0}^{\infty} \frac{\cos nz}{n!}$ $(|z| < \infty)$.

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \sin nz$ $(|\operatorname{Im} z| < 1)$.

3. $\sum_{1}^{\infty} \left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$ $(|z| < 1)$.

4. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(z-n)}$ $(z \neq 1, 2, \ldots)$.

5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}$ $(z \neq -1, -2, \ldots)$.

6. $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$ $(\operatorname{Re} z > 0)$.

7. $\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-n^2 z} n^n$ $(\operatorname{Re} z > 0)$.

8. $\sum_{0}^{\infty} e^{-z^2 \sqrt{n}}$ $(|\arg z| < \pi/4)$.

12.03. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante de nombres positifs et soit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}=\alpha>0,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n}=\varrho>0.$$

Montrer que la somme de la série

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$$

est régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>\alpha \ln \varrho$.

12.04. Montrer que les produits infinis ci-dessous représentent des fonctions régulières dans les domaines indiqués entre parenthèses :

1. $\prod_1^\infty(1-z^n)$ $(|z|<1)$. 2. $\prod_1^\infty(1+z^{2n}n^z)$ $(|z|<1)$.

3. $\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$ $(|z|<\infty)$. 4. $\prod_1^\infty\left(1+(-1)^n\cdot\frac{z}{n}\right)$ $(|z|<\infty)$.

5. $\prod_1^\infty\cos\frac{z}{n}$ $(|z|<\infty)$. 6. $\prod_1^\infty\operatorname{th}\frac{n^2}{z^2}$ $(|\arg z|<\pi/4)$.

12.05. Soient $\sum_1^\infty|c_k|$ une série convergente et $u(z)$ une fonction régulière dans un domaine D. Montrer que le produit infini

$$\prod_1^\infty(1+c_k u(z))$$

représente une fonction régulière dans le domaine D.

12.06. Supposons que les séries ci-dessous convergent :

$$\sum_1^\infty c_k,\ \sum_1^\infty c_k^2,\ \dots,\ \sum_1^\infty c_k^m,\ \sum_1^\infty |c_k|^{m+1}.$$

Montrer que le produit infini

$$\prod_1^\infty(1+c_n n^{-z})$$

représente une fonction régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$.

* * *

Dans les problèmes qui suivent, outre le théorème de Weierstrass (voir le début du présent paragraphe), il faut utiliser le théorème ci-dessous :

Soit C une courbe rectifiable dans le plan complexe des t et soit D un domaine du plan complexe des z. Si une fonction $\varphi(t, z)$ est définie et continue par rapport à l'ensemble des variables pour $t\in C$ et $z\in D$, et si en outre elle est régulière par rapport à z dans le domaine D pour tout $t\in C$, alors la fonction

$$f(z)=\int_C f(t, z)\,dt$$

est régulière dans le domaine D.

12.07. Montrer que les fonctions représentées par les intégrales ci-dessous sont régulières dans les domaines indiqués entre parenthèses :

1. $\int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+t^2}\,dt$ (Re $z>0$).

2. $\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ ($|z|<\infty$).

3. $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ (Re $z>0$).

4. $\int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{t^2+1}\,dt$ (Re $z<2$).

5. $\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t^2+1}\,dt$ ($0<$ Re $z<2$).

6. $\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)(1+e^{tz})}$ (Re $z>0$).

7. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{e^{2\pi itz}+1}$ (Im $z>0$).

8. $\int_0^1 t^z(1-t)^{1-z}\,dt$ ($-1<$ Re $z<2$).

9. $\int_0^1 \frac{\cos tz}{z+t}\,dt$ ($z\notin[-1,\ 0]$, $z\neq\infty$).

10. $\int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+z^2}$ (Re $z>0$).

12.08. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t\geq 0$ satisfaisant à la condition $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln|\varphi(t)|}{t}=\sigma$. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(t)e^{-tz}\,dt$ représente une fonction régulière dans le demi-plan Re $z>\sigma$.

12.09. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $-\infty<t<\infty$ satisfaisant aux conditions

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln|\varphi(t)|}{t}=\sigma_1,\quad \overline{\lim_{t\to-\infty}}\frac{\ln|\varphi(t)|}{t}=\sigma_2\ ;\quad \sigma_2>\sigma_1.$$

Montrer que l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{itz}\,dt$ représente une fonction régulière dans la bande $\sigma_1 < \operatorname{Im} z < \sigma_2$.

12.10. Trouver les domaines de régularité des fonctions représentées par les intégrales suivantes :

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t+z}\,dt, \quad |\varphi(t)| \leq M(1+t)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$

2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2-z^2}\,dt, \quad |\varphi(t)| \leq M.$

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{e^t+z}\,dt, \quad |\varphi(t)| \leq M(1+t)^m, \quad m < \infty.$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{e^t+z}\,dt, \quad |\varphi(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}.$

5. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t^3-z^3)^2}\,dt, \quad |\varphi(t)| \leq Mt^{\alpha}, \quad \alpha < 5.$

6. $\int\limits_0^{1} \frac{\varphi(t)}{t-z^3}\,dt, \quad |\varphi(t)| \leq Mt^{\alpha}, \quad \alpha > -1.$

7. $\int\limits_C \frac{e^{-t}}{t+z}\,dt \quad (C : \arg t = \alpha), \quad -\pi < \alpha < \pi.$

8. $\int\limits_C \frac{t^2\,dt}{e^t+z} \quad (C : \arg t = \alpha), \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$

9. $\int\limits_C \frac{\cos t}{e^t-z}\,dt \quad \left(C : \left\{\arg t = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq |t| \leq \pi\right\}\right).$

Dans beaucoup de circonstances, le *principe de compacité des familles de fonctions régulières* joue un rôle important :

Si les fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots$ sont régulières dans un domaine D et satisfont aux conditions

$$|f_n(z)| \leq M \quad (z \in D, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

alors, de la suite $\{f_n(z)\}$ on peut tirer une certaine sous-suite $\{f_{n_k}(z)\}$ qui converge uniformément dans chaque partie fermée du domaine D.

Dans les problèmes qui suivent, on propose au lecteur d'obtenir certaines généralisations et modifications du principe de compacité en s'appuyant sur ce dernier.

12.11. Soient $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, des fonctions régulières dans un domaine D et uniformément bornées (par rapport à n) sur chaque ensemble fermé

contenu dans le domaine D. Montrer que de la suite $\{f_n(z)\}$ on peut tirer une sous-suite $\{f_{n_k}(z)\}$ qui converge uniformément sur chaque ensemble fermé contenu dans le domaine D (la suite de numéros $\{n_k\}$ est choisie la même pour tous les ensembles).

12.12. Soient $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, des fonctions régulières dans le disque $|z|<1$ satisfaisant aux conditions

$$|f_n(z)| \leq M(1-|z|)^{-m} \qquad (|z|<1,\ n=1,\ 2,\ \ldots),$$

où les nombres M et m ne dépendent pas de n. Montrer que de la suite $\{f_n(z)\}$ on peut tirer une sous-suite $\{f_{n_k}(z)\}$ qui converge uniformément dans chaque disque $|z| \leq r < 1$.

12.13. Soit ∂D la frontière d'un domaine borné D constituée par un nombre fini de courbes simples lisses par morceaux, et soient $\varphi_n(\zeta)$ des fonctions définies et continues sur cette frontière ∂D. Montrer que, si la suite $\{\varphi_n(\zeta)\}$ est uniformément bornée sur ∂D, alors, de la suite de fonctions $\{f_n(z)\}$, $f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{\varphi_n(\zeta)}{(\zeta-z)^k}d\zeta$ (k est un entier fixé) on peut tirer une sous-suite $\{f_{n_k}(z)\}$ uniformément convergente sur chaque ensemble fermé contenu dans le domaine D.

12.14. Soient $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, des fonctions régulières dans un domaine D satisfaisant aux conditions $\operatorname{Re} f_n(z) \geq 0$ ($z \in D$, $n=1,\ 2,\ \ldots$). Montrer que de la suite $\{f_n(z)\}$ on peut tirer une sous-suite $\{f_{n_k}(z)\}$ qui converge uniformément dans chaque partie fermée du domaine D (il est possible qu'elle converge vers l'infini).

12.15. Soient $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, des fonctions régulières et uniformément bornées dans un domaine D. Montrer que, si la suite $\{f_n(z)\}$ converge sur l'ensemble E, qui a au moins un point limite dans le domaine D, alors elle converge uniformément dans chaque partie fermée du domaine D *(théorème de Vitali)*.



La majeure partie des théorèmes concernant les suites de fonctions régulières est applicable aux suites de fonctions harmoniques.

12.16. Soient $u_n(x, y)$, $n=1, 2, \ldots$, des fonctions harmoniques dans un domaine D, et soit $\{u_n(x, y)\}$ une suite uniformément convergente vers la fonction $u(x, y)$ dans le domaine D. Montrer que la fonction $u(x, y)$ est harmonique dans le domaine D.

Indication. Examiner la suite $\{u_n(x, y)\}$ dans chaque partie simplement connexe du domaine D. On peut y construire des fonctions régulières $f_n(z)$ pour lesquelles $\operatorname{Re} f_n(x+iy)=u_n(x, y)$.

12.17. Soient $u_n(x, y)$, $n=1, 2, \ldots$, des fonctions harmoniques dans un domaine D satisfaisant aux conditions

$$|u_n(x,\ y)| \leq M \qquad ((x,\ y) \in D,\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Montrer que de la suite $\{u_n(x, y)\}$ on peut tirer une sous-suite $\{u_{n_k}(x, y)\}$ qui converge uniformément dans chaque partie fermée du domaine D.

12.18. Soient $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$, des fonctions harmoniques dans un domaine D satisfaisant aux conditions

$$u_{n+1}(x, y) \geq u_n(x, y) \quad ((x, y) \in D, \; n = 1, 2, \dots).$$

Montrer que la suite $\{u_n(x, y)\}$ converge uniformément dans chaque partie fermée du domaine D (il est possible qu'elle converge vers $+\infty$).

12.19. Soient $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, des fonctions régulières dans un domaine D qui ne s'annulent pas dans ce domaine et qui satisfont aux inégalités

$$|f_n(z)| \leq M^n \quad (z \in D, \; n = 1, 2, \dots)$$

(la constante M ne dépend pas de n). Montrer que de la suite $\{\sqrt[n]{|f_n(z)|}\}$ on peut tirer une sous-suite qui converge uniformément dans chaque partie fermée du domaine D vers une fonction $|g(z)|$, où $g(z)$ est une fonction régulière dans le domaine D.

12.20. Soit $\sum_0^\infty c_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est R, $0 < R < \infty$. Montrer que, pour chaque point $z_0 = Re^{i\varphi}$, il existe des suites $\{n_k\}$ et $\{z_k\}$ telles que

$$\lim_{k \to \infty} z_k = z_0 \; ; \quad \sum_{n=0}^{n_k} c_n z_k^n = 0.$$

Indication. Voir les problèmes 12.19 et 12.15.

RÉPONSES

12.10.

1. Tout le plan des z présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif.
2. Tout le plan des z présentant des coupures suivant les demi-droites $[-\infty, -1]$ et $[1, +\infty]$.
3. Tout le plan des z présentant une coupure suivant la demi-droite $[-\infty, -1]$.
4. Tout le plan des z présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif
5. Tout le plan des z présentant des coupures suivant les demi-droites

$$[1, +\infty], \; [\arg z = 2\pi/3, \; |z| > 1], \; [\arg z = -2\pi/3, \; |z| > 1].$$

6. Tout le plan des z (le point $z = \infty$ compris) présentant des coupures suivant les segments de droites joignant le point $z = 0$ aux points $z = 1$, $z = e^{2\pi i/3}$, $z = e^{-2\pi i/3}$.
7. Tout le plan des z présentant une coupure suivant la demi-droite $\arg z = \alpha + \pi$.
8. Tout le plan des z présentant une coupure suivant la spirale donnée par l'équation

$$z = -se^{i \operatorname{tg} \alpha \cdot \ln s}, \quad 1 \leq s < \infty.$$

9. Tout le plan des z (le point $z = \infty$ compris) présentant une coupure suivant la demi-circonférence supérieure $|z| = 1$.

§ 13. Théorème d'unicité. Prolongement analytique

Les problèmes qui suivent nécessitent l'utilisation du *théorème d'unicité* :

Si une fonction $f(z)$ est régulière dans un domaine D et si elle s'annule sur un ensemble E, qui a au moins un point limite dans le domaine D, alors $f(z) \equiv 0$.

13.01. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\overline{D}$ d'un domaine D. Montrer que le domaine D ne contient qu'un nombre fini de solutions de l'équation $f(z) = a$ (pour une valeur arbitraire fixée de a).

13.02. Soit $f(z)$ une fonction régulière au point $z=z_0$. Montrer que la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\ln |f(z)-f(z_0)|}{\ln |z-z_0|}$ existe et qu'elle est égale à un entier positif.

13.03. Est-ce qu'il existe une fonction $f(z)$ régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ satisfaisant à l'une des conditions énumérées plus bas ($n=1, 2, \ldots$) ?

1. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin\frac{\pi n}{2}$.
2. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cos\pi n$.
3. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$.
4. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\cos^2\pi n}{2n+1}$.
5. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+\cos\pi n}$.
6. $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$.
7. $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$.
8. $f\left(\frac{1}{n}\right)=e^{-n}$.
9. $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<e^{-n}$.
10. $2^{-n}<\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<2^{1-n}$.
11. $n^{-5/2}<\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<2n^{-5/2}$.
12. $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{\cos\pi n}{2n+1}\right|<\frac{1}{n^2}$.

13.04. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine D y vérifiant l'équation différentielle $f'(z)=P(z, f(z))$, où $P(z, w)$ est un polynôme à ses indéterminées. Montrer que, si en un certain point $z_0\in D$ l'égalité $f_1(z_0)=f_2(z_0)$ a lieu, alors $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

13.05. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine D y vérifiant l'équation différentielle

$$f^{(m)}(z)=P(z, f, f', \ldots, f^{(m-1)}),$$

où P est un polynôme à ses indéterminées. Montrer que, si en un certain point $z_0\in D$ les égalités

$$f_1(z_0)=f_2(z_0), \ \ldots, \ f_1^{(m-1)}(z_0)=f_2^{(m-1)}(z_0)$$

ont lieu, alors $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

13.06. Montrer que l'équation fonctionnelle $f(z)=f(2z)$ n'a pas de solutions régulières au point $z=0$ et non identiquement constantes.

13.07. Soit $q = e^{2\pi i\alpha}$, où α est un nombre irrationnel. Montrer que l'équation fonctionnelle $f(z) = f(qz)$ n'a pas de solutions $f(z)$ régulières pour $1/2 < |z| < 2$ et non identiquement constantes.

13.08. Soit $f(z)$ une fonction périodique régulière dans un certain domaine contenant le point $z = \infty$. Montrer que $f(z) = \text{const}$ dans tout le domaine de régularité.

* * *

Soit $f(z)$ une fonction définie sur un certain ensemble E et soit $F(z)$ une fonction définie et régulière dans un certain domaine D contenant l'ensemble E. Si sur l'ensemble E l'égalité $f(z) = F(z)$ a lieu, alors la fonction $F(z)$ est appelée *prolongement analytique* de la fonction $f(z)$ de l'ensemble E dans le domaine D.

Le *principe du prolongement analytique* est immédiat d'après le théorème d'unicité :

Si un ensemble E possède au moins un point limite situé dans un domaine D, alors il ne peut exister plus d'un prolongement analytique d'une fonction f(z) de l'ensemble E dans le domaine D.

La question concernant l'existence, pour une fonction donnée $f(z)$ définie sur tel ou tel ensemble, d'un prolongement analytique dans un domaine plus étendu est assez compliquée et les méthodes de résolution sont extrêmement variées.

13.09. Montrer que les fonctions e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, définies initialement seulement pour les valeurs réelles de la variable, peuvent être prolongées analytiquement dans tout le plan complexe en les développant en série de Taylor.

En combinant un polynôme et une fonction exponentielle (où bien des fonctions trigonométriques), on peut obtenir le prolongement analytique depuis l'axe réel pour toute une série de fonctions élémentaires.

13.10. Trouver le domaine le plus étendu dans lequel on peut prolonger analytiquement depuis l'axe réel les fonctions suivantes :

1. $\operatorname{tg} z$. 2. $\operatorname{ctg} z$. 3. $\operatorname{th} z$. 4. $e^{1/\cos z}$.
5. $e^{-\operatorname{tg} z}$. 6. $\sin(\operatorname{th} z)$. 7. $\cos(e^{z^2})$.
8. $\operatorname{th}(e^z)$. 9. $\operatorname{ctg}(\operatorname{ch} z)$.

13.11. Montrer que la fonction $\ln z$ définie pour les valeurs positives de z peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif, et, en désignant ce prolongement analytique par le symbole $(\ln z)$, obtenir la formule

$$(\ln z) = \ln|z| + i \arg z \quad (|\arg z| < \pi).$$

Indication. Utiliser la formule $\ln z = \int_1^z \frac{dt}{t}$ qui est valable pour tous les z positifs.

13.12. Soit α un nombre réel arbitraire. Montrer que la fonction z^α, définie pour les z positifs, peut être prolongée analytiquement dans tout

le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif, et, en désignant ce prolongement analytique par le symbole (z^α), obtenir la formule

$$(z^\alpha)=|z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \quad (|\arg z|<\pi).$$

Indication. Utiliser la formule $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ qui est valable pour tous les z positifs.

13.13. Soit $0<\alpha<1$. Montrer que pour z situé en dehors du demi-axe réel négatif, on a

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+z}\,dt=(z^{\alpha-1})\cdot A,$$

où $A=\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt$, le symbole (z^α) étant défini dans le problème 13.12.

13.14. Soit $0<\alpha<2$. Montrer que pour $\operatorname{Re} z>0$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t^2+z^2}\,dt=(z^{\alpha-2})\cdot A,$$

et pour $\operatorname{Re} z<0$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t^2+z^2}\,dt=((-z)^{\alpha-2})\cdot A,$$

où $A=\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t^2+1}\,dt$, le symbole (z^α) étant défini dans le problème 13.12.

13.15. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+z^2}\,dt=\frac{1}{z}\left((\ln z)\cdot A+B\right) \qquad (\operatorname{Re} z>0)$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+z^2}\,dt=\frac{1}{z}\left((\ln(-z))\cdot A+B\right) \qquad (\operatorname{Re} z<0),$$

où $A=\frac{\pi}{2}$, $B=\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$, le symbole $(\ln z)$ étant défini dans le problème 13.11.

*   *   *

Pour le prolongement analytique, on utilise souvent un théorème formulé dans le problème qui suit.

13.16. Soit $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction définie, lorsque

$$z_k \in D_k \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

et régulière par rapport à chaque variable z_k dans le domaine D_k, toutes les autres variables étant arbitrairement fixées. Montrer que, si chaque domaine D_k contient un intervalle non vide (a_k, b_k) de l'axe réel et si

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad (z_1 \in (a_1, b_1), \ldots, z_n \in (a_n, b_n)),$$

alors $\Phi(z_1, \ldots, z_n) \equiv 0$.

13.17. En s'appuyant sur la validité des formules ci-dessous pour les valeurs réelles des variables, montrer qu'elles restent aussi valables pour des valeurs complexes arbitraires de ces variables :

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
2. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
3. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.
4. $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$.
5. $\sin (z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.
6. $\operatorname{ch} (z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.
7. $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$.
8. $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$.

13.18. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain domaine, qui contient le segment $[0, 1]$, satisfaisant à la condition $f(z+1) = f(z)$. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans une certaine bande $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$, $\delta > 0$.

13.19. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain domaine, contenant le segment $[0, 1]$, et supposons qu'elle satisfasse à la condition

$$f(z+1) = azf(z) + p(z),$$

où $p(z)$ est un polynôme. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans une certaine bande $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$.

13.20. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain domaine contenant le segment $[1, 2]$, et supposons qu'elle satisfasse à la condition

$$f(2z) = af(z) + p(z),$$

où $p(z)$ est un polynôme. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans un certain angle $-\delta < \arg z < \delta$, $\delta > 0$.

13.21. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\varrho < |z| < 1$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f(z) = af(z^2) + g(z)$, où $g(z)$ est une certaine fonction donnée régulière dans le disque $|z| < 1$. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans la couronne $0 < |z| < 1$.

13.22. La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définie pour $z > 0$ par l'égalité

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt.$$

Montrer que la fonction $\Gamma(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe à l'exception des points $z = 0, -1, -2, \ldots$

Indication. Montrer que la fonction $\Gamma(z)$ vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

13.23. La fonction bêta d'Euler $B(z, \zeta)$ est définie pour $z>0$ et $\zeta>0$ par l'égalité

$$B(z, \zeta)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}\,dt.$$

Montrer que la fonction $B(z, \zeta)$ peut être prolongée analytiquement par rapport à chacune des variables dans tout le plan complexe à l'exception des points $z=0, -1, -2, \ldots$ (respectivement $\zeta=0, -1, -2, \ldots$).

Indication. Montrer que la fonction $B(z, \zeta)$ vérifie les équations fonctionnelles

$$B(z, \zeta)=B(\zeta, z), \qquad B(z+1, \zeta)=\frac{z}{z+\zeta}B(z, \zeta).$$

* * *

La majorité des procédés de prolongement analytique est liée au théorème de Cauchy concernant l'indépendance de l'intégrale du chemin d'intégration. Ces procédés sont principalement appliqués aux fonctions représentées par telles où telles intégrales.

13.24. Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction régulière dans la couronne $r\le|\zeta|\le R$. Montrer que la fonction $f(z)$ donnée dans le disque $|z|<r$ à l'aide de la formule

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}(\zeta-z)^m\varphi(\zeta)\,d\zeta \quad (|z|<r)$$

(m est un entier) peut être prolongée analytiquement dans le disque $|z|<R$ et que ce prolongement analytique $F(z)$ est donné par la formule

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}(\zeta-z)^m\varphi(\zeta)\,d\zeta \quad (|z|<R).$$

13.25. Montrer que les fonctions ci-dessous peuvent être prolongées analytiquement dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $f(z)=\displaystyle\int_{|\zeta|=1} e^{a\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\ (|z|<1);$ $\qquad (D:\ |z|<\infty).$

2. $f(z)=\displaystyle\int_{|\zeta|=1} e^{a\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\ (|z|>1);$ $\qquad (D:\ |z|>0).$

3. $f(z)=\displaystyle\int_{|\zeta|=2} \frac{\cos\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2+1}\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}\ (|z|<2);$ $\qquad (D:\ |z|<\infty).$

4. $f(z)=\int\limits_{|\zeta|=2}\frac{\cos\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}$ $(|z|>2)$; $(D: z\neq 0,\ i,\ -i)$.

5. $f(z)=\int\limits_{|\zeta|=1}\operatorname{sh}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2+z^2}$ $(|z|<1)$; $(D: |z|<\infty)$.

6. $f(z)=\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{e^{-1/\zeta}}{\operatorname{ch}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta^2+z^2}$ $(|z|<1)$; $\left(D: z\neq\pm\frac{\pi i}{2},\ \pm\frac{3\pi i}{2},\ \ldots\right)$.

13.26. Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction régulière dans la bande $-a\leq\operatorname{Re}\zeta\leq 0$ satisfaisant à la condition

$$|\varphi(\zeta)|\leq M(1+|\zeta|)^{-\alpha},\ \alpha>0\ (-a\leq\operatorname{Re}\zeta\leq 0).$$

Montrer que la fonction

$$f(z)=\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\qquad(\operatorname{Re}z>0)$$

admet un prolongement analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re}z>-a$ et que ce prolongement analytique $F(z)$ est donné par la formule

$$F(z)=\int\limits_{-a-i\infty}^{-a+i\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\qquad(\operatorname{Re}z>-a).$$

13.27. Montrer que, pour le prolongement analytique $F(z)$ construit dans le problème 13.26, la formule ci-dessous est valable :

$$F(z)=\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-2\pi i\varphi(z)\qquad(-a\leq\operatorname{Re}z<0).$$

Indication. Utiliser la formule intégrale de Cauchy.

13.28. Montrer que les fonctions suivantes peuvent être prolongées analytiquement dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\zeta}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $(D: \operatorname{Im}z>-1)$.

2. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2\operatorname{ch}\zeta}$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $\left(D: \operatorname{Im}z>-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\zeta^2}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^4}$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $(D: |z|<\infty)$.

4. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ia\zeta^2}}{\zeta-z}d\zeta$, $a>0$ $(\operatorname{Im}z>0)$; $(D: |z|<\infty)$.

5. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(z-\zeta)^2\operatorname{ch}\zeta}$ $\qquad (\operatorname{Im} z<0)$; $\left(D\ :\ \operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}\right)$.

6. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(z-\zeta)\operatorname{ch}\zeta}$ $\qquad (\operatorname{Im} z>0)$; $\left(D\ :\ z\neq-\frac{\pi i}{2},\ -\frac{3\pi i}{2},\ \ldots\right)$.

13.29. Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction régulière et bornée dans l'angle $|\arg\zeta|\leq\alpha<\pi/2$. Montrer que la fonction $f(z)$ définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ par l'égalité

$$f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2+z^2}\,d\zeta$$

peut être prolongée analytiquement dans l'angle $|\arg z|<\frac{\pi}{2}+\alpha$.

Indication. Tourner le contour à intégration.

13.30. Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction régulière et bornée dans l'angle $|\arg\zeta|\leq\alpha<\pi/2$. Montrer que la fonction $f(z)$ définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ par l'égalité

$$f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\zeta)e^{-\zeta z}\,d\zeta$$

peut être prolongée analytiquement dans l'angle $|\arg z|<\frac{\pi}{2}+\alpha$.

13.31. Montrer que les fonctions suivantes peuvent être prolongées analytiquement dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{1+\zeta^2}\,d\zeta$; $\qquad (D\ :\ |\arg z|<\pi)$.

2. $f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{1+\zeta^4}\,d\zeta$; $\qquad \left(D\ :\ |\arg z|<\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. $f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{\operatorname{ch} a\zeta}\,d\zeta,\quad a>0$; $\qquad (D\ :\ |\arg(z+a)|<\pi)$.

4. $f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-z\zeta^2}}{1+\zeta^4}\,d\zeta$; $\qquad (D\ :\ |\arg z|<\pi)$.

5. $f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-z\zeta^m}\operatorname{ch}\zeta\,d\zeta,\quad m=2,\ 3,\ \ldots$; $\qquad (D\ :\ |\arg z|<\pi)$.

6. $f(z)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\zeta}{1+\zeta^2}e^{-z\zeta}\,d\zeta$; $\qquad (D : z\notin\{\operatorname{Re} z\leq 0,\ |\operatorname{Im} z|\leq 1\})$.

7. $f(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)(1+e^{z\zeta})}$; $\quad (D\ :\ |\arg z|<\pi)$.

8. $f(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\zeta^2}\,d\zeta}{1+e^{z\zeta}}$; $\quad \left(D\ :\ |\arg z|<\frac{3\pi}{4}\right)$.

9. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-z\zeta}}{(1+\zeta^2)\,\mathrm{ch}\,\zeta}\,d\zeta$; $\quad (D : z\notin[-\infty,\ -1],\ z\notin[1,\ +\infty])$.

10. $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ia\zeta^2}}{\mathrm{ch}\,\zeta}\,e^{-z\zeta}$, $\quad a>0$;

$(D\ :\ z\notin\{\mathrm{Re}\,z\geq 1,\quad \mathrm{Im}\,z\geq 0\},\quad z\notin\{\mathrm{Re}\,z\leq -1,\quad \mathrm{Im}\,z\leq 0\})$.

13.32. Montrer que pour tout α, la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}z^n$, definie par cette série dans le disque $|z|<1$, peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant la demi-droite $[1,\ \infty]$.

Indication. En utilisant la formule $n^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-nt}\,dt$, mettre la somme de la série sous la forme d'une intégrale.

13.33. Montrer que l'assertion du problème 13.32 reste vraie également pour les sommes des séries

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{-\alpha}\ln n\cdot z^n,\quad \sum_{n=2}^{\infty}n^{-\alpha}(\ln n)^2z^n.$$

* * *

Parfois, en effectuant telles ou telles transformations des séries ou des intégrales, on arrive à obtenir des séries ou des intégrales ayant un autre domaine de convergence. Cette circonstance permet souvent de réaliser un prolongement analytique.

13.34. Soit $\varphi(t)$ une fonction régulière dans le disque $|t|<1$, et supposons que $\varphi(t)=\sum\limits_0^{\infty}c_nt^n$ et que la série $\sum\limits_0^{\infty}c_n$ converge. Montrer que la fonction $f(z)$, définie pour $\mathrm{Re}\,z>0$ par la formule

$$f(z)=\int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt,$$

peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe à l'exception des points $z=0,\ -1,\ -2,\ \dots$, et que ce prolongement est donné par la formule $f(z)=\sum\limits_0^{\infty}\frac{c_n}{n+z}$.

13.35. Montrer que les fonctions $F(z)$ donnent le prolongement analytique des fonctions $f(z)$:

1. $f(z)=\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt,\qquad F(z)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$

2. $f(z)=\int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{t^2+1}\,dt,\qquad F(z)=\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{z-2n}.$

3. $f(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha tz}}{e^{-t}+1}\,dt,\quad \alpha>0;\qquad F(z)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+\alpha z}.$

4. $f(z)=\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t+1}\,dt,\qquad F(z)=\sum_{-\infty}^\infty \frac{(-1)^n}{z-n}.$

5. $f(z)=\int_0^\infty \frac{te^{-tz}}{1-e^{-t}}\,dt,\qquad F(z)=\sum_0^\infty \frac{1}{(n+z)^2}.$

6. $f(z)=\int_1^\infty \left(\frac{\ln t}{1-t}\right)^2 t^{1-z}\,dt,\qquad F(z)=2\sum_0^\infty \frac{n+1}{(n+z)^3}.$

13.36. Montrer que la somme de la série

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty \frac{1}{n+z}\cdot\frac{z(z+1)\ldots(z+n-1)}{n!}\qquad(\mathrm{Re}\,z<1)$$

peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe, à l'exception des points $z=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, et que, pour $\mathrm{Re}\,z>0$, ce prolongement est donné par la formule

$$F(z)=-\frac{1}{z}+\sum_1^\infty \frac{1}{n-z}\,\frac{(1-z)(2-z)\ldots(n-z)}{n!}.$$

Indication. Montrer que, pour $0<\mathrm{Re}\,z<1$, la somme des deux séries est égale à l'intégrale $\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt$.

13.37. Soient $\Gamma(z)$ la fonction gamma d'Euler et $\mathrm{B}(z,\zeta)$ la fonction bêta d'Euler (voir les problèmes 13.22 et 13.23) Montrer que

$$\mathrm{B}(z,\zeta)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}.$$

Indication. Pour $z>0$ et $\zeta>0$, calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}x^{2z-1}y^{2\zeta-1}\,dx\,dy$$

par deux méthodes : comme produit d'intégrales par rapport à x et par rapport à y, et par passage aux coordonnées polaires.

13.38. En s'appuyant sur la formule $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ (voir le problème repéré 5.30), montrer que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Indication. Voir le problème 13.37 et n° 4 du problème 13.35.

RÉPONSES

13.03.

1. Non. 2. Non. 3. Oui. 4. Oui. 5. Non. 6. Oui. 7. Non. 8. Non. 9. Oui. 10. Non. 11. Non. 12. Non.

13.10.

1. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. Tout le plan, sauf les points $z = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi i}{2}(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
6. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi i}{2}(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
7. Tout le plan.
8. Tout le plan, sauf les points $z = \ln \left|\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right| + 2\pi i m + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
9. Tout le plan, sauf les points $z = \frac{\pi i}{2}(2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $z = \pm \ln\left(\pi n + \sqrt{\pi^2 n^2 - 1}\right) + 2\pi i m$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 14. Principe du maximum

Les problèmes qui suivent impliquent l'utilisation du principe du module maximum formulé comme suit :

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et soit $M = \sup_{z \in D} |f(z)|$. Alors, ou bien en chaque point intérieur au domaine D l'inégalité $|f(z)| < M$ a lieu, ou bien $f(z) \equiv M e^{i\varphi}$, où φ est un entier réel constant.

14.01. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D. Montrer que, si pour toute suite de points $z_n \in D$, qui converge vers un point quelconque de la frontière du domaine D, l'inégalité $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(z_n)| \leq M$ a lieu, alors, en chaque point intérieur au domaine D l'inégalité $|f(z)| < M$ est vérifiée, ou bien $f(z) \equiv M e^{i\varphi}$.

14.02. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z| < 1$ y vérifiant l'inégalité $|f(z)| < M$. Montrer que, si $f(0) = 0$, la fonction $f(z)$ satisfait aussi à une inégalité plus forte $|f(z)| \leq M|z|$ dans le disque $|z| < 1$, et, dans ce cas,

si en au moins un point z_0, $0<|z_0|<1$, l'égalité $|f(z_0)|=M|z_0|$ est vérifiée, alors $f(z)=Mze^{i\varphi}$, où φ est une constante réelle (*lemme de Schwarz*).

Indication. Examiner la fonction $f(z)/z$ et montrer qu'elle peut être prolongée analytiquement au point $z=0$.

14.03. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ y satisfaisant à l'inégalité $|f(z)|<M$ et soit $f(0)=0$. Montrer que $|f'(0)|\leq M/R$ et que le signe d'égalité n'est possible que pour la fonction $f(z)=Me^{i\varphi}\cdot\frac{z}{R}$.

14.04. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ y satisfaisant à l'inégalité $|f(z)|<M$ et s'annulant en un certain point z_0 de ce disque. Montrer les inégalités ci-dessous :

$$|f(z)|\leq M\frac{R|z-z_0|}{|R^2-z\bar{z}_0|}\quad(|z|<R);\qquad |f'(z_0)|\leq\frac{MR}{R^2-|z_0|^2}.$$

14.05. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $|\operatorname{Re} z|<\pi/4$ y satisfaisant à l'inégalité $|f(z)|<1$ et s'annulant au point $z=0$. Montrer que $|f(z)|\leq|\operatorname{tg} z|$ dans cette bande.

14.06. Soit $f(x)$ une fonction régulière pour $\operatorname{Re} z>0$ y satisfaisant à l'inégalité $|f(z)|<1$ et s'annulant aux points $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Montrer que

$$|f(z)|\leq\frac{|z-z_1|\,|z-z_2|\ldots|z-z_m|}{|z+\bar{z}_1|\,|z+\bar{z}_2|\ldots|z+\bar{z}_m|}\qquad(\operatorname{Re} z>0).$$

14.07. Soit $f(z)$ une fonction régulière et bornée dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ s'annulant dans la suite de points $\{z_n\}$, $z_n\to\infty$, de ce demi-plan. Montrer que ou bien $f(z)\equiv 0$, ou bien la série $\sum\operatorname{Re}\frac{1}{z_n}$ converge.

14.08. Soit $f(z)$ une fonction régulière et bornée dans le disque $|z|<R$ s'annulant dans la suite de points $\{z_n\}$ de ce disque. Montrer que ou bien $f(z)\equiv 0$, ou bien la série $\sum(R-|z_n|)$ converge.

Indication. Voir le problème repéré 14.04.

14.09. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<1$ y satisfaisant à l'inégalité $|f(z)|<M$ et soit $f(0)=w_0$, $|w_0|<M$. Montrer l'inégalité

$$\frac{|f(z)-w_0|}{|M^2-f(z)\bar{w}_0|}\leq\frac{|z|}{M}\qquad(|z|<1).$$

14.10. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ satisfaisant aux inégalités $|f(z)|<M$, $|f(0)|=m<M$. Montrer l'inégalité

$$|f(z)|\leq M\frac{M|z|+mR}{MR+m|z|}\qquad(|z|<R).$$

14.11. Soit $P(z)$ un polynôme de degré n et soit $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|P(z)|$. Montrer que, pour $0<r_1<r_2$, l'inégalité

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n}\geq\frac{M(r_2)}{r_2^n},$$

a lieu et que le signe d'égalité pour au moins un couple de valeurs de r_1 et r_2 n'est possible que pour un polynôme de la forme $P(z)=az^n$.

14.12. Soit $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$. Montrer qu'en au moins un point de la circonférence $|z|=1$ l'inégalité $|P(z)|>1$ a lieu, ou $P(z)\equiv z^n$.

14.13. Soit $P(z)$ un polynôme de degré n satisfaisant à l'inégalité $|P(z)|\leq M$ dans l'intervalle $(-1, 1)$. Montrer qu'en chaque point z_0 extérieur à cet intervalle l'inégalité $|P(z_0)|\leq M(a+b)^n$ a lieu (ici, a et b sont les demi-axes de l'ellipse ayant pour foyers les points -1 et 1 et passant par z_0).

Indication. Examiner la fonction $Q(\zeta)=\zeta^{-n}P\left(\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}\right)$ dans le domaine $|\zeta|>1$.

* * *

14.14. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et soit $\inf\limits_{z\in D}|f(z)|=\mu>0$. Montrer que $f(z)\equiv\mu e^{i\varphi}$, ou bien $|f(z)|>\mu$ pour chaque point intérieur au domaine D.

14.15. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et continue dans la fermeture $\overline{D}$ de ce dernier, et supposons que son module reste constant sur la frontière du domaine D. Montrer que, si la fonction $f(z)$ n'est pas identiquement constante, elle s'annule en au moins un point du domaine D.

14.16. Soient $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ des fonctions régulières dans un domaine D et soit $M=\overline{\lim\limits_{z\to\partial D}}\{|f_1(z)|+\ldots+|f_m(z)|\}$. Montrer que, si au moins une des fonctions $f_k(z)$ n'est pas identiquement constante, en chaque point de D l'inégalité $|f_1(z)|+\ldots+|f_m(z)|<M$ a lieu.

14.17. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<R$ et soit m un entier positif. Montrer que, si la fonction $f(z)$ n'est pas identiquement constante, la fonction

$$I_m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^m\,d\varphi$$

croît monotonement pour $0\leq r<R$.

Indication. Mettre l'intégrale sous la forme de limite de la somme intégrale.

* * *

Pour les fonctions régulières le principe du maximum est un cas particulier du principe du maximum beaucoup plus général concernant les fonctions sous-harmoniques, et même lors de l'étude des fonctions régulières, à l'aide de ce principe on peut obtenir beaucoup plus.

Une fonction réelle $u(z)$ définie dans un domaine D est appelée *sous-harmonique* dans ce domaine :

a) Si la fonction $e^{u(z)}$ est continue dans le domaine D.

b) Si le point z_0 est situé dans le domaine D et si le nombre $\varrho > 0$ est assez petit, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varrho e^{i\varphi})\, d\varphi$$

(généralement parlant, cette intégrale est impropre ; si elle diverge, on la considère égale à $-\infty$).

14.18. Soit $u(z)$ une fonction non identiquement constante et sous-harmonique dans un domaine D. Notons $M = \overline{\lim\limits_{z \to \partial D}}\, u(z)$. Montrer qu'en chaque point du domaine D l'inégalité $u(z) < M$ a lieu *(principe du maximum)*.

14.19. Montrer qu'une fonction $u(z)$ qui est harmonique dans un domaine D est sous-harmonique dans ce domaine.

Indication. Voir le problème 10.29.

14.20. Soit $u(z)$ une fonction harmonique dans un domaine D. Notons

$$M = \overline{\lim_{z \to \partial D}}\, u(z), \qquad m = \underline{\lim_{z \to \partial D}}\, u(z).$$

Montrer que, si $m < M$, alors en chaque point du domaine D les inégalités $m < u(z) < M$ sont valables *(principe du maximum et du minimum pour les fonctions harmoniques)*.

14.21. Montrer qu'une fonction $u(z) = |f(z)|$ est sous-harmonique dans un domaine D si la fonction $f(z)$ est régulière dans le domaine D.

Indication. Voir le problème repéré 10.26.

14.22. Soit $u(z)$ une fonction admettant dans un domaine fini D des dérivées partielles secondes (par rapport à $x = \operatorname{Re} z$ et par rapport à $y = \operatorname{Im} z$) et soit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0$ dans ce domaine. Montrer que la fonction $u(z)$ est sous-harmonique dans le domaine D.

Indication. Ecrire pour la fonction $u(z_0 + \varrho e^{i\varphi})$ la formule de Taylor à terme résiduel (en passant aux variables $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$).

14.23. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D. Montrer que les fonctions $u(z) = \ln |f(z)|$ et $u(z) = |f(z)|^\alpha$, $\alpha > 0$, sont sous-harmoniques dans le domaine D.

Indication. Aux points où $f(z) = 0$, l'inégalité requise est évidente. Aux autres points, on vérifie aisément que les fonctions sont sous-harmoniques en utilisant, par exemple, le résultat du problème 14.22.

14.24. Soient $u_1(z)$ et $u_2(z)$ deux fonctions sous-harmoniques dans un domaine D. Montrer que :

1. Si les nombres a et b sont positifs, la fonction $au_1(z) + bu_2(z)$ est sous-harmonique dans le domaine D.

2. La fonction $u(z) = \max\{u_1(z), u_2(z)\}$ est sous-harmonique dans le domaine D.

3. La fonction $u(z) = |u_1(z)|^\alpha$ est sous-harmonique dans le domaine D pour $\alpha > 1$.

4. Pour $\alpha > 0$, la fonction $u(z) = e^{\alpha u_1(z)}$ est sous-harmonique dans le domaine D.

14.25. Soient $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ des fonctions régulières dans un domaine D. Montrer que, pour $\alpha > 0$, la fonction $u(z) = |f_1(z)|^\alpha + \ldots + |f_m(z)|^\alpha$ est sous-harmonique dans le domaine D.

14.26. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z| < R$. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la fonction

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha \, d\varphi$$

est une fonction monotonement croissante de r dans l'intervalle $0 \leq r < R$ (si $f(z) \not\equiv \text{const}$).

Indication. Montrer que la fonction $I_\alpha(r)$ peut être considérée comme une fonction sous-harmonique de la variable $z = re^{i\varphi}$.



Les cas où une fonction sous-harmonique dépend seulement d'une certaine combinaison des variables $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ sont les plus intéressants.

14.27. Montrer que la fonction $u(z) = \varphi(\operatorname{Re} z)$ est sous-harmonique dans la bande $a < \operatorname{Re} z < b$ si, et seulement si, la fonction $\varphi(x)$ est convexe vers le bas dans l'intervalle $a < x < b$.

14.28. Montrer que la fonction $u(re^{i\theta}) = \varphi(r)$ est sous-harmonique dans la couronne $\varrho < |z| < R$ si, et seulement si, la fonction $\varphi(r)$ est logarithmiquement convexe dans l'intervalle (ϱ, R), c'est-à-dire si pour trois valeurs quelconques de $\varrho < r_1 < r_2 < r_3 < R$, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$\varphi(r_2) \leq \varphi(r_1) \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + \varphi(r_3) \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1}.$$

14.29. Montrer que la fonction $u(re^{i\theta}) = r^\varrho \varphi(\theta)$ est sous-harmonique dans l'angle $\alpha < \theta < \beta$ si, et seulement si, la fonction $\varphi(\theta)$ est trigonométriquement ϱ-convexe dans l'intervalle (α, β), c'est-à-dire si pour trois valeurs quelconques θ_1, θ_2, θ_3 satisfaisant aux conditions $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \beta$ et $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\varrho$, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$\varphi(\theta_2) \leq \varphi(\theta_1) \frac{\sin \varrho(\theta_3 - \theta_2)}{\sin \varrho(\theta_3 - \theta_1)} + \varphi(\theta_3) \frac{\sin \varrho(\theta_2 - \theta_1)}{\sin \varrho(\theta_3 - \theta_1)}.$$

14.30. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\varrho < |z| < R$. Notons $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que pour $\varrho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$\ln M(r_2) \leq \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_1) + \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_3)$$

(théorème des trois cercles d'Hadamard).

14.31. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\varrho < |z| < R$. Notons

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha \, d\varphi \qquad (\alpha > 0).$$

Montrer que pour $\varrho < r_1 < r_2 < r_3 < R$, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$I_\alpha(r_1) \ln \frac{r_3}{r_2} + I_\alpha(r_2) \ln \frac{r_1}{r_3} + I_\alpha(r_3) \ln \frac{r_2}{r_1} \geq 0.$$

14.32. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\operatorname{Re} z > 0$ vérifiant l'inégalité

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{(1+|z|)^\alpha}, \quad \alpha > 1 \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Montrer que la fonction

$$I(\varphi) = \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{r}$$

est une fonction de φ convexe vers le bas dans l'intervalle $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

* * *

Le principe du maximum cesse d'être vrai si sur la frontière du domaine il y a au moins un point en tendant vers lequel la fonction peut admettre une limite infinie. Quand même, si l'on limite la vitesse avec laquelle la fonction tend vers l'infini, on peut parfois ignorer ce point exceptionnel.

14.33. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\alpha < \arg z < \beta$, continue sur les côtés de cet angle, satisfaisant sur eux à l'inégalité $|f(z)| \leq M$ et à l'intérieur de l'angle à l'inégalité

$$|f(z)| < M_1 e^{|z|^\varrho},$$

où ϱ est un entier positif arbitraire inférieur à $\frac{\pi}{\beta-\alpha}$. Montrer que la fonction $f(z)$ satisfait également à l'inégalité $|f(z)| \leq M$ à l'intérieur de l'angle $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ *(théorème de Phragmen-Lindelöf)*.

Indication. Montrer d'abord l'inégalité $u_\varepsilon(z) \leq \ln M$, où

$$u_\varepsilon(z) = \ln |f(z)| - \varepsilon |z|^{\varrho_1} \cos \varrho_1 \left(\arg z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad \varrho < \varrho_1 < \frac{\pi}{\beta-\alpha},$$

ensuite, passer à la limite pour $\varepsilon \to 0$.

14.34. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans l'angle $\alpha < \arg z < \beta$ et continue jusqu'à ses côtés sur lesquels elle satisfait à l'inégalité $|f(z)| \leq M$. Montrer que, si à l'intérieur de cet angle la fonction $f(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|f(z)| \leq e^{\delta(|z|)|z|^\varrho}, \quad \varrho = \frac{\pi}{\beta-\alpha},$$

où $\delta(x)$ est une fonction pour laquelle

$$\lim_{x \to +\infty} \delta(x) = 0,$$

alors on a aussi $|f(z)| \leq M$ partout à l'intérieur de l'angle.

Indication. D'abord, en utilisant le résultat du problème 14.33, montrer que la fonction auxiliaire

$$\ln |f(z)| - \varepsilon |z|^\varrho \cos \varrho \left(\arg z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

est bornée dans l'angle $\alpha \leq \arg z \leq \beta$.

14.35. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la demi-bande $\operatorname{Re} z > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$, et continue jusqu'à ses côtés sur lesquels elle satisfait à l'inégalité $|f(z)| \leq M$. Montrer que $|f(z)| \leq M$ dans toute la demi-bande, ou bien il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\max_{-\pi/2 \leq y \leq \pi/2} \ln |f(x+iy)| > \delta e^x \quad (x > x_0).$$

14.36. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\operatorname{Re} z > 0$ et continue pour $0 \leq \operatorname{Re} z < \infty$ satisfaisant en outre aux inégalités

$$|f(z)| \leq M_1 e^{A|z|^\varrho} \quad (\operatorname{Re} z > 0), \ \varrho < 1;$$

$$|f(iy)| \leq M e^{\alpha y^\varrho}, \quad |f(-iy)| \leq M e^{\beta y^\varrho}, \quad (y > 0).$$

Montrer que

$$|f(re^{i\theta})| \leq M \exp\left(r\left[\frac{\alpha+\beta}{2\cos \pi\varrho/2} \cos \varrho\theta + \frac{\alpha-\beta}{2 \sin \pi\varrho/2} \sin \varrho\theta\right]\right),$$

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

14.37. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $a < \operatorname{Re} z < b$, continue jusqu'à ses côtés et satisfaisant aux inégalités

$$|f(z)| \leq M_1 e^{A|z|} \quad (a \leq \operatorname{Re} z \leq b);$$

$$|f(a+iy)| \leq M e^{\alpha|y|}, \quad |f(b+iy) \leq M e^{\beta|y|}.$$

Montrer que

$$|f(c+iy)| \leq M \exp\left\{\left(\alpha \frac{b-c}{b-a} + \beta \frac{c-a}{b-a}\right)|y|\right\}, \quad a \leq c \leq b.$$

* * *

14.38. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z| < R$ et continue dans le disque $|z| \leq R$, et soit $\int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| \, d\varphi = -\infty$. Montrer que $f(z) \equiv 0$.

Indication. Montrer que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi$ est une fonction non décroissante de r pour $0 \leq r \leq R$; voir le problème 14.26.

14.39. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$ et continue dans sa fermeture (le point $z = \infty$ inclus). Montrer que, si $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(x)|}{1+x^2} \, dx = -\infty$, alors $f(z) \equiv 0$.

Indication. Examiner la fonction $g(\zeta) = f\left(\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right)$ dans le disque $|\zeta| < 1$ et utiliser le résultat du problème 14.38.

14.40. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\operatorname{Re} z \geq 0$ satisfaisant aux conditions

$$f(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$|f(x+iy)| \leq M e^{Ax + a|y|}, \quad 0 < a < \pi (x \geq 0, \ -\infty < y < \infty).$$

Montrer que $f(z) \equiv 0$.

Indication. Examiner la fonction auxiliaire

$$g(z)=\frac{f(z)}{\sin \pi z}\,e^{-Az}.$$

14.41. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\operatorname{Re} z \geq 0$ satisfaisant aux conditions

a) $|f(z)| \leq 1 (\operatorname{Re} z=0)$;

b) $|f(z)| \leq Me^{|z|^{2-\varepsilon}}$, $\quad \varepsilon>0$ $(\operatorname{Re} z \geq 0)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln |f(x)|}{x}=-\infty$.

Montrer que $f(z)\equiv 0$.

CHAPITRE III

FONCTIONS ANALYTIQUES MULTIFORMES

§ 15. Fonctions analytiques dans un domaine

Soit D un domaine arbitraire du plan complexe élargi et soit z_0 un certain point fixé de ce domaine. Désignons par le symbole $A(D, z_0)$ l'ensemble de toutes les lignes polygonales Γ d'origine z_0 contenues dans le domaine D (si le point ∞ est situé dans le domaine D, une ligne polygonale Γ peut passer par ce point, mais, dans ce cas, elle doit comporter un nombre fini de segments).

Une fonction $f(\Gamma)$ définie sur l'ensemble $A(D, z_0)$ (c'est-à-dire la loi qui à chaque ligne polygonale $\Gamma \in A(D, z_0)$ fait correspondre un nombre complexe $f(\Gamma)$) sera appelée *fonction analytique dans le domaine D* si elle jouit des propriétés suivantes :

a) Pour une déformation arbitraire de la ligne polygonale Γ dans un voisinage assez petit d'un quelconque de ses points, la valeur de la fonction $f(\Gamma)$ ne varie pas.

b) Pour une variation arbitraire de l'extrémité de la ligne polygonale Γ dans un voisinage assez petit, la fonction $f(\Gamma)$ dépend exclusivement de cette extrémité variable, étant une fonction régulière de cette extrémité dans le voisinage mentionné.

Pour plus de clarté, donnons une définition nette des notions de *déformation* d'une ligne polygonale et de *variation* de son extrémité :

On appelle *déformation* arbitraire *d'une ligne polygonale Γ dans un domaine D_1* le remplacement de tout tronçon de cette ligne polygonale se trouvant dans le domaine D_1 par une ligne polygonale arbitraire contenue dans le domaine D_1 ayant la même origine et la même extrémité que le tronçon remplacé.

On appelle *variation* arbitraire *de l'extrémité d'une ligne polygonale Γ dans un domaine D_1* contenant cette extrémité l'adjonction à l'extrémité de la ligne polygonale Γ d'une ligne polygonale arbitraire contenue dans le domaine D_1.

Nous allons désigner par le symbole $(f(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine D ; ici, on note z l'extrémité de la ligne polygonale Γ. Une telle notation souligne que la dépendance de la fonction de l'extrémité de la ligne polygonale Γ est la dépendance principale, tandis que la dépendance de la forme de la ligne polygonale Γ n est qu'une dépendance secondaire.

15.01. Montrer qu'une fonction régulière dans un domaine D est une fonction analytique dans ce domaine.

15.02. Montrer que, si une fonction analytique dans un domaine D ne dépend pas de la forme d'une ligne polygonale Γ et dépend exclusivement de son extrémité, cette fonction est régulière dans le domaine D.

15.03. Soient $(f(z))_\Gamma$ et $(g(z))_\Gamma$ deux fonctions analytiques dans un domaine D définies pour $\Gamma \in A(D, z_0)$. Montrer que les fonctions $(f(z))_\Gamma + (g(z))_\Gamma$, $(f(z))_\Gamma \cdot (g(z))_\Gamma$ sont aussi des fonctions analytiques dans le domaine D.

15.04. Soient $(f(z))_\Gamma$ et $(g(z))_\Gamma$ deux fonctions analytiques dans un domaine D définies pour $\Gamma \in A(D, z_0)$. Montrer que, si la fonction $(g(z))_\Gamma$ ne s'annule pas dans tout son domaine de définition, alors la fonction $\dfrac{(f(z))_\Gamma}{(g(z))_\Gamma}$ est analytique dans le domaine D.

15.05. Soit $(f(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine D et soit $F(\zeta)$ une fonction régulière dans tout le plan complexe. Montrer que la fonction $F((f(z))_\Gamma)$ est analytique dans le domaine D.

15.06. Soit Γ une ligne polygonale d'origine 1 et d'extrémité z ne passant pas par les points 0 et ∞. Désignons par le symbole $(\ln z)_\Gamma$ la grandeur $(\ln z)_\Gamma = \int\limits_\Gamma \frac{dt}{t}$. Montrer que la grandeur $(\ln z)_\Gamma$ est une fonction analytique dans tout le plan complexe privé du point $z=0$.

15.07. Soit α un nombre complexe arbitraire. Montrer que la grandeur $(z^\alpha)_\Gamma = e^{\alpha(\ln z)_\Gamma}$, où l'expression $(\ln z)_\Gamma$ est définie dans le problème 15.06, est une fonction analytique dans tout le plan complexe privé du point $z=0$.

15.08. Soit Γ une ligne polygonale d'origine 0 et d'extrémité z ne passant pas par les points i et $-i$ (elle passe peut-être par le point ∞). Désignons par le symbole $(\operatorname{arctg} z)_\Gamma$ la grandeur

$$(\operatorname{arctg} z)_\Gamma = \int\limits_\Gamma \frac{dt}{1+t^2}.$$

Montrer que l'expression $(\operatorname{arctg} z)_\Gamma$ est une fonction analytique dans tout le plan complexe élargi privé des points $z=i$ et $z=-i$.

15.09. Soit $\varphi(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et soit z_0 un certain point de ce domaine. Montrer que la grandeur $\int\limits_{z_0}^{z} \varphi(t)\,dt$ est une fonction analytique dans le domaine D.

Si A est un nombre complexe arbitraire différent de zéro, l'expression $\{\ln A\}$ désigne l'ensemble entier des nombres

$$\ln|A| + i \arg A + 2\pi i n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

tandis que l'expression $\{A^B\}$ représente tout l'ensemble des nombres

$$e^{B \ln|A|} \cdot e^{iB(\arg A + 2\pi n)} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

15.10. Montrer que l'ensemble des valeurs que prend la fonction $(\ln z)_\Gamma$ analytique dans le domaine $0<|z|<\infty$ sur toutes les lignes polygonales possibles $\Gamma \in A(0<|z|<\infty, 1)$, ayant pour extrémité un point donné a, coïncide avec l'ensemble des déterminations décrites par l'expression multiforme $\{\ln a\}$.

15.11. Montrer que l'ensemble des valeurs que prend la fonction $(z^\alpha)_\Gamma$ analytique dans le domaine $0<|z|<\infty$ sur toutes les lignes polygonales possibles $\Gamma \in A(0<|z|<\infty, 1)$, ayant pour extrémité un point donné a,

coïncide avec l'ensemble des déterminations décrites par l'expression multiforme $\{a^a\}$.

15.12. Montrer que l'ensemble des valeurs que prend la fonction $(\operatorname{arctg} z)_\Gamma$ analytique dans le domaine D : $\{z \neq \pm i\}$ sur toutes les lignes polygonales possibles $\Gamma \in A(D, 0)$, ayant pour extrémité un point donné a, coïncide avec l'ensemble des déterminations décrites par l'expression multiforme $\left\{\frac{1}{2i} \ln \frac{1+ia}{1-ia}\right\}$.

En règle générale, les fonctions analytiques dans un domaine ne sont pas données par une formule permettant de calculer d'une façon ou d'une autre la valeur de la fonction pour chaque ligne polygonale contenue dans son domaine de définition. D'habitude, on donne une expression multiforme qui, pour chaque point du domaine, donne un ensemble des valeurs que prend cette fonction sur toutes les lignes polygonales possibles ayant pour extrémité le point intéressé. On dira que ces expressions multiformes représentent la fonction analytique dans ce domaine.

15.13. Pour les expressions multiformes ci-dessous et pour les domaines D indiqués entre parenthèses, trouver les fonctions analytiques dans le domaine D représentées par ces expressions :

1. $\{z^z\}$ $(D : \{z \neq 0,\ z \neq \infty\})$. 2. $\{z^3 \ln^2 z\}$ $(D : \{z \neq 0,\ z \neq \infty\})$.
3. $\{\ln(1-z^2)\}$ $(D : \{z \neq 1,\ z \neq -1,\ z \neq \infty\})$.
4. $\{\sqrt[3]{1+z^2}\}$ $(D : \{z \neq i,\ z \neq -i,\ z \neq \infty\})$.
5. $\{\sqrt{1-z^4}\}$ $(D : \{z \neq \pm 1,\ z \neq \pm i,\ z \neq \infty\})$.
6. $\left\{\ln \frac{z^2-1}{z^2+1}\right\}$ $(D : \{z \neq \pm 1,\ z \neq \pm i\})$.

Soit $(f(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine D et définie sur les lignes polygonales $\Gamma \in A(D, z_0)$. Si l'on fixe une ligne polygonale $\gamma_\zeta \in A(D, z_0)$ d'extrémité ζ et si l'on fait varier arbitrairement son extrémité dans un voisinage assez petit du point ζ, alors, conformément à la définition, nous obtiendrons une fonction régulière de l'extrémité variable (notons z cette extrémité) dans ce voisinage. Désignons cette fonction régulière par le symbole $(f(z))_{\gamma_\zeta}$ et appelons-la *élément de la fonction* $(f(z))_\Gamma$ *analytique dans le domaine D correspondant à la ligne polygonale* γ_ζ.

L'élément de la fonction $(f(z))_\Gamma$ analytique dans le domaine D correspondant à la ligne polygonale γ_ζ, qui dégénère en son point de départ z_0, est appelé *élément initial* de la fonction $(f(z))_\Gamma$ analytique dans ce domaine.

Tous les éléments $(f(z))_{\gamma_\zeta}$ correspondant aux lignes polygonales $\gamma_\zeta \in A(D, z_0)$ d'extrémité ζ sont appelés *éléments situés au-dessus du point* ζ.

15.14. Soit $(f(z))_\Gamma$, où $\Gamma \in A(D, z_0)$, une fonction analytique dans un domaine D, et soit $F_1(z)$ l'élément de cette fonction correspondant à une ligne polygonale γ d'extrémité z_1. Montrer qu'il existe une fonction $(\tilde{f}(z))_\Gamma$ analytique dans le domaine D, définie sur les lignes polygonales Γ de la classe $A(D, z_1)$, ayant pour élément initial $F_1(z)$, et obtenir pour cette fonction la formule $(\tilde{f}(z))_\Gamma = (f(z))_{\gamma\Gamma}$.

Nota. Par le symbole $\gamma\Gamma$ on désigne une ligne polygonale obtenue en parcourant d'abord la ligne polygonale γ, ensuite la ligne polygonale Γ.

15.15. Soient $(f(z))_\Gamma$ et $(\tilde{f}(z))_\Gamma$ les fonctions analytiques dans le domaine D figurant au problème 15.14. Montrer que, si la fonction $(f(z))_\Gamma$ est représentée par une certaine expression multiforme, la fonction $(\tilde{f}(z))_\Gamma$ est représentée par la même expression.

Lorsqu'on donne une fonction analytique dans un domaine par l'expression multiforme qui la représente, il est nécessaire d'indiquer son élément initial. Sinon, de graves erreurs peuvent s'introduire. Le problème qui suit fournit un exemple, très simple d'ailleurs, d'erreurs de ce genre.

15.16. Soient $(f_1(z))_\Gamma$, $(g_1(z))_\Gamma$, $(f_2(z))_\Gamma$, $(g_2(z))_\Gamma$ des fonctions analytiques dans un domaine D et définies sur un même ensemble $(A(D, z_0))$ de lignes polygonales Γ. Supposons que les fonctions $(f_1(z))_\Gamma$ et $(g_1(z))_\Gamma$ soient représentées par la même expression multiforme, de même que les fonctions $(f_2(z))_\Gamma$ et $(g_2(z))_\Gamma$. Est-ce que les fonctions analytiques dans le domaine D données ci-dessous doivent être représentées par la même expression multiforme?

1. $(f_1(z))_\Gamma+(f_2(z))_\Gamma$ et $(g_1(z))_\Gamma+(g_2(z))_\Gamma$.
2. $(f_1(z))_\Gamma\cdot(f_2(z))_\Gamma$ et $(g_1(z))_\Gamma\cdot(g_2(z))_\Gamma$.

Il n'est point obligatoire que les expressions multiformes représentent une fonction analytique dans un domaine D. L'ensemble des déterminations qu'elles décrivent peut être constitué par les valeurs de plusieurs fonctions analytiques dans ce domaine.

15.17. Soit $F(z)$ une fonction régulière et différente de zéro dans un domaine D.

1. Est-ce que l'expression $\sqrt{F(z)}$ doit représenter une fonction analytique dans le domaine D?
2. Est-ce que l'expression $\sqrt{F(z)}$ peut représenter une fonction analytique dans le domaine D?

* * *

Les problèmes qui suivent nécessitent l'utilisation du théorème d'unicité des fonctions régulières et du principe du prolongement analytique (voir § 13).

Dans beaucoup de questions théoriques, on examine le processus suivant de prolongement analytique d'une fonction régulière arbitraire $F(z)$, donnée dans un certain voisinage d'un point z_0, le long d'une ligne polygonale Γ sortant de ce point :

On développe au point z_0 la fonction $F(z)$ en série de Taylor. On note r_0 le rayon de convergence de cette série, et $F_0(z)$ sa somme. D'après ces grandeurs, on trouve le point z_1 jouissant des propriétés suivantes :

a) Le point z_1 est situé dans le disque $|z-z_0|\leq r_0/2$.

b) Le point z_1 se trouve sur le même segment de droite de la ligne polygonale Γ que le point z_0, mais il est possible qu'il se situe plus loin par

rapport à l'origine de la ligne polygonale (au sens de distance suivant la ligne polygonale).

On développe au point z_1 la fonction $F_0(z)$ en série de Taylor. On note r_1 le rayon de convergence de cette série, et $F_1(z)$ sa somme. D'après ces grandeurs, on trouve le point z_2, et ainsi de suite.

Si le processus décrit ci-dessus nous amène à l'extrémité de la ligne polygonale Γ en un nombre fini d'opérations, on dit que le prolongement analytique de la fonction $F(z)$ le long de la ligne polygonale Γ est possible. On appelle ***résultat du prolongement analytique de la fonction $F(z)$ le long de la ligne polygonale Γ*** la valeur que prend la dernière fonction $F_n(z)$ à l'extrémité de cette ligne polygonale.

15.18. Soit D un domaine fini et supposons qu'une fonction $F(z)$ régulière dans un certain vosinage d'un point $z_0 \in D$ puisse être prolongée analytiquement le long de n'importe quelle ligne polygonale Γ contenue dans le domaine D et sortant du point z_0. Montrer que le résultat du prolongement analytique de la fonction $F(z)$ le long de la ligne polygonale Γ est une fonction analytique dans le domaine D.

15.19. Soit $(f(z))_\Gamma$, où $\Gamma \in A(D, z_0)$, une fonction analytique dans un domaine D. Montrer que pour toute ligne polygonale finie Γ, la valeur de $(f(z))_\Gamma$ est égale au résultat du prolongement analytique de l'élément initial de cette fonction le long de la ligne polygonale Γ.

Deux éléments d'une fonction analytique dans un domaine D situés au-dessus d'un même point $\zeta \in D$ sont appelés ***équivalents*** s'ils coïncident dans un certain voisinage de ce point.

15.20. Montrer que, si les éléments initiaux de deux fonctions analytiques dans un domaine D sont équivalents, ces fonctions sont identiquement égales entre elles.

15.21. Montrer que, si un élément quelconque d'une fonction analytique dans un domaine D est équivalent à zéro, cette fonction est identiquement nulle.

15.22. Montrer qu'une fonction analytique dans un domaine D possède au-dessus de chaque point de ce domaine un nombre égal (ce nombre peut être infini) d'éléments deux à deux non équivalents.

15.23. Soit $(f(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine D ayant $f_0(z)$ comme élément initial. Montrer qu'il existe une fonction analytique dans le domaine D dont l'élément initial est $f'_0(z)$.

15.24. Soit $(f(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine fini D dont l'élément initial est $f_0(z)$. Montrer qu'il existe une fonction analytique dans le domaine D ayant comme élément initial

$$\int_{z_0}^{z} f_0(t)\, dt.$$

15.25. Prenons comme domaine D tout le plan complexe privé du point $z=0$ et comme fonction $(f(z))_\Gamma$ la fonction $1/z$. Se convaincre que la condition de finitude du domaine D dans le problème 15.24 est essentielle.

15.26. Montrer qu'il existe une fonction analytique dans tout le plan complexe privé des points $z=0$ et $z=1$ qui est représentée par la formule $\{\ln \ln z\}$.

Indication. Appliquer le résultat du problème 15.24 à la fonction

$$\frac{1}{z\,(\ln z)_\Gamma}.$$

15.27. Montrer que les fonctions représentées par les formules ci-dessous existent et qu'elles sont analytiques dans les domaines indiqués entre parenthèses :

1. $\{(z+1)^\alpha(\ln z)^\beta\}$ $(D\ :\ \{(z\neq 0,\ z\neq \pm 1,\ z\neq \infty\})$.
2. $\{\ln(z+\sqrt{z^2+1})\}$ $(D\ :\ \{z\neq \pm i,\ z\neq \infty\})$.
3. $\{\ln(1-\sqrt[4]{z})\}$ $(D\ :\ \{z\neq 0,\ z\neq 1,\ z\neq \infty\})$.
4. $\left\{\sqrt{z+\sqrt{z}}\right\}$. $(D\ :\ \{z\neq 0,\ z\neq 1,\ z\neq \infty\})$.
5. $\{\sqrt[3]{\pi i+\ln z}\}$ $(D\ :\ \{z\neq 0,\ z\neq -1,\ z\neq \infty\})$.
6. $\left\{\sqrt{1+\sqrt{\ln z}}\right\}$ $(D\ :\ \{z\neq 0,\ z\neq e,\ z\neq \infty\})$.

15.28. Soient $(f(z))_\Gamma$ et $(g(z))_\Gamma$ deux fonctions analytiques dans un domaine D définies sur les lignes polygonales Γ d'origine $z_0\in D$. Montrer que, si le domaine D ne comporte pas de point à l'infini, alors l'équation différentielle $w'+w\cdot(f(z))_\Gamma+(g(z))_\Gamma=0$ admet une solution analytique dans le domaine D.

Nota. Pour la notion de dérivée d'une fonction analytique dans un domaine, voir le problème 15.23.

15.29. Soient $(f(z))_\Gamma$ et $(F(\zeta))_\Gamma$ deux fonctions analytiques dans les domaines D et D' possédant respectivement comme éléments initiaux $f_{z_0}(z)$ et $F_{\zeta_0}(\zeta)$, et soit $\zeta_0=f_{z_0}(z_0)$. Montrer que, si toutes les valeurs que prend la fonction $(f(z))_\Gamma$ sont contenues dans le domaine D', alors il existe une fonction analytique dans le domaine D ayant comme élément initial $F_{\zeta_0}(f_{z_0}(z))$.

RÉPONSES

15.13.

1. $e^{z(\ln z)_\Gamma}$. 2. $(z^3)_\Gamma((\ln z)_\Gamma)^2$. 3. $2\int_\Gamma \frac{t\,dt}{t^2-1}$, $\Gamma\in A(D,\ 0)$.

4. $e^{\frac{2}{3}(\varphi(z))_\Gamma}$, $(\varphi(z))_\Gamma=\int_\Gamma \frac{t\,dt}{t^2+1}$, $\Gamma\in A(D,\ 0)$.

5. $e^{2(\varphi(z))_\Gamma}$, $(\varphi(z))_\Gamma=\int_\Gamma \frac{t^2\,dt}{t^4-1}$, $\Gamma\in A(D,\ 0)$.

6. $4\int_\Gamma \frac{t\,dt}{t^4-1}$, $\Gamma\in A(D,\ \infty)$.

15.16.
Non. Voici un exemple valable dans les deux cas :
$(f_1(z))_\Gamma = (f_2(z))_\Gamma = (g_1(z))_\Gamma = (\sqrt{z})_\Gamma, \quad (g_2(z))_\Gamma = -(\sqrt{z})_\Gamma.$

15.17.
1. Non. Exemple : $F(z) = z^2$, $D: \{0 < |z| < \infty\}$.
2. C'est possible. Exemple : $F(z) = z$, $D: \{0 < |z| < \infty\}$.

§ 16. Séparation des branches régulières

Supposons qu'à chaque point z d'un domaine D du plan complexe élargi on associe un ensemble dénombrable de nombres complexes $\{\mathcal{A}(z)\}$. S'il existe une fonction $f(z)$ régulière dans le domaine D et telle que pour chaque point $z \in D$, la condition $f(z) \in \{\mathcal{A}(z)\}$ soit satisfaite, alors on dit que l'expression multiforme $\{\mathcal{A}(z)\}$ admet la séparation d'une *branche régulière* dans le domaine D.

16.01. Montrer qu'il existe une fonction unique continue dans tout le plan complexe, présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif et satisfaisant aux conditions :

1. $f(z) \in \{\ln z\}$; 2. $f(1) = 0$.

S'assurer que cette fonction est régulière dans son domaine de définition.

Indication. Utiliser le fait que la distance entre tout couple de valeurs possibles du logarithme en un même point n'est pas inférieure à 2π.

16.02. Notons D_0 tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif. Montrer que les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation des branches régulières dans le domaine D_0:

1. $\{\sqrt{z}\}$. 2. $\{\ln^2 z\}$. 3. $\{z \ln^2 z\}$.
4. $\{(1 + z^2)\sqrt[3]{z}\}$. 5. $\{z^z\}$. 6. $\{z^{\ln z}\}$.

16.03. Soient $\{\mathcal{A}_1(z)\}$ et $\{\mathcal{A}_2(z)\}$ deux expressions multiformes admettant la séparation des branches régulières dans un domaine D. Montrer que les expressions multiformes

$$\{\mathcal{A}_1(z)\} \oplus \{\mathcal{A}_2(z)\} \text{ et } \{\mathcal{A}_1(z)\} \odot \{\mathcal{A}_2(z)\}$$

admettent également la séparation des branches régulières dans le domaine D.

Nota. Par le symbole $E_1 \oplus E_2$ on désigne un ensemble dont les éléments représentent toutes les sommes possibles $z_1 + z_2$, où $z_1 \in E_1$ et $z_2 \in E_2$. Le symbole $\odot$ est analogue au symbole $\oplus$, mais, ici, la somme est remplacée par le produit.

16.04. Soit $\{\mathcal{A}(z)\}$ une expression multiforme admettant la séparation d'une branche régulière dans un domaine D, et soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan complexe. Montrer que l'expression multiforme $\{f(\mathcal{A}(z))\}$ admet également la séparation d'une branche régulière dans le domaine D.

16.05. Montrer que l'expression $\{\sqrt[3]{1 - z^2}\}$ admet la séparation d'une branche régulière dans un domaine D constitué par tout le plan complexe présentant des coupures suivant les demi-droites $(-\infty, -1]$ et $[1, +\infty)$.

Indication. Voir le problème 16.03.

16.06. Montrer que les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation des branches régulières dans les domaines indiqués entre parenthèses :

1. $\{\ln(1-z^2)\}$ $(D:\{z\notin[-\infty,\ -1],\ z\notin[1,\ +\infty]\})$.
2. $\{\sqrt{1-z^2}\ln z\}$ $(D:\{z\notin[-\infty,\ -1],\ z\notin[0,\ +\infty]\})$.
3. $\{(z^2+1)^z\}$ $(D:\{z\notin[-i,\ -i\infty],\ z\notin[i,\ +i\infty]\})$.
4. $\{\ln(z^2+1)\cdot\ln z\}$ $(D:\{z\notin[-i\infty,\ +i]\})$.
5. $\{\sqrt[3]{(z^2-1)(z^2-4)}\}$ $(D:\operatorname{Im} z>0)$.
6. $\{\sqrt[n]{1-z^n}\}$ $(D:|z|<1)$, $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$
7. $\left\{\sqrt[3]{z}+\ln\frac{1+z^2}{1-z^2}\right\}$ $\left(D:0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$.
8. $\{(z^2+1)^{\sqrt{z}}\}$ $(D:\operatorname{Re} z>0)$.

16.07. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D y satisfaisant à la condition $\operatorname{Re} f(z)>0$. Montrer que les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation d'une branche régulière dans le domaine D :

1. $\{\sqrt{f(z)}\}$. 2. $\{\ln f(z)\}$. 3. $\{\sqrt[3]{f(z)+i}\}$. 4. $\left\{\ln\frac{1+if(z)}{1-if(z)}\right\}$.

16.08. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D sans y prendre des valeurs situées sur la demi-droite $[a,\ a+\infty]$. Montrer que l'expression multiforme $\{\sqrt{a-f(z)}\}$ admet la séparation d'une branche régulière dans le domaine D et qu'il n'y a qu'une seule branche $\varphi(z)$ satisfaisant à la condition $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$ $(z\in D)$.

16.09. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D sans prendre des valeurs situées sur une courbe C allant du point $z=0$ au point $z=\infty$ tout en restant dans le demi-plan gauche. Montrer que l'expression multiforme $\{\ln f(z)\}$ admet la séparation d'une branche régulière dans le domaine D et qu'il existe une branche $\varphi(z)$ telle que l'inégalité ci-dessous soit valable :

$$|\operatorname{Im}\varphi(z)|<3\pi/2\qquad(z\in D).$$

16.10. Montrer que les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation des branches régulières dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $\{\ln(z+\sqrt{1+z^2})\}$ $(D:\operatorname{Re} z>0)$.
2. $\left\{\sqrt{z+\sqrt{z}}\right\}$ $(D:\operatorname{Im} z>0)$.
3. $\{\ln(iz+\sqrt{1-z^2})\}$ $(D:\{z\notin[-\infty,\ -1],\ z\notin[1,\ +\infty]\})$.
4. $\{\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})\}$ $(D:\{z\notin[-\infty,\ 0],\ z\notin[1,\ +\infty]\})$.
5. $\{\sqrt{\ln z}\}$ $(D:\operatorname{Im} z>0)$.

* * *

Le procédé le plus efficace de résolution des problèmes portant sur la possibilité ou l'impossibilité de séparation d'une branche régulière est lié à l'utilisation de la notion de fonction analytique dans un domaine (voir le début de § 15). La base de ce procédé est constituée par l'ainsi appelé *théorème de la monodromie :*

Une fonction analytique dans un domaine simplement connexe est une fonction régulière dans ce domaine.

16.11. Soit $\{A(z)\}$ une expression multiforme représentant (voir § 15, l'explication précédant le problème 15.13) une fonction analytique dans un certain domaine D^*. Montrer qu'en chaque domaine simplement connexe $D \subset D^*$ l'expression multiforme $\{A(z)\}$ admet la séparation d'une branche régulière.

16.12. Montrer que les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation des branches régulières dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $\{\ln(iz+\sqrt{1-z^2})\}$ (domaine D de la fig. 6).
2. $\left\{\sqrt[3]{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}}\right\}$ (domaine D de la fig. 7).
3. $\{\ln(\sqrt{z^2+1}-\sqrt{z^2-1})\}$ (domaine D de la fig. 8).
4. $\{\sqrt[3]{\ln z}\}$ (domaine D de la fig. 9).
5. $\{\ln(\ln^2 z+\pi^2)\}$ (domaine D de la fig. 10).

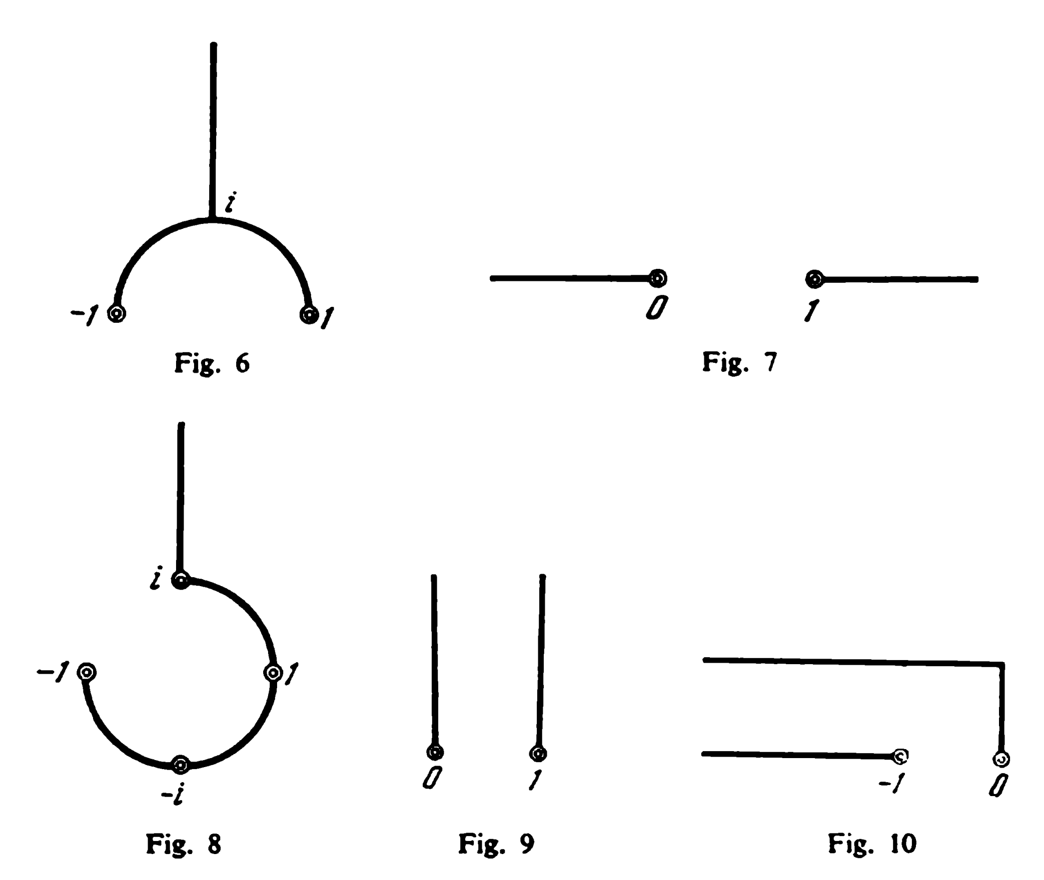


Fig. 6 Fig. 7 Fig. 8 Fig. 9 Fig. 10

6. $\{\sqrt{\ln z + \sqrt{\ln z}}\}$ (domaine D de la fig. 11).

7. $\{\ln(1+\sqrt{e^z+1})\}$ (domaine D de la fig. 12).

Dans les cas où le domaine D de séparation de la branche régulière n'est pas simplement connexe, on arrive souvent à mettre l'expression étudiée sous la forme d'une somme ou d'un produit d'expressions admettant la

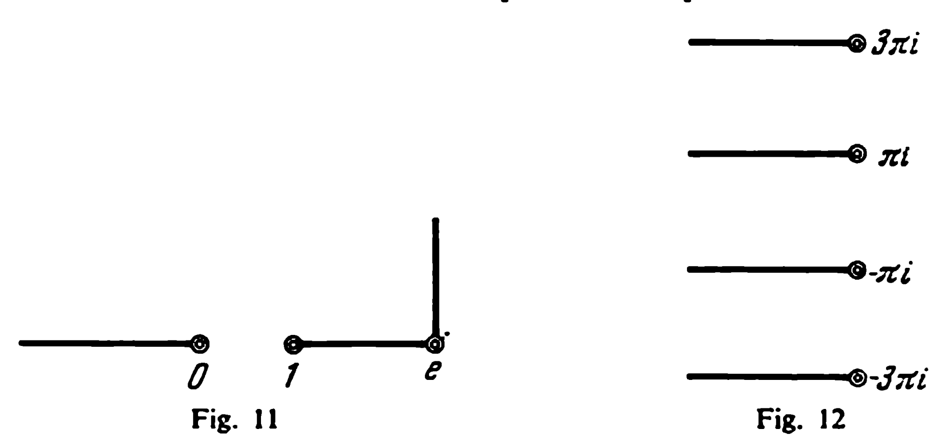


Fig. 11 Fig. 12

séparation d'une branche régulière dans des domaines simplement connexes plus étendus.

16.13. Montrer que l'expression multiforme $\{\sqrt{1-z^2}\}$ admet la séparation d'une branche régulière dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$.

Indication. Mettre l'expression étudiée sous la forme

$$\left\{iz\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\right\}$$

et montrer que l'expression $\{\sqrt{1-z^{-2}}\}$ admet la séparation d'une branche régulière dans tout le plan complexe élargi présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$.

16.14. Montrer que l'expression multiforme

$$\{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)\ldots(z-a_n)(z-b_n)}\}$$

admet la séparation d'une branche régulière dans tout le plan complexe présentant des coupures suivant les segments de droites $[a_k, b_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

16.15. Montrer que les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation des branches régulières dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $\left\{\ln\frac{z^2+2z+2}{z^2-2z+2}\right\}$ (domaine D de la fig. 13).

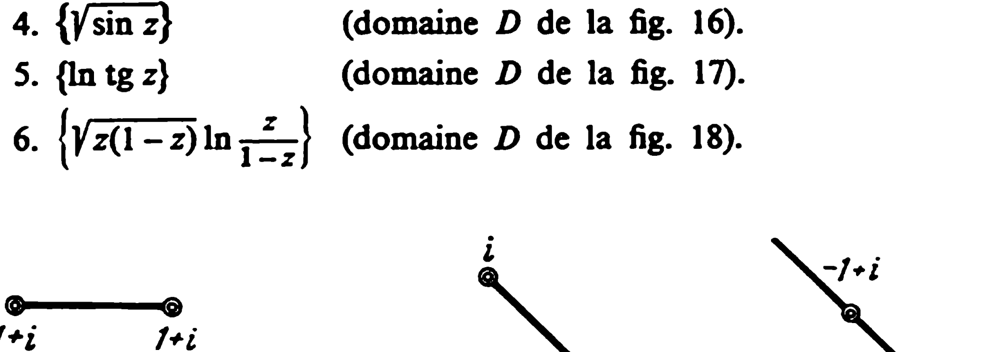
2. $\{\sqrt[4]{1-z^4}\}$ (domaine D de la fig. 14).

3. $\{\sqrt[3]{4z+z^5}\}$ (domaine D de la fig. 15).

4. $\{\sqrt{\sin z}\}$ (domaine D de la fig. 16).

5. $\{\ln \operatorname{tg} z\}$ (domaine D de la fig. 17).

6. $\left\{\sqrt{z(1-z)}\ln\frac{z}{1-z}\right\}$ (domaine D de la fig. 18).



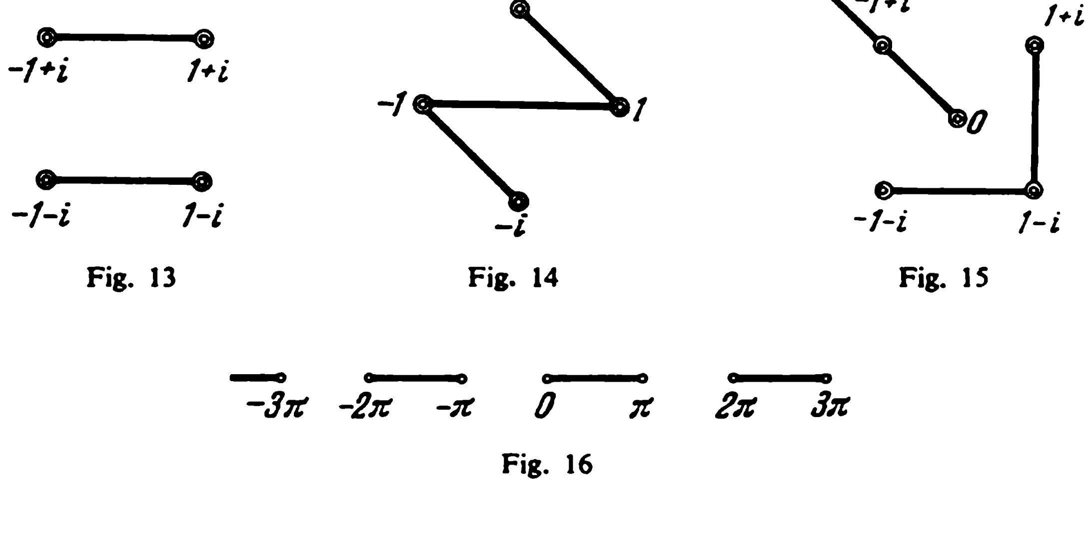


Fig. 13

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 16

Fig. 17

Fig. 18

§ 17. Calcul des valeurs des branches régulières

Si une expression multiforme admet la séparation d'une branche régulière dans un domaine D, alors, en règle générale, il existe plusieurs de ces branches. Pour dégager de l'ensemble entier de branches régulières une branche déterminée, il faut avoir une condition supplémentaire quelconque. D'habitude, en qualité de condition supplémentaire on donne la valeur de la branche en un certain point du domaine D.

17.01. Soit D un domaine simplement connexe privé des points $z=0$ et $z=\infty$, mais contenant le point $z=1$, et soit n un entier quelconque. Montrer que dans le domaine D il existe exactement une branche régulière $\varphi(z)$ de l'expression multiforme $\{\ln z\}$ satisfaisant à la condition $\varphi(1)=2\pi i n$.

17.02. Soit D un domaine simplement connexe privé des points $z=0$ et $z=\infty$, et soit n un entier supérieur à 1. Montrer que l'expression multiforme $\{\sqrt[n]{z}\}$ admet la séparation exactement de n branches régulières distinctes dans le domaine D et que les valeurs de ces branches en chaque point du domaine D sont deux à deux distinctes.

17.03. Soit D un domaine simplement connexe privé des points $z=0$ et $z=\infty$ mais contenant le point $z=1$. Dire combien de branches régulières

distinctes $\varphi(z)$, satisfaisant à la condition indiquée, admettent les expressions multiformes suivantes dans le domaine D :

1. $\{(z-1)\ln z\}$, $\varphi(1)=0$. 2. $\{z^z\}$, $\varphi(1)=1$. 3. $\{z^{iz}\}$, $\varphi(1)=1$.

4. $\left\{z^{\frac{1}{2}z}\right\}$, $\varphi(1)=1$. 5. $\left\{z^{\frac{1}{4}z}\right\}$, $\varphi(1)=1$. 6. $\{z^z\}$, $\varphi'(1)=1$.

17.04. Notons D_α tout le plan complexe présentant une coupure suivant la demi-droite $\arg z=\pi-\alpha$, où $-\pi<\alpha<\pi$, et notons $\varphi(z)$ la branche régulière de l'expression $\{\ln z\}$ dans le domaine D_α satisfaisant à la condition $\varphi(1)=0$. Montrer que

$$\varphi(z)=\ln|z|+i\arg z,$$

où, pour $\arg z$, on prend une détermination comprise dans l'intervalle $(-\pi-\alpha, \pi-\alpha)$.

17.05. Soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\ln(z+i)\}$ dans un domaine D satisfaisant à la condition $\varphi(1-i)=0$. Trouver la valeur de $\varphi(-1-i)$ dans les cas où :

1. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni d'une coupure suivant la demi-droite $[-i\infty, -i]$.

2. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni d'une coupure suivant la demi-droite $[-i, +i\infty]$.

Indication. En effectuant le changement de variable $z+i=z'$, utiliser le résultat du problème 17.04.

17.06. Soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\sqrt{z-e^{i\alpha}}\}$, $0<\alpha<\pi/2$, dans un domaine D satisfaisant à la condition $\varphi(0)=ie^{i\alpha/2}$. Trouver la valeur de $\varphi(e^{-i\alpha})$ dans les cas où :

1. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni d'une coupure suivant la semi-droite $[e^{i\alpha}+\infty e^{i\alpha}]$.

2. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni d'une coupure suivant la demi-droite $[e^{i\alpha}, e^{i\alpha}-\infty(e^{i\alpha}+i)]$.

Indication. Utiliser le résultat du problème 17.04 et la formule $\{\sqrt{\zeta}\}=$ $=\left\{\exp\left(\frac{1}{2}\ln\zeta\right)\right\}$.

17.07. Soit D tout le plan complexe présentant des coupures suivant les demi-droites $[-\infty, -1]$ et $[1, +\infty]$, et soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\ln(1-z^2)\}$ dans le domaine D satisfaisant à la condition $\varphi(0)=0$. Trouver

1. $\varphi(i)$. 2. $\varphi(-i)$. 3. $\varphi\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$. 4. $\varphi\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

Indication. Choisir les branches régulières des expressions $\{\ln(1-z)\}$ et $\{\ln(1+z)\}$ dans le domaine D de façon que leur somme soit égale à la fonction $\varphi(z)$.

17.08. Soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$ dans le domaine D satisfaisant à la condition $\varphi(0)=1$. Trouver la valeur de $\varphi(-3)$ dans les cas où :

1. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni de coupures suivant les demi-droites $[1, +\infty]$ et $[-1, -1+i\infty]$.

2. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni de coupures suivant les demi-droites $[1,\ 1-i\infty]$ et $[-1,\ -1+i\infty]$.

3. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni de coupures suivant les demi-droites $[1,\ 1-i\infty]$ et $[-1,\ -1-i\infty]$.

17.09. Soit D tout le plan complexe élargi présentant une coupure suivant le segment $[-1,\ 1]$. Notons $\varphi_1(z)$ la branche régulière de l'expression $\left\{\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right\}$ dans le domaine D satisfaisant à la condition $\varphi_1(+i0)=1$, et notons $\varphi_2(z)$ la branche régulière de l'expression $\left\{\ln\frac{1+z}{1-z}\right\}$ dans le domaine D satisfaisant à la condition $\varphi_2(-i0)=0$. Trouver les grandeurs de :

1. $\varphi_1(-i0)$. 2. $\varphi_1(-i)$. 3. $\varphi_2(+i0)$. 4. $\varphi_2(i)$.

17.10. Soit D tout le plan complexe élargi présentant une coupure suivant le segment de droite $[-i,\ i]$, et soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\left\{\ln\frac{1+iz}{1-iz}\right\}$ dans le domaine D satisfaisant à la condition $\varphi(1)=$ $=\pi i/2$. Trouver les valeurs de :

1. $\varphi(-0)$. 2. $\varphi(-1)$. 3. $\varphi(-\sqrt{3})$. 4. $\varphi(\infty)$.

17.11. Soit D tout le plan complexe présentant des coupures suivant les segments $[-2,\ -1]$ et $[1,2]$, et soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}\}$ dans le domaine D, positive dans l'intervalle $(-1,\ 1)$. Trouver les valeurs de :

1. $\varphi(3)$. 2. $\varphi(-3)$. 3. $\varphi(i)$. 4. $\varphi(-i)$.

17.12. Soit D tout le plan complexe présentant des coupures suivant les segments $[-1,\ i]$ et $[-i,\ 1]$, et soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\sqrt{1-z^4}\}$ dans le domaine D, positive dans l'intervalle $(-1,\ 1)$. Trouver les valeurs de

1. $\varphi\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. 2. $\varphi\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. 3. $\varphi\left(i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. 4. $\varphi\left(-i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

Dans ce qui suit, pour abréger l'écriture, l'expression : « la fonction $\varphi(z)$ est une branche régulière de l'expression multiforme $\{\mathcal{A}(z)\}$ satisfaisant à la condition $\varphi(z_0)=\omega_0$ », sera remplacée par la formule :

$$\varphi(z)=\mathcal{A}(z), \quad \varphi(z_0)=\omega_0 \quad (z\in D).$$

17.13. Soit D tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif, soient $\varphi_n(z)$ des fonctions définies par les égalités :

$$\varphi_1(z)=\ln^2 z, \quad \varphi_1(1)=0\ ; \quad \varphi_2(z)=z^x, \quad \varphi_2(1)=1\ ;$$
$$\varphi_3(z)=\frac{z-1}{\ln z}, \quad \varphi_3(1)=1\ ; \quad \varphi_4(z)=\sqrt{z}\ln z, \quad \varphi(2)>0,$$

et soit x un entier positif arbitraire. Trouver les grandeurs :

1. $\varphi_1(-x+i0)-\varphi_1(-x-i0)$. 2. $\varphi_2(-x+i0)-\varphi_2(-x-i0)$.
3. $\varphi_3(-x+i0)-\varphi_3(-x-i0)$. 4. $\varphi_4(-x+i0)-\varphi_4(-x-i0)$.

17.14. Soit D tout le plan complexe présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$, soit (z) une fonction définie par l'égalité

$$\varphi(z)=(1+z)^{\alpha}(z-1)^{1-\alpha},\ \varphi(2)>0\ \ (z\in D)\ \ ;\ \operatorname{Im}\alpha=0,$$

et soit $0<x<1$. Trouver la grandeur $\varphi(x+i0)-\varphi(x-i0)$.

17.15. Soient a et b deux points distincts à distances finies du plan complexe, et soit C une certaine courbe simple allant du point a au point b. Notons D tout le plan complexe présentant une coupure suivant la courbe C et notons $\varphi(z)$ une branche régulière arbitraire de l'expression $\left\{\ln\frac{z-a}{b-z}\right\}$ dans le domaine D. Montrer que pour chaque point z_0 de la courbe C différent des points a et b, l'égalité $\varphi(z_0^+)-\varphi(z_0^-)=2\pi i$ a lieu ; ici, le symbole $\varphi(z_0^{\pm})$ désigne la limite de la fonction $\varphi(z)$ lorsque le point z tend vers le point z_0 venant de droite (de gauche pour le signe $-$) par rapport à la courbe C.

17.16. Soient $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan complexe et C une courbe simple allant du point a au point b (ces points sont distincts et sont situés à distances finies). Montrer que, si le nombre $R>0$ est tellement grand que le disque $|z|<R$ contienne dans son intérieur la courbe C. l'égalité ci-dessous a lieu :

$$\int\limits_{|z|=R} f(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\,dz=2\pi i\int\limits_{C} f(z)\,dz$$

(ici, $\ln\frac{z-a}{b-z}$ désigne n'importe quelle branche régulière de cette expression dans le plan complexe présentant une coupure suivant la courbe C).

Indication. Utiliser le théorème de Cauchy.

17.17. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan complexe. Montrer que, pour $R>1$, les formules ci-dessous sont valables :

1. $$\int\limits_{|z|=R} f(z)\left(\ln\frac{z}{z-1}\right)^2 dz=4\pi i\int\limits_0^1 f(x)\ln\frac{x}{1-x}\,dx.$$

2. $$\int\limits_{|z|=R} f(z)\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha} dz=2i\sin\pi\alpha\int\limits_0^1 f(x)\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} dx\quad\left(-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}\right).$$

3. $$\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{\ln\dfrac{z}{z-1}}=-2\pi i\int\limits_0^1\frac{f(x)\,dx}{\left(\ln\dfrac{x}{1-x}\right)^2+\pi^2}$$

(la circonférence $|z|=R$ est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Dans les formules se trouvant au second membre des égalités ci-dessus, les expressions $\ln\frac{x}{1-x}$ et $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$ sont interprétées du point de vue de leur valeur arithmétique, tandis que dans les formules du premier membre on trouve les branches régulières de ces expressions dans le plan présentant une coupure suivant le segment $[0, 1]$, branches qui prennent des valeurs réelles sur le demi-axe réel négatif.

17.18. Soit $P(x)$ un polynôme. Montrer que toute fonction $f(z)$, régulière dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel positif, continue jusqu'à la frontière de ce domaine et satisfaisant à la condition

$$f(x+i0)-f(x-i0)=P(x)$$

pour tous les $x>0$, est de la forme $f(z)=-\frac{P(z)}{2\pi i}\ln z+g(z)$, où $g(z)$ est une fonction régulière dans tout le plan complexe, tandis que le symbole $\ln z$ désigne une branche régulière de cette expression dans le plan présentant une coupure suivant le demi-axe réel positif.

Indication. Utiliser le théorème de Morera pour montrer la régularité de la fonction $g(z)$ dans tout le plan complexe.

17.19. Trouver la forme générale d'une fonction $f(z)$ régulière dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel positif, continue jusqu'à la frontière de ce domaine, à l'exception du point $z=0$, et satisfaisant à l'une des conditions ci-dessous ($x>0$) :

1. $f(x+i0)-f(x-i0)=(1+x)^2\ln x$.
2. $f(x+i0)-f(x-i0)=\ln^2 x$.
3. $f(x+i0)-f(x-i0)=\sin\sqrt{x}$.
4. $f(x+i0)-f(x-i0)=\frac{\sin(\alpha\ln x)}{x-1}$.
5. $f(x+i0)-f(x-i0)=\frac{x+1}{\ln^2 x+\pi^2}$.
6. $f(x+i0)-f(x-i0)=\sqrt{x}\ln x$.
7. $f(x+i0)-f(x-i0)=\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.
8. $f(x+i0)-f(x-i0)=\frac{\sqrt{x}\ln x}{\ln^2 x+\pi^2}(x+1)$.

Lorsque l'expression multiforme n'est pas une combinaison de sommes et de produits de logarithmes et de puissances fractionnaires, mais comprend aussi des superpositions de ces expressions, le problème concernant le calcul des valeurs de la branche régulière choisie devient un peu plus compliqué.

17.20. Soit D tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel positif, et soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression $\{\ln(1+\sqrt{z})\}$ satisfaisant à la condition $\varphi(-1)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi i}{4}$. Trouver la valeur de $\varphi(4-i0)$.

Indication. Effectuer le changement $z'=1+\sqrt{z}$, où $\sqrt{z}$ représente la branche régulière de cette expression dans le domaine D, en choisissant la détermination de cette branche de façon que la condition concernant $\varphi(-1)$ soit satisfaite. Ensuite, trouver les transformations des points de la coupure dans le plan des z'.

17.21. Soit D tout le plan complexe présentant des coupures suivant les demi-droites $[-i\infty, -i]$ et $[i, +i\infty]$, et soit $\varphi(z)$ une fonction définie par les égalités

$$\varphi(z) = \ln(z + \sqrt{1+z^2}), \quad \varphi(0) = 0 \quad (z \in D).$$

Trouver les valeurs de :

1. $\varphi\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$. 2. $\varphi\left(-\frac{i}{2}\right)$. 3. $\varphi\left(\frac{5i}{3}+0\right)$.

17.22. Soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression multiforme $\{\ln(\sqrt{z} + 2\sqrt{1-z})\}$ satisfaisant à la condition $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{2}$. Trouver la valeur de $\varphi(4)$ dans les cas où :

1. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni de coupures suivant les demi-droites $[-\infty, 0]$ et $[1, 1+i\infty]$.
2. Le domaine D est représenté par tout le plan complexe muni de coupures suivant les demi-droites $[-i\infty, 0]$ et $[1, 1-i\infty]$.

17.23. Soit D tout le plan complexe présentant des coupures suivant les demi-droites $[-i\infty, 0]$ et $[1, 1+i\infty]$, et soit $\varphi(z)$ une fonction définie par les égalités

$$\varphi(z) = \ln\ln z, \quad \varphi(e^2) = \ln 2 \quad (z \in D).$$

Trouver la valeur de $\varphi(-e^{\pi})$.

17.24. Soit D le domaine représenté sur la fig. 19, et soit $\varphi(z)$ une fonction définie par les égalités

$$\varphi(z) = \sqrt{\pi^2 + \ln^2 z}, \quad \varphi(1) = \pi \quad (z \in D).$$

Trouver les valeurs de :

1. $\varphi(i)$. 2. $\varphi(-i)$.

17.25. Soit D le domaine représenté sur la fig. 20, et soit $\varphi(z)$ une fonction définie par les égalités

$$\varphi(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z+1}}, \quad \varphi(8) = 2 \quad (z \in D).$$

Trouver les valeurs de :

1. $\varphi(-3/4)$. 2. $\varphi(-2)$.

17.26. Soit D le domaine représenté sur la fig. 21 et soit $\varphi(z)$ une fonction définie par les égalités

$$\varphi(z) = \ln(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \varphi(0) = \pi i \quad (z \in D).$$

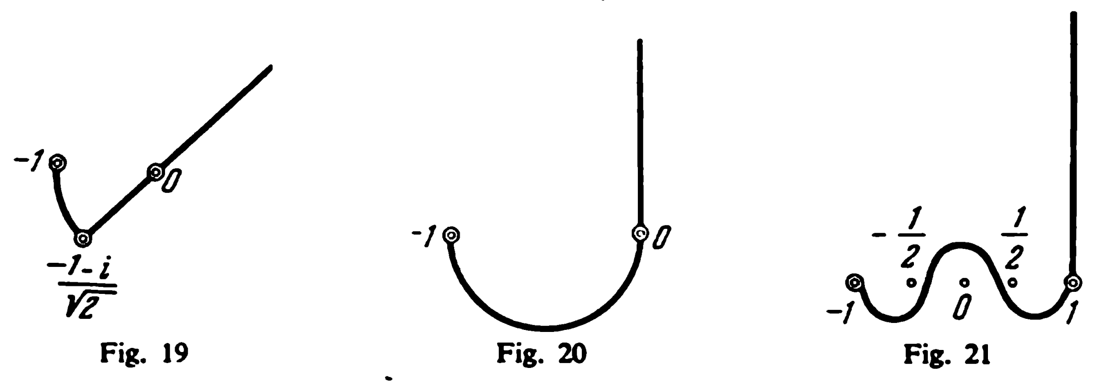


Fig. 19 Fig. 20 Fig. 21

Trouver les valeurs de :

1. $\varphi(1/2)$. 2. $\varphi(-1/2)$. 3. $\varphi(4i/3)$.

Il arrive souvent d'utiliser les méthodes de calcul des valeurs des branches régulières lors de la résolution du problème concernant la séparation d'une branche régulière dans des domaines non simplement connexes.

17.27. Montrer que l'expression $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$ n'admet pas la séparation d'une branche régulière dans le domaine D : $1<|z|<\infty$.

Indication. Notons D_1 le domaine D coupé suivant la demi-droite $[1, +\infty]$. Montrer que chaque branche régulière de l'expression $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$ dans le domaine D_1 a des valeurs distinctes aux points $z=x+i0$ et $z=x-i0$ pour $x>1$.

17.28. Soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression multiforme $\{\mathcal{A}(z)\}$ dans un domaine D défini par les inégalités

$$r<|z|<R, \quad 0<\arg z<2\pi.$$

Montrer que, si la fonction $\varphi(z)$ est continue dans le domaine D jusqu'à sa frontière et satisfait à la condition

$$\varphi(x+i0)=\varphi(x-i0) \quad (r<x<R),$$

alors elle est une branche régulière de l'expression $\{\mathcal{A}(z)\}$ dans la couronne $r<|z|<R$.

Indication. Utiliser le théorème de Morera.

17.29. Soit D_1 un domaine obtenu en pratiquant dans le domaine D un nombre fini de coupures lisses par morceaux sans décomposer ce domaine. Montrer que, si une fonction $\varphi(z)$ est une branche régulière de l'expression $\{A(z)\}$ dans le domaine D_1 et si cette fonction est uniformément continue dans ce domaine, alors elle est une branche régulière de l'expression $\{\mathcal{A}(z)\}$ dans le domaine D.

17.30. Dire si les expressions multiformes ci-dessous admettent la séparation de branches régulières dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $\left\{\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}\right\}$ $(D : 1<|z|<\infty)$.
2. $\{2\ln(z+1)-\ln(z-i)\}$ $(D : 1<|z|<\infty)$.
3. $\{\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}\}$ $(D : \operatorname{Re} z>0,\ |z-3|>2{,}5)$.
4. $\{\sqrt[3]{1-z^5}\}$ $(D : \operatorname{Re} z>0,\ z\notin[1, e^{2\pi i/5}],\ z\notin[1, e^{-2\pi i/5}])$.

17.31. Dire pour quel rapport entre les nombres α_1 et α_2 l'expression

$$\{\alpha_1 \ln(z-1)+\alpha_2 \ln z\}$$

admet la séparation d'une branche régulière dans le domaine $1<|z|<\infty$.

17.32. Dire pour quel rapport entre les nombres α_1, α_2 et α_3 l'expression

$$(z-1)^{\alpha_1}(z+1)^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$$

admet la séparation d'une branche régulière dans le domaine $1<|z|<\infty$.

17.33. Montrer que dans le plan présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif il existe une branche régulière de l'expression multiforme $\{\ln(1-\sqrt{z})\}$ satisfaisant à la condition $\varphi(2i)=-\pi i/2$.

RÉPONSES

17.03.

1. Une infinité. 2. Une infinité. 3. Une seule.
4. Une infinité. 5. Une infinité. 6. Une seule.

17.05.

1. πi. 2. $-\pi i$.

17.06.

1. $-(1-i)\sqrt{\sin\alpha}$. 2. $(1-i)\sqrt{\sin\alpha}$.

17.07.

1. $\ln 2$. 2. $\ln 2$. 3. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi i}{4}$. 4. $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi i}{4}$.

17.08.

1. $1-i\sqrt{3}$. 2. $1-i\sqrt{3}$. 3. $1+i\sqrt{3}$.

17.09.

1. -1. 2. $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$. 3. $-2\pi i$. 4. $-\frac{3}{2}\pi i$.

17.10.

1. $2\pi i$. 2. $\frac{3}{2}\pi i$. 3. $\frac{4}{3}\pi i$. 4. πi.

17.11.

1. $-\sqrt{40}$. 2. $-\sqrt{40}$. 3. $\sqrt{10}$. 4. $\sqrt{10}$.

17.12.

1. $-\frac{4i}{3}$. 2. $-\frac{4i}{3}$. 3. $\frac{4i}{3}$. 4. $\frac{4i}{3}$.

17.13.

1. $4\pi i\ln x$. 2. $2ix^{\alpha}\sin\pi\alpha$. 3. $\frac{2\pi i(x+1)}{\ln^2 x+\pi^2}$. 4. $2i\sqrt{x}\ln x$.

17.14.

$2i(1+x)^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\sin\pi\alpha$.

17.19.

1. $-\frac{(1+z)^2(\ln z-\pi i)^2}{4\pi i}+g(z)$, $\ln z|_{z=-1}=\pi i$, $g(z)$ est une fonction entière.
2. $-\frac{1}{6\pi i}\ln z(\ln z-\pi i)(\ln z-2\pi i)+g(z)$, $\ln z|_{z=-1}=\pi i$.
3. $\frac{1}{2}\sin\sqrt{z}+g(z)$, $\sqrt{z}|_{z=-1}=i$.
4. $\frac{1}{2i(z-1)}\left(\frac{e^{i\alpha\ln z}}{1-e^{-2\pi i\alpha}}-\frac{e^{-i\alpha\ln z}}{1-e^{2\pi i\alpha}}\right)+g(z)$, $\ln z|_{z=-1}=\pi i$.
5. $\frac{1}{2\pi i}\frac{z+1}{\ln z-\pi i}+g(z)$, $\ln z|_{z=-1}=\pi i$.

6. $\frac{1}{2}\sqrt{z}(\ln z-\pi i)+g(z),\quad \ln z|_{z=-1}=\pi i.$

7. $\frac{3-i\sqrt{3}}{6}\frac{\ln z}{\sqrt[3]{z}}-\frac{2}{3}\pi i\frac{1}{\sqrt[3]{z}}+g(z),\quad \ln z|_{z=-1}=\pi i,\quad \sqrt[3]{z}|_{z=-1}=e^{\pi i/3}.$

8. $\frac{(z+1)\sqrt{z}}{2(\ln z-\pi i)}+g(z),\quad \ln z|_{z=-1}=\pi i,\quad \sqrt{z}|_{z=-1}=i.$

17.20. $\pi i.$

17.21.

1. $\frac{\pi i}{4}$. 2. $-\frac{\pi i}{6}$. 3. $\ln 3+\frac{\pi i}{2}$.

17.22.

1. $2\ln 2+\frac{\pi i}{3}$. 2. $2\ln 2-\frac{\pi i}{3}$.

17.23.

$\ln\pi+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7}{4}\pi i.$

17.24.

1. $-\frac{1}{2}\pi i\sqrt{5}$. 2. $\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$.

17.25.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 2. $\sqrt[4]{2}e^{-\pi i/8}$.

17.26.

1. $\frac{13}{6}\pi i$. 2. $\frac{11}{6}\pi i$. 3. $-\ln 3+2\pi i$.

17.30.

1. Oui. 2. Non. 3. Oui. 4. Oui.

17.31.

$\alpha_1+\alpha_2=0.$

17.32.

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ est égal à un entier.

§ 18. Calcul des valeurs des fonctions analytiques dans un domaine

Le calcul des valeurs des branches régulières des expressions multiformes représente un cas particulier du problème concernant le calcul des valeurs d'une fonction analytique dans un domaine représentée par l'expression multiforme considérée.

Désignons par le symbole $(\ln z)_\Gamma$ la grandeur

$$(\ln z)_\Gamma=\int_\Gamma\frac{dt}{t},$$

où Γ est une ligne polygonale arbitraire allant du point 1 au point z sans passer par les points 0 et ∞. Cette grandeur est une fonction analytique dans tout le plan complexe privé du point $z=0$ (voir § 15).

Par le symbole $(\ln z)$ nous allons désigner la grandeur

$$(\ln z)=\ln|z|+i\arg z,\qquad -\pi<\arg z\leq\pi$$

qui est appelée *détermination principale* de $\ln z$. La détermination principale de $\ln z$ est une branche régulière de l'expression multiforme $\{\ln z\}$ dans le plan présentant une coupure suivant la demi-droite $[-\infty, 0]$; elle est réelle pour les valeurs positives de z.

18.01. Soit z un point situé en dehors du demi-axe réel négatif. Montrer que :

1. Si une ligne polygonale Γ ne coupe pas le demi-axe réel négatif, alors $(\ln z)_\Gamma=(\ln z)$.

2. Si une ligne polygonale Γ coupe le demi-axe réel négatif une fois allant de bas en haut, alors

$$(\ln z)_\Gamma=(\ln z)-2\pi i.$$

18.02. Soit z un point situé en dehors du demi-axe réel négatif. Pour chaque ligne polygonale Γ allant du point 1 au point z sans passer par les points 0 et ∞, notons $n^+(\Gamma)$ le nombre d'intersections de haut en bas avec la demi-droite $[-\infty, 0]$ et $n^-(\Gamma)$ le nombre d'intersections de bas en haut. Montrer que

$$(\ln z)_\Gamma=(\ln z)+2\pi i(n^+(\Gamma)-n^-(\Gamma)).$$

18.03. Soit $\varphi(z)$ une branche régulière de l'expression multiforme $\{\ln z\}$ dans le domaine représenté sur la fig. 22 satisfaisant à la condition $\varphi(1)=0$. Trouver les valeurs de :

1. $\varphi(-1)$. 2. $\varphi(-2)$. 3. $\varphi(-3)$.

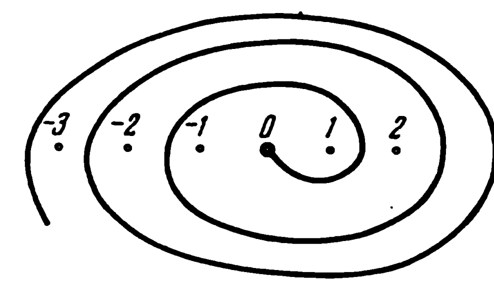


Fig. 22

18.04. Trouver le résultat du prolongement analytique (voir la définition qui précède le problème 15.18) de la fonction $e^{z(\ln z)}$ le long de la ligne polygonale Γ représentée sur la fig. 23.

18.05. Trouver le résultat du prolongement analytique des fonctions $\varphi(z)$ ci-dessous le long de la ligne polygonale Γ représentée sur la fig. 24 :

1. $\varphi(z)=\sqrt[3]{z}$, $\varphi(1)=1$. 2. $\varphi(z)=\ln^2 z$, $\varphi(1)=0$.
3. $\varphi(z)=e^{z(\ln z)}$, 4. $\varphi(z)=(1+\sqrt{z})\ln z$, $\varphi(1)=4\pi i$.

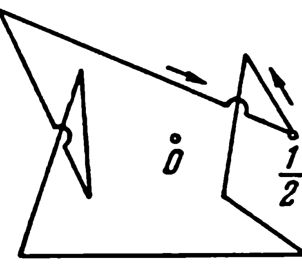


Fig. 23

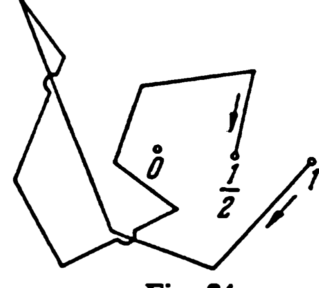


Fig. 24

18.06. Trouver le résultat du prolongement analytique des fonctions suivantes $\varphi(z)$ le long des lignes polygonales indiquées entre parenthèses :

1. $\varphi(z)=\sqrt[3]{1-z^2}$, $\varphi(0)=1$ (Γ de la fig. 25).
2. $\varphi(z)=\sqrt{1-z}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$, $\varphi'(0)=2i$ (Γ de la fig. 26).
3. $\varphi(z)=\ln\frac{z^2+1}{z^2-1}$, $\varphi(0)=\pi i$ (Γ de la fig. 27).
4. $\varphi(z)=\sqrt[4]{1-z^4}$, $\varphi(0)=-1$ (Γ de la fig. 28).
5. $\varphi(z)=\sqrt[3]{(z^2-2)(z^2-4)}$, $\varphi(0)=2$ (Γ de la fig. 29).
6. $\varphi(z)=\sqrt{z}+\sqrt[3]{z-1}$, $\varphi(9)=5$ (Γ de la fig. 30).

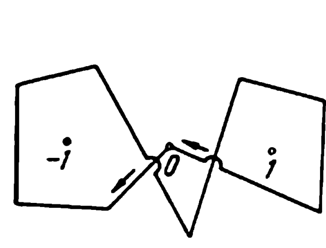


Fig. 25

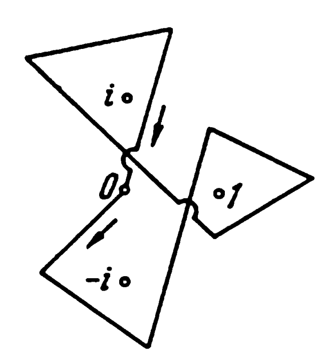


Fig. 26

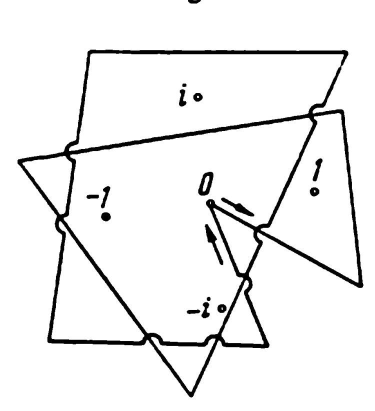


Fig. 27

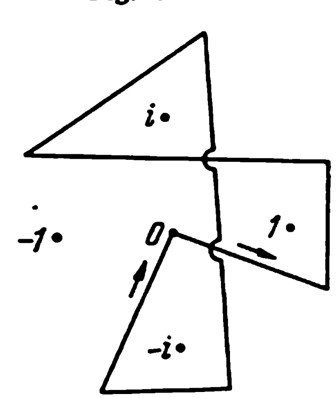


Fig. 28

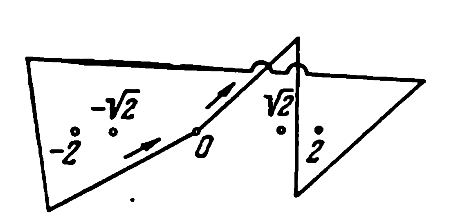


Fig. 29

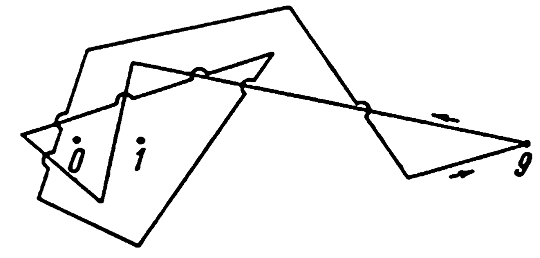


Fig. 30

* * *

En résolvant des problèmes d'ordre théorique, il est commode d'utiliser la grandeur $\nu(z_0, \Gamma)$ qui est l'indice de la ligne polygonale Γ par rapport au point z_0 (qui se trouve en dehors de cette ligne polygonale). Cette grandeur est déterminée par la formule

$$\nu(z_0, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

18.07. Soient $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)$ des fonctions régulières dans tout le plan complexe, et soient $c_1, \ldots, c_m$ des points arbitraires à distances finies. Notons $f_0(z)$ la branche régulière de l'expression

$$\{\varphi_1(z) \ln (z - c_1) + \ldots + \varphi_m(z) \ln (z - c_m)\}$$

dans le voisinage d'un point quelconque z_0 distinct de tous les points $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Notons $f_\Gamma(z)$ la branche régulière de la même expression et dans le même voisinage du point z_0 obtenue à partir de la branche $f_0(z)$ par prolongement analytique le long d'une ligne polygonale fermée Γ (d'origine et d'extrémité z_0) ne passant pas par les points $c_1, \ldots, c_m, \infty$. Montrer que

$$f_\Gamma(z) - f_0(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(z) \nu(c_k, \Gamma).$$

18.08. Soit D un domaine, ne comportant pas le point $z = \infty$, dont la frontière est constituée par m courbes simples fermées lisses par morceaux $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ (C_0 désigne la courbe frontière extérieure). Désignons par $f(z)$ une fonction régulière dans le domaine D et continue jusqu'à sa frontière, et par $(F(z))_\Gamma$ la fonction analytique dans le domaine D $(F(z))_\Gamma = \int_\Gamma f(t)\, dt$ (Γ est une ligne polygonale arbitraire allant du point z_0 au point z tout en restant dans le domaine D). Montrer que pour chaque ligne polygonale fermée Γ, la formule ci-dessous est valable :

$$(F(z))_\Gamma = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \nu(c_k, \Gamma),$$

où c_k est un point arbitraire de la courbe C_k, et

$$\mu_k = \int_{C_k} f(z)\, dz \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

18.09. Soit $(F(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine D, et soient $\{F_k(z)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, tous les éléments de cette fonction situés au-dessus d'un certain point $z_0 \in D$. Montrer que :

1. Si

$$F_k(z) = F_0(z) + A_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où A_k sont des constantes, alors la fonction $(F'(z))_\Gamma$ est régulière dans le domaine D.

2. Si

$$F_k(z) = A_k F_0(z), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où A_k sont des constantes, et si $(F(z))_\Gamma \not\equiv 0$, alors la fonction $\frac{(F'(z))_\Gamma}{(F(z))_\Gamma}$ est

régulière dans le domaine D privé d'un ensemble dénombrable de points ne comportant pas de points limites dans le domaine D.

3. Si

$$F_k(z) = A_k F_0(z) + B_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où A_k et B_k sont des constantes, et si la fonction $(F(z))_\Gamma$ n'est pas identiquement constante, alors la fonction $\frac{(F''(z))_\Gamma}{(F'(z))_\Gamma}$ est régulière dans le domaine D privé d'un ensemble dénombrable de points ne comportant pas de points limites dans le domaine D.

4. Si

$$F_k(z) = \frac{A_k F_0(z) + B_k}{C_k F_0(z) + D_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où A_k, B_k, C_k, D_k sont des constantes, et si la fonction $(F(z))_\Gamma$ n'est pas identiquement constante, alors la fonction

$$\frac{(F'''(z))_\Gamma}{(F'(z))_\Gamma} - \frac{3}{2}\left(\frac{(F''(z))_\Gamma}{(F'(z))_\Gamma}\right)^2$$

est régulière dans le domaine D privé d'un ensemble dénombrable de points ne comportant pas de points limites dans le domaine D.

18.10. Soit D un domaine, ne comportant pas le point $z = \infty$, dont la frontière est constituée par m courbes simples fermées lisses par morceaux $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ (C_0 désigne la courbe frontière extérieure). Montrer qu'une fonction $(F(z))_\Gamma$ analytique dans la fermeture du domaine D possède une partie réelle uniforme dans ce domaine si, et seulement si, les conditions ci-dessous sont satisfaites :

a) La fonction $(F'(z))_\Gamma$ est régulière dans le domaine D.

b) Les grandeurs

$$\mu_k = \int_{C_k} F'(z)\, dz, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

sont des nombres purement imaginaires.

18.11. Soit $(F(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans la couronne $r < |z| < R$, et soit $|F(z)|$ une fonction uniforme dans cette couronne. Montrer que $(F(z))_\Gamma = (z^\alpha)_\Gamma \varphi(z)$, où $\varphi(z)$ est une fonction régulière dans la couronne $r < |z| < R$, α étant une constante réelle.

18.12. Soit $(F(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans tout le plan complexe privé des points $c_1, c_2, \ldots, c_m$, qui sera appelé tout court domaine D. Notons $F_0(z)$ l'élément initial de cette fonction, et $F_\Gamma(z)$ l'élément correspondant à la ligne polygonale Γ. Montrer que, si pour toute ligne polygonale fermée Γ contenue dans le domaine D, l'égalité ci-dessous a lieu

$$F_\Gamma(z) = F_0(z) + \varphi_\Gamma(z),$$

où $\varphi_\Gamma(z)$ sont des fonctions régulières dans le domaine D, alors

$$(F(z))_\Gamma = \psi_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \psi_k(z) \ln (z - c_k),$$

où $\psi_k(z)$ sont des fonctions régulières dans le domaine D.

18.13. Soient a et b deux points distincts situés à distances finies, C une courbe simple lisse par morceaux allant du point a au point b, et $\varphi(z)$ une fonction régulière dans tout le plan complexe. Notons $f_0(z)$ la fonction définie par l'égalité

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad (z \notin C).$$

Montrer que la fonction $f_0(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de toute ligne polygonale Γ, ne passant pas par les points a et b, et que le résultat $f_\Gamma(z)$ du prolongement analytique de la fonction $f_0(z)$ le long de n'importe quelle ligne polygonale fermée Γ (d'origine et d'extrémité z) est égal à

$$f_\Gamma(z) = f_0(z) + \varphi(z)[\nu(b, \Gamma) - \nu(a, \Gamma)].$$

18.14. Montrer que les fonctions régulières ci-dessous peuvent être prolongées analytiquement le long de toute ligne polygonale Γ ne passant pas par les points 0 et ∞, et calculer la grandeur $f_\Gamma(z) - f_0(z)$, où $f_\Gamma(z)$ est le résultat du prolongement le long d'une ligne polygonale fermée Γ dont l'origine et l'extrémité coïncident au point z :

1. $f_0(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x - z} \quad (z \notin [0, +\infty])$.

2. $f_0(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{(t+1)^2}\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$.

3. $f_0(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{(t+1)(t+2)}\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$.

4. $f_0(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2z^2}}{t+1}\,dt \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{4}\right)$.

5. $f_0(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-tz}}{t+1}\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$.

* * *

Dans les cas où l'expression multiforme ne peut pas être mise sous la forme de sommes et de produits de logarithmes et de puissances, le problème lié au calcul des valeurs d'une fonction analytique devient un peu plus compliqué. En résolvant ce problème, il est utile de faire appel au *théorème de la monodromie :*

Soit $(F(z))_\Gamma$ une fonction analytique dans un domaine D. Si les lignes polygonales Γ et Γ' sont homotopes dans le domaine D, alors $(F(z))_\Gamma = (F(z))_{\Gamma'}$.

18.15. Trouver le résultat du prolongement analytique de la fonction

$$f_0(z)=\ln\ln\sqrt{z},\quad f_0(e^{2\pi})=\ln\pi\quad (|z-e^{2\pi}|<e^{2\pi}-1),$$

le long des lignes polygonales Γ représentées sur la fig. 31 (a, b, c, d).

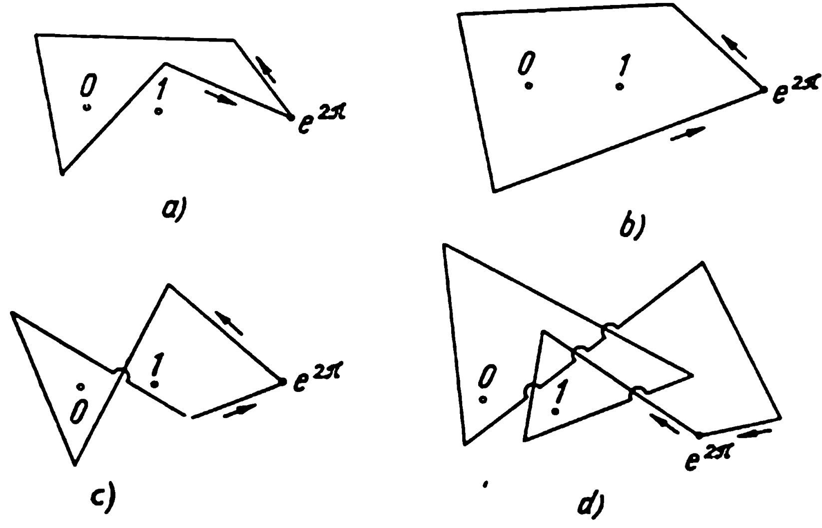


Fig. 31

18.16. Désignons par γ_1 la circonférence $|z-i|=1$, et par γ_2 la circonférence $|z+i|=1$ (les deux circonférences sont parcourues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Trouver le résultat du prolongement analytique de la fonction

$$f_0(z)=\ln(z+\sqrt{1+z^2}),\ f_0(0)=0\ \ (|z|<1)$$

le long des courbes :

1. γ_1. 2. γ_2. 3. γ_1^2. 4. γ_2^2. 5. $\gamma_1\gamma_2$. 6. $\gamma_2\gamma_1$.

Nota. Par le symbole $\Gamma_1\Gamma_2$ on désigne, comme d'habitude, une courbe obtenue en parcourant d'abord la courbe Γ_1, ensuite la courbe Γ_2.

18.17. Trouver le résultat du prolongement analytique des fonctions ci-dessous le long des lignes polygonales Γ indiquées entre parenthèses :

1. $f_0(z)=\ln(1+\sqrt{z})$, $f(4)=\ln 3$ $(|z-4|<3)$ (Γ de la fig. 32).

2. $f_0(z)=\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})$, $f_0\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi i}{4}\left(\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\right)$ (Γ de la fig. 33).

3. $f_0(z)=\sqrt{\ln z}$, $f_0(e^4)=-2$ $(|z-e^4|<e^4-1)$ (Γ de la fig. 34).

4. $f_0(z)=\sqrt[3]{z+\sqrt{z}}$, $f_0(4)=\sqrt[3]{2}$ $(|z-4|<3)$ (Γ de la fig. 35).

5. $f_0(z)=\sqrt{iz+\sqrt{1-z^2}}$, $f_0(0)=i$ $(|z|<1)$ (Γ de la fig. 36).

Dans les problèmes qui suivent, nous allons noter $f_0(z)$ l'élément initial d'une fonction analytique dans un domaine D, et $f_\Gamma(z)$ l'élément de la même

fonction correspondant à une ligne polygonale fermée Γ contenue dans le domaine D et ayant pour origine et pour extrémité le point $z_0 \in D$, où est défini l'élément initial.

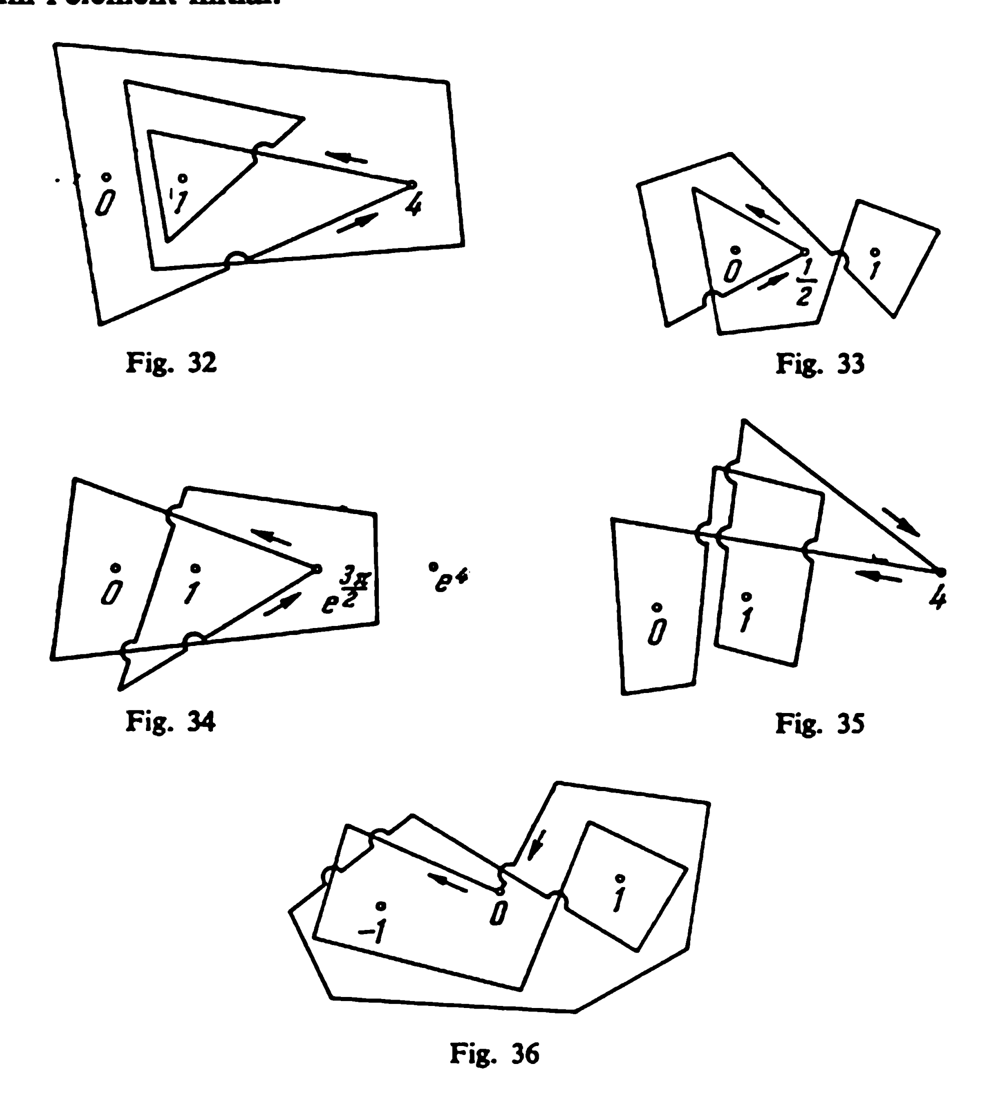


Fig. 32

Fig. 33

Fig. 34

Fig. 35

Fig. 36

18.18. Soit $f_0(z)$ une fonction définie par les égalités

$$f_0(z) = \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad f_0(0) = 0 \quad (|z| < 1).$$

Notons γ_1 la circonférence $|z-1| = 1$, et γ_2 la circonférence $|z+1| = 1$ (les deux circonférences sont parcourues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Trouver $f_\Gamma(z)$ dans les cas où :

1. $\Gamma = \gamma_1$. 2. $\Gamma = \gamma_2$. 3. $\Gamma = \gamma_1\gamma_2$. 4. $\Gamma = \gamma_2\gamma_1$.
5. $\Gamma = \gamma_1^2$. 6. $\Gamma = \gamma_2^2$. 7. $\Gamma = (\gamma_1\gamma_2)^n$. 8. $\Gamma = (\gamma_1\gamma_2\gamma_1)^{2n}$.

18.19. Soit $f_0(z)$ une fonction définie par les égalités

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}, \quad f_0'(0) = 1 \quad (|z| < 1).$$

Notons γ_k, où $k=1, 2, 3, 4$, la circonférence $|z-i^k|=1$. Trouver la fonction $f_\Gamma(z)$ dans les cas où :

1. $\Gamma=\gamma_k$. 2. $\Gamma=\gamma_k^2$. 3. $\Gamma=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. 4. $\Gamma=\gamma_1\gamma_3$.
5. $\Gamma=\gamma_2\gamma_4$. 6. $\Gamma=(\gamma_1\gamma_3)^2(\gamma_2\gamma_4)^2$. 7. $\Gamma=\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1$.
8. $\Gamma=(\gamma_3\gamma_1)^2(\gamma_4\gamma_2)^2$.

18.20. Soit $f_0(z)$ une fonction définie par les égalités

$$f_0(z)=\int_0^z \sqrt[3]{1-\zeta^3}\, d\zeta, \quad f_0'(0)=1 \quad (|z|<1).$$

Notons γ_k, où $k=1, 2, 3$, la circonférence $|z-e^{2k\pi i/3}|=1$. Trouver la fonction $f_\Gamma(z)$ dans les cas où :

1. $\Gamma=\gamma_k$. 2. $\Gamma=\gamma_k^2$. 3. $\Gamma=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. 4. $\Gamma=\gamma_3\gamma_2\gamma_1$.
5. $\Gamma=\gamma_1\gamma_3\gamma_2$. 6. $\Gamma=\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2$ 7. $\Gamma=\gamma_3^2\gamma_2^2\gamma_1^2$. 8. $\Gamma=\gamma_k^3$.

18.21. Soient $a_1, a_2, \ldots, a$ des points situés sur la circonférence $|z|=1$, et soit $f_0(z)$ une fonction définie par l'égalité

$$f_0(z)=\int_0^z (\zeta-a_1)^{\alpha_1}(\zeta-a_2)^{\alpha_2}\ldots(\zeta-a_m)^{\alpha_m}\, d\zeta \quad (|z|<1),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des nombres réels. Montrer que, pour une ligne polygonale fermée arbitraire Γ ne passant pas par les points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et ∞, l'égalité $f_\Gamma(z)=e^{i\varphi}f_0(z)+A$ a lieu, où φ est une constante réelle, A étant une constamc complexe (les deux constantes dépendent de la ligne polygonale Γ).

RÉPONSES

18.03.
1. πi. 2. $\ln 2+3\pi i$. 3. $\ln 3+5\pi i$.

18.04. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

18.05.
1. $-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1+i\sqrt{3})$. 2. $(\ln 2+2\pi i)^2$. 3. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 4. $-\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln 2$.

18.06.
1. $\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. 2. $4\pi i$. 3. πi. 4. i. 5. 2. 6. $2-i\sqrt{3}$.

18.14.
1. $-2\pi i e^{-z}\nu(0, \Gamma)$. 2. $2\pi i z e^z\nu(0, \Gamma)$. 3. $2\pi i(e^{2z}-e^z)\nu(0, \Gamma)$.
4. $-2\pi i e^{-z^2}\nu(0,\Gamma)$. 5. $-2\pi i e^{z^2}\nu(0,\Gamma)$.

18.15.
a) $\ln(\pi\sqrt{2})+\dfrac{\pi i}{4}$; *b)* $\ln(\pi\sqrt{2})+\dfrac{\pi i}{4}$; *c)* $\ln(\pi\sqrt{2})-\dfrac{\pi i}{4}$; *d)* $\ln(\pi\sqrt{2})+\dfrac{9\pi i}{4}$.

18.16.
1. πi. 2. $-\pi i$. 3. 0. 4. 0. 5. $2\pi i$. 6. $-2\pi i$.

18.17.

1. πi. 2. $\frac{7\pi i}{4}$. 3. $-\sqrt{2\pi}-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 4. $\sqrt[3]{6}e^{2\pi i/3}$. 5. i.

18.18.

1. $\pi-f_0(z)$. 2. $-\pi-f_0(z)$. 3. $f_0(z)+2\pi$. 4. $f_0(z)-2\pi$.
5. $f_0(z)$. 6. $f_0(z)$. 7. $f_0(z)+2\pi n$. 8. $f_0(z)$.

18.19.

Si l'on note $a=\int_0^1 (1-x^4)^{-1/2}\,dx$, alors

1. $2ai^k-f_0(z)$. 2. $f_0(z)$. 3. $f_0(z)$. 4. $f_0(z)+4ai$.
5. $f_0(z)-4a$. 6. $f_0(z)-8a(1-i)$.
7. $f_0(z)$. 8. $f_0(z)+8a(1-i)$.

18.20.

Si l'on note $a=\int_0^1 (1-x^3)^{1/3}\,dx$, alors

1. $ia\sqrt{3}e^{\frac{\pi(k-1)}{3}}+e^{\frac{2\pi i}{3}}f_0(z)$. 2. $ia\sqrt{3}e^{\frac{2k-1}{3}\pi i}-e^{\frac{\pi i}{3}}f_0(z)$.
3. $f_0(z)$. 4. $-3\sqrt{3}aie^{\pi i/3}+f_0(z)$.
5. $3\sqrt{3}aie^{2\pi i/3}+f_0(z)$. 6. $3ai\sqrt{3}e^{2\pi i/3}+f_0(z)$.
7. $f_0(z)$. 8. $f_0(z)$.

CHAPITRE IV

POINTS SINGULIERS. SÉRIE DE LAURENT. RÉSIDUS

§ 19. Points singuliers isolés de caractère uniforme

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $0<|z-a|<\varrho$ (ou bien dans la couronne $\varrho<|z|<\infty$ si $a=\infty$) sans être définie au point $z=a$. Dans ce cas, le point a est appelé *point singulier isolé de caractère uniforme* pour la fonction $f(z)$.

Suivant le comportement de la fonction $f(z)$ à proximité du point $z=a$, on distingue les trois types de points singuliers isolés de caractère uniforme :

1. Si la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ existe et est finie, le point $z=a$ est appelé *point singulier éliminable* pour la fonction $f(z)$.

2. Si la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ existe mais est égale à l'infini, le point $z=a$ est appelé *pôle* de la fonction $f(z)$.

3. Si la limite $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ n'existe pas, le point $z=a$ est appelé *point singulier essentiel* de la fonction $f(z)$.

19.01. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier éliminable pour les fonctions ci-dessous :

1. $\frac{z^2-1}{z-1}$ $(a=1)$. 2. $\frac{\sin z}{z}$ $(a=0)$. 3. $\frac{z}{\operatorname{tg} z}$ $(a=0)$.

4. $\frac{1-\cos z}{z^2}$ $(a=0)$. 5. $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$ $(a=0)$.

6. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$ $(a=0)$. 7. $\frac{1}{\cos^2 z}-\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$.

8. $\frac{z^2-1}{z^3+1}$ $(a=\infty)$.

19.02. Montrer que le point $z=a$ est un pôle des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{z}$ $(a=0)$. 2. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ $(a=i)$. 3. $\frac{z^2+1}{z+1}$ $(a=\infty)$.

4. $\frac{z}{1-\cos z}$ $(a=0)$. 5. $\frac{z}{(e^z-1)^2}$ $(a=0)$. 6. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}$ $(a=\infty)$.

7. $\frac{z}{e^z+1}$ $(a=\pi i)$. 8. $\operatorname{tg}\pi z\left(a=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \ldots\right)$.

19.03. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières au point $z=a$, et soit $f(a)=g(a)=0$. Montrer que

1. $\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}$. 2. $\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\left\{\frac{g'(z)f^2(z)}{f'(z)g^2(z)}\right\}$.

Remarque. Il est plus commode d'utiliser la première formule pour lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$ au point $a \neq \infty$, et la deuxième formule pour $a = \infty$.

19.04. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières au point $z=a$, et soit $f(a)=g(a)=0$. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier isolé de caractère uniforme pour la fonction $F(z)=f(z)/g(z)$ et qu'il ne peut pas être un point singulier essentiel.

19.05. Soit $z=a$ un point singulier isolé de caractère uniforme pour une fonction $f(z)$. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier essentiel pour la fonction $f(z)$ si, et seulement si, il existe deux suites $z_1', z_2', \ldots$ et $z_1'', z_2'', \ldots$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} z_n' = \lim_{n\to\infty} z_n'' = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n') = A, \ \lim_{n\to\infty} f(z_n'') = B, \ A \neq B.$$

19.06. Montrer que le point $z=\infty$ est un point singulier essentiel pour la fonction $\sin z$.

Indication. Utiliser le résultat du problème 19.05 en posant $z_n' = n\pi$, $z_n'' = \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $n=1, 2, \ldots$

19.07. Montrer que le point $z=a$ est un point singulier essentiel des fonctions ci-dessous :

1. e^z $(a=\infty)$. 2. e^{-z^2} $(a=\infty)$. 3. $\sin\frac{\pi}{z^2}$ $(a=0)$.

4. $z^2\cos\frac{\pi}{z}$ $(a=0)$. 5. $e^{\operatorname{tg} z}$ $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$. 6. $\sin(e^z)$ $(a=\infty)$.

7. $\cos\frac{z}{z+1}$ $(a=-1)$. 8. $\sin\frac{\pi}{z^2+1}$ $(a=-i)$.

19.08. Trouver tous les points singuliers isolés de caractère uniforme pour les fonctions ci-dessous et déterminer leur type :

1. $\frac{z}{\sin z}$. 2. $\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$. 3. $z^2\sin\frac{z}{z+1}$. 4. $\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$.

5. $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$. 6. $z(e^{\frac{1}{z}}-1)$. 7. $e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}}$. 8. $\sin(e^{\frac{1}{z}})$.

* * *

19.09. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $0<|z-a|<r$, et supposons que le point a soit un point singulier éliminable pour cette fonction. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans le disque $|z-a|<r$.

Indication. Appliquer la formule intégrale de Cauchy à la fonction $f(z)$ dans le domaine $D_\varrho : \varrho<|z-a|<r$, ensuite faire tendre ϱ vers zéro.

19.10. Montrer que le point singulier isolé de caractère uniforme $z=a$ est un point singulier éliminable pour une fonction $f(z)$ si l'une des deux

conditions ci-dessous est satisfaite (les conditions sont citées dans l'ordre d'affaiblissement des restrictions):

1. La fonction $f(z)$ est bornée dans un certain voisinage du point $z=a$.

2. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0.$ 3. $\lim\limits_{\varrho\to 0}\int\limits_{|z-a|=\varrho}|f(z)|\,|dz|=0.$

19.11. Soit $z=a$ un point singulier isolé de caractère uniforme pour une fonction $f(z)$ satisfaisant dans un certain voisinage de ce point à l'inégalité $|f(z)|<M|z-a|^{-m}$, où M et m sont des constantes positives. Montrer que le point $z=a$ ne peut pas être un point singulier essentiel de la fonction $f(z)$.

Indication. Examiner la fonction $(z-a)^{[m]+1}f(z)$.

19.12. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $0<|z-a|<r$ possédant un pôle au point $z=a$. Montrer que la fonction $g(z)$, définie dans le disque $|z-a|<r$ par les égalités

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}\ (0<|z-a|<r),\ g(a)=0,$$

est régulière dans un certain voisinage du point $z=a$.

* * *

Il existe en outre une classification plus détaillée des pôles, mais elle exige l'introduction d'une notion préliminaire.

Le point $z=a$ en lequel une fonction $f(z)$ est régulière est appelé *zéro d'ordre* $m\geq 1$ (ou *de multiplicité* m) *de cette fonction* si

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0,\quad f^{(m)}(a)\neq 0.$$

Le point $z=\infty$ est appelé zéro d'ordre (ou de multiplicité) $m\geq 1$ pour la fonction $f(z)$, qui est régulière en ce point, si la fonction $f_1(\zeta)=f(1/\zeta)$ a un zéro d'ordre m au point $\zeta=0$.

Si la fonction $f(z)$ possède au point $z=a$ un pôle, alors la fonction $1/f(z)$ a un zéro au point $z=a$ (voir le problème 19.12). L'ordre du zéro de la fonction $1/f(z)$ au point $z=a$ est appelé *ordre* (ou multiplicité) *du pôle* de la fonction $f(z)$ au point $z=a$.

19.13. Soit $f(z)$ une fonction de la forme

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

où m est un entier, la fonction $\varphi(z)$ étant régulière au point $z=a$ et $\varphi(a)\neq 0$. Montrer que, si $m>0$, la fonction $f(z)$ possède au point $z=a$ un zéro d'ordre m, tandis que si $m<0$, la fonction $f(z)$ possède au point $z=a$ un pôle d'ordre $-m$.

19.14. Soit $f(z)$ une fonction de la forme $f(z)=z^{-m}\varphi(z)$, où m est un entier, la fonction $\varphi(z)$ étant régulière au point $z=\infty$ et $\varphi(\infty)\neq 0$. Montrer que, si $m>0$, la fonction $f(z)$ possède au point $z=\infty$ un zéro d'ordre m, tandis que si $m<0$, la fonction $f(z)$ possède au point $z=\infty$ un pôle d'ordre $-m$.

19.15. Trouver tous les zéros et tous les pôles des fonctions ci-dessous et déterminer leur ordre :

1. $\frac{(1+z^2)^2}{1-z^2}$. 2. $\operatorname{ctg} z$. 3. $z \operatorname{tg}^2 z$. 4. $\sin 3z - 3 \sin z$.

5. $\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z+1}}$. 6. $\frac{\operatorname{ctg} \pi \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. 7. $\frac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh} \sqrt{z}}$. 8. $\cos z \operatorname{ch} z$.

19.16. Soit $f(z)$ une fonction régulière au point à distance finie $z=a$ y possédant un zéro d'ordre m. Dire quel est l'ordre du zéro que les fonctions ci-dessous possèdent au point $z=a$:

1. $F(z)=f^{(n)}(z)$, $n<m$. 2. $F(z)=\int_a^z (z-t)^n f(t)\,dt$, $n=0, 1, 2, \ldots$

19.17. Soit $f(z)$ une fonction possédant au point à distance finie $z=a$ un pôle d'ordre m. Déterminer l'ordre du pôle qu'une fonction $f^{(n)}(z)$ possède au point $z=a$.

19.18. Soit $f(z)$ une fonction régulière au point $z=\infty$ y possédant un zéro d'ordre m. Déterminer l'ordre du zéro qu'une fonction $f^{(n)}(z)$ possède au point $z=\infty$.

19.19. Soit $f(z)$ une fonction régulière au point $z=\infty$ y possédant un zéro d'ordre m. Déterminer l'ordre du zéro que la fonction

$$F(z)=\int_z^\infty \frac{f^3(t)f''(t)}{1+f^2(t)}\,dt$$

possède au point $z=\infty$.

19.20. Soient $P_m(z)$ et $Q_n(z)$ deux polynômes respectivement de degré m et n. Trouver l'ordre du pôle à l'infini pour les fonctions suivantes :

1. $P_m(z)+Q_n(z)$, $m \neq n$. 2. $P_m(z) \cdot Q_n(z)$. 3. $\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, $m>n$.

19.21. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions possédant au point $z=\infty$ des pôles respectivement d'ordre m et n. Montrer que la fonction $F(z)=f(g(z))$ possède au point $z=\infty$ un pôle d'ordre mn.

19.22. Soient $g(z)$ une fonction régulière au point $z=a$ et $g(a)=b$, tandis qu'une fonction $f(\zeta)$ possède au point $\zeta=b$ un pôle d'ordre m. Montrer que la fonction $F(z)=f(g(z))$ possède au point $z=a$ un pôle d'ordre mn, où n est l'ordre du zéro que la fonction $g(z)-b$ a au point $z=a$.

19.23. Soit $\{f_n(z)\}$ une suite de fonctions régulières dans la couronne $0<|z-a|<r$ qui converge uniformément dans chaque partie fermée de cette couronne. Montrer que, si chaque fonction $f_n(z)$ possède un pôle d'ordre m au point $z=a$, alors la fonction limite $f(z)$ est régulière dans la couronne $0<|z-a|<r$ et possède au point $z=a$ un pôle d'ordre m au plus ou un point singulier éliminable.

* * *

19.24. Soit $z=a$ un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$. Notons $M(\varrho)=\max\limits_{|z-a|=\varrho}|f(z)|$. Montrer que pour tout $k>0$,

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho^k M(\varrho)=+\infty.$$

Indication. Voir le problème 19.11.

19.25. Soit $g(z)$ une fonction régulière au point $z=a$ et $g(a)=b$, tandis qu'une fonction $f(\zeta)$ possède au point $\zeta=b$ un point singulier essentiel. Montrer que la fonction $F(z)=f(g(z))$ possède au point $z=a$ un point singulier essentiel.

Indication. Utiliser le résultat du problème 19.24.

19.26. Soient $a_1(z), \ldots, a_n(z)$ des fonctions régulières au point a ou y possédant un pôle, et soit $f(z)$ une fonction possédant au point a un point singulier essentiel. Montrer que la fonction

$$F(z)=f^n(z)+a_1(z)f^{n-1}(z)+\ldots+a_n(z)$$

possède au point a un point singulier essentiel.

19.27. Montrer qu'une fonction $w(z)$ qui vérifie l'équation

$$w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_n(z)=0$$

ne peut pas avoir de points singuliers essentiels si $a_1(z), \ldots, a_n(z)$ sont des fonctions rationnelles.

19.28. Soient $a\neq\infty$, une fonction $g(z)$ régulière au point $z=a$ et $f(z)$ une fonction ayant au point $z=a$ un point singulier essentiel. Montrer que la fonction $F(z)=f'(z)+g(z)f(z)$ possède également au point $z=a$ un point singulier essentiel.

Indication. Etudier la solution de l'équation différentielle $w'+g(z)w=F(z)$ au voisinage du point $z=a$ en supposant que la fonction $g(z)$ est régulière au point $z=a$ et que la fonction $F(z)$ y possède un pôle.

19.29. En examinant la fonction $f(z)=e^z$, se convaincre que la condition $a\neq\infty$ du problème 19.28 est essentielle.

19.30. En examinant la fonction $f(z)=e^{1/z}$, se convaincre que l'assertion du problème 19.28 n'est plus vraie si l'on admet que la fonction $g(z)$ possède un pôle au point $z=a$.



19.31. Démontrer le *théorème de Sokhotski :* Si le point $z=a$ est un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$, alors, pour tout nombre complexe A (y compris $A=\infty$), il existe une suite $\{z_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

Indication. Utiliser le résultat du point 1 du problème 19.10 appliqué à la fonction $\dfrac{1}{f(z)-A}$.

19.32. Soit $z=a$ un point singulier isolé de caractère uniforme pour une fonction $f(z)$. Montrer que, si $\operatorname{Re} f(z)>0$ dans un certain voisinage du point $z=a$, alors le point $z=a$ est un point singulier éliminable pour la fonction $f(z)$.

19.33. Soit $z=a$ un point singulier isolé de caractère uniforme pour une fonction $f(z)$. Montrer que, si dans un certain voisinage du point $z=a$ la fonction $f(z)$ ne prend pas de valeurs situées sur le segment de droite joignant le point $w=\alpha$ au point $w=\beta$, alors le point $z=a$ ne peut pas être un point singulier essentiel pour la fonction $f(z)$.

Indication. Appliquer le résultat du problème 19.32 à la fonction

$$f_1(z)=\sqrt{\frac{f(z)-\alpha}{\beta-f(z)}},$$

qui admet, dans un certain voisinage du point $z=a$, la séparation d'une branche régulière jouissant de la propriété $\operatorname{Re} f_1(z)>0$.

19.34. Soit $z=a$ un point singulier essentiel d'une fonction $f(z)$. Montrer que, dans un voisinage aussi petit qu'on le veut du point $z=a$, les fonctions

1. $\operatorname{Re} f(z)$; 2. $\operatorname{Im} f(z)$; 3. $\dfrac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Re} f(z)}$

prennent toutes les valeurs réelles.

Indication. Utiliser le résultat du problème 19.33.

Le point $z=a$ est appelé *point d'accumulation de pôles* d'une fonction $f(z)$ si cette fonction est régulière dans une certaine couronne $0<|z-a|<r$ à l'exception d'un nombre infini de pôles $a_1, a_2, \ldots$, et si la suite $\{a_n\}$ admet le point $z=a$ comme point limite unique.

19.35. Montrer que le théorème de Sokhotski (voir le problème 19.31) reste en vigueur si le point $z=a$ est un point d'accumulation de pôles de la fonction $f(z)$.

RÉPONSES

19.08.

1. $z=0$: point singulier éliminable; $z=\pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$: pôles.
2. $z=0$: point singulier éliminable; $z=\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$: pôles.
3. $z=\infty$: pôle ; $z=-1$: point singulier essentiel.
4. $z=\infty$ et $z=1$: points singuliers éliminables; $z=-1$: point singulier essentiel.
5. $z=0$: point singulier éliminable; $z=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$: pôles.
6. $z=\infty$: point singulier éliminable; $z=0$: point singulier essentiel.
7. $z=\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots$: points singuliers essentiels.
8. $z=0$: point singulier essentiel.

19.15.

1. $z=\pm i$: zéros d'ordre 2; $z=\pm 1$: pôles d'ordre 1; $z=\infty$: pôle d'ordre 2.
2. $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$: pôles d'ordre 1; $z=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$: zéros d'ordre 1.
3. $z=0$: zéro d'ordre 3; $z=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$: zéros d'ordre 2; $z=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$: pôles d'ordre 2.
4. $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$: zéros d'ordre 3.
5. $z=\infty$: zéro d'ordre 2 ; $z=0$: pôle d'ordre 2.
6. $z=\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \ldots$: zéros d'ordre 1; $z=0, 1, 4, 9, 16, \ldots$: pôles d'ordre 1.

7. $z=-\pi^2, -4\pi^2, -9\pi^2, \ldots$: pôles d'ordre 1.

8. $z=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi i}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{3\pi i}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{5\pi i}{2}, \ldots$: zéros d'ordre 1.

19.16.

1. $m-n$. 2. $m+n+1$.

19.17. $m+n$.

19.18. $m+n$.

19.19. $4m+1$.

19.20.

1. $\max(m, n)$. 2. $m+n$. 3. $m-n$.

§ 20. Série de Laurent

On appelle *série de Laurent suivant les puissances de $z-a$* une série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Cette série est appelée convergente au point z_0 si les séries ci-dessous convergent :

$$\sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z_0-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_0-a)^n.$$

20.01. Trouver les ensembles de points z en lesquels les séries de Laurent ci-dessous convergent :

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^n$.
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$.
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$, $\alpha>0$.
4. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$.
5. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (2^{-n^3}+1)^{-1}(z-a)^{2n}$.
6. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$.
7. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}z^{n^3}$.
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$.

20.02. Soit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ une série de Laurent qui converge dans la couronne fermée $r\leq|z-a|\leq R$. Montrer que ses coefficients vérifient l'inégalité

$$|c_n|\leq M(r^{-n}+R^{-n}) \quad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

où M est une certaine constante ne dépendant pas de n.

20.03. Soit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ une série de Laurent qui converge vers une somme $f(z)$ dans la couronne $r<|z-a|<R$. Montrer que :

a) cette série converge absolument et uniformément en toute partie fermée de la couronne susmentionnée;

b) sa somme $f(z)$ est régulière dans la couronne $r<|z-a|<R$;

c) la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} cn_n(z-a)^{n-1}$ converge dans la même couronne vers la somme $f'(z)$.

20.04. Soient $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$ deux séries de Laurent qui convergent dans la couronne $r<|z-a|<R$ respectivement vers les sommes $A(z)$ et $B(z)$. Montrer que la série de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

converge dans la même couronne vers la somme $A(z)\cdot B(z)$.

20.05. Soient $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$ deux séries de Laurent qui convergent uniformément vers une même somme $f(z)$ sur la circonférence $|z-a|=\varrho$. Montrer que ces séries coïncident identiquement, c'est-à-dire que $a_n=b_n$ pour tous les n.

Toute fonction $f(z)$ régulière dans la couronne $r<|z-a|<R$ est développable en série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ suivant les puissances de $z-a$, série qui converge dans cette couronne. Les coefficients c_n sont déterminés d'après les formules

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\varrho} f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz, \qquad r<\varrho<R$$

Remarque. Pratiquement, ces formules ne sont jamais utilisées pour trouver les coefficients du développement des fonctions concrètes en série de Laurent. D'habitude, le développement d'une fonction concrète en série de Laurent est ramené par un procédé ou un autre au développement en série de Taylor.

20.06. En s'appuyant sur la formule de la somme d'une progression géométrique infinie et en faisant appel à la différentiation et à l'intégration, montrer que les formules ci-dessous sont valables :

1. $\dfrac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1}z^n, \qquad |z|>|b|.$

2. $\dfrac{1}{z^2-b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)}z^{2n}, \qquad |z|>|b|.$

3. $\dfrac{z^2}{z^2+b^2} = \sum_{n=-\infty} (-1)^n b^{-2n}z^{2n}, \qquad |z|>|b|.$

4. $\dfrac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)b^{-n-2}z^n, \qquad |z|>|b|.$

5. $\dfrac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (b-a)^{-n-1}(z-a)^n; \qquad a\neq b,\ |z-a|>|b-a|.$

6. $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} (1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n; \qquad a\neq b,\ |z-a|>|b-a|.$

7. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z+\alpha}{z-\alpha} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{1}{2n+1}\alpha^{-2n-1}z^{2n+1}, \qquad |z|>|\alpha|;$

pour $\ln\dfrac{z+\alpha}{z-\alpha}$, on prend la branche régulière séparée par la condition

$$\left[\ln\frac{z+\alpha}{z-\alpha}\right]_{z=\infty}=0.$$

8. $\frac{1}{2}\ln\frac{z^2-\alpha^2}{z^2+\alpha^2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2n+1}\alpha^{-4n-2}z^{4n+2}$, $|z|>|\alpha|$;

pour $\ln\frac{z^2-\alpha^2}{z^2+\alpha^2}$ on prend la branche régulière séparée par la condition

$$\left[\ln\frac{z^2-\alpha^2}{z^2+\alpha^2}\right]_{z=\infty}=0.$$

20.07. En utilisant une série binomiale, montrer que les formules ci-dessous sont valables :

1. $\left(\frac{z}{z-1}\right)^\alpha=1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha-n-1)}{(-n)!}z^n$, $|z|>1$; pour la fonction $\left(\frac{z}{z-1}\right)^\alpha$, on prend la branche régulière séparée par la condition

$$\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^\alpha\right]_{z=\infty}=1.$$

2. $$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{(-n)!}z^{2n-1},\qquad |z|>1,$$

pour la fonction $\sqrt{z^2-1}$, on prend la branche régulière positive pour $z>1$.

3. $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha=1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha-n-1)}{(-n)!}(b-a)^{-n}(z-a)^n$, $a\neq b$,
$|z-a|>|b-a|$;

pour la fonction $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha$, on prend la branche régulière séparée par la condition

$$\left[\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha\right]_{z=\infty}=1.$$

4. $$\ln\frac{z+\sqrt{z^2+1}}{z}=\ln 2+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{(-n)!}z^{2n},\qquad |z|>1;$$

pour la fonction $\ln\frac{z+\sqrt{z^2+1}}{z}$, on prend la branche régulière réelle pour $z>1$.

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $r<|z-a|<R$ et présentée sous la forme d'une somme $f_1(z)+f_2(z)$, où la fonction $f_1(z)$ est régulière pour $|z-a|<R$, la fonction $f_2(z)$ étant régulière pour $|z-a|>r$. En développant la fonction $f_1(z)$ en série de Taylor au point $z=a$ et la fonction $f_2(z)$ en série suivant les puissances négatives de $z-a$, et en utilisant les procédés décrits aux problèmes 20.06 et 20.07, on trouve le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans la couronne $r<|z-a|<R$. Si $f(z)$ est une fonction ratiomelle, la décomposition $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ cherchée est facile à obtenir par décomposition en fractions simples.

20.08. Développer les fonctions ci-dessous en série de Laurent suivant les puissances de z dans la couronne $1 < |z| < 2$:

1. $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$.   2. $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$.   3. $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$.

4. $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$.   5. $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$.   6. $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

20.09. Développer les fonctions ci-dessous en série de Laurent suivant les puissances de $z-a$ dans la couronne D (le point a et la couronne D sont indiqués entre parenthèses) :

1. $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$ $(a=1,\ D\ :\ 1<|z-1|<2)$.

2. $\dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$ $(a=1,\ D\ :\ 1<|z-1|<2)$.

3. $\dfrac{z+i}{z^2}$ $(a=i,\ -i\in D)$.   4. $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ $(a=1,\ 2i\in D)$.

5. $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ $\left(a=0,\ -\dfrac{3}{2}\in D\right)$.   6. $\dfrac{2z}{z^2-2i}$ $(a=1,\ -1\in D)$.

7. $\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$ $(a=-1,\ D\ :\ 0<|z+1|<3)$.

8. $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$ $(a=0,\ D\ :\ |z|>2)$.

Pour les fonctions de la forme $\ln R(z)$, où $R(z)$ est une fonction rationnelle, la décomposition en une somme de plusieurs fonctions ne présente pas de difficultés.

20.10. Se convaincre que les fonctions suivantes admettent la séparation de branches régulières dans la couronne D et développer toutes les branches régulières en série de Laurent suivant les puissances de $z-a$ dans cette couronne (le point a et la couronne D sont indiqués entre parenthèses) :

1. $\ln\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z+2)}$ $(a=0,\quad 1<|z|<2)$.

2. $\ln\dfrac{(z+1)^2}{z^2+4}$ $(a=0,\quad |z|>2)$.

3. $\ln\dfrac{(z-1)^2}{(z+2)(z+3)}$ $(a=-1,\quad |z+1|>2)$.

4. $\ln\dfrac{z(z+3)}{(z+2)(z-1)}$ $(a=-1,\quad 1<|z+1|<2)$.

5. $\ln\dfrac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_m)}{(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_m)}$ $(a=0,\quad |z|>\max(|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_m|,|\beta_1|,\ldots,|\beta_m|)$.

20.11. Soit $f(z)$ une branche régulière de la fonction $\sqrt{1+z^2}$ dans le plan présentant une coupure suivant le segment $[-i, i]$ et telle que $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$. Développer $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans le domaine $|z|>1$.

20.12. Soit $f(z)$ une branche régulière de la fonction $\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ dans le domaine $|z|>1$ et telle que $f(2)<0$. Développer $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans ce domaine.

20.13. Soit $f(z)$ une branche régulière de la fonction $\sqrt[3]{\frac{z}{z-1}}$ dans le plan présentant des coupures suivant les segments $[0, 2i]$, $[1, 2i]$ et telle que $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\pi i/3}$. Développer la fonction $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans le domaine $|z|>2$.

20.14. On examine la fonction $\ln\frac{z+1}{z-2}$ dans le plan présentant une coupure suivant l'arc de circonférence $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$, $\operatorname{Im} z\geq 0$. Soit $f(z)$ une branche régulière de cette fonction définie par la condition $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\pi i$. Développer $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans le domaine $|z|>2$.

20.15. Soit $f(z)$ une branche régulière de la fonction $\operatorname{arctg} z$ dans le plan présentant une coupure suivant la droite $|z|=1$, $\operatorname{Re} z\geq 0$ et telle que $f(0)=\pi$. Développer la fonction $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans le domaine $|z|>1$.

Parfois, il est possible de développer une fonction $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de $z-a$ dans la couronne $r<|z-a|<R$ en mettant la fonction intéressée sous la forme d'un produit de deux fonctions $f_1(z)\cdot f_2(z)$, où $f_1(z)$ est régulière pour $|z-a|<R$, $f_2(z)$ étant régulière pour $|z-a|>r$. Dans ce cas, la fonction $f_1(z)$ est développée en série de Taylor au point $z=a$, et la fonction $f_2(z)$ est développée en série suivant les puissances négatives de $z-a$. La série de Laurent pour la fonction $f(z)$ est obtenue en multipliant les séries pour les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

20.16. Développer la fonction $f(z)$ ci-dessous en série de Laurent suivant les puissances de $z-a$ dans la couronne D (le point a et la couronne D sont indiqués entre parenthèses) :

1. $z^3 e^{1/z}$ $(a=0,\ 0<|z|<\infty)$.
2. $z^2 \sin \pi\frac{z+1}{z}$ $(a=0,\ 0<|z|<\infty)$.
3. $z^3 \cos\frac{1}{z-2}$ $(a=2,\ 0<|z-2|<\infty)$.
4. $\frac{e^z}{z(1-z)}$ $(a=0,\ 1<|z|<\infty)$.
5. $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$ $(a=1,\ 1<|z-1|<2)$.
6. $e^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ $(a=0,\ 0<|z|<\infty)$.
7. $e^z \ln\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ $(a=0, \max(|\alpha|,\ |\beta|)<|z|<\infty$, toutes les branches).

Il y a encore un procédé de développement des fonctions en série de Laurent qui s'appuie sur des formules reliant les coefficients de développement d'une même fonction dans des couronnes différentes.

20.17. Soit $f(z)$ une fonction qui peut être mise sous la forme $g(z)+\frac{A}{z-\alpha}$, où $g(z)$ est une fonction régulière dans la couronne $r<|z-a|<R$, $z=\alpha$ étant un certain point de cette couronne. Posons

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad r<|z-a|<|\alpha-a|,$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n(z-a)^n, \quad |\alpha-a|<|z-a|<R.$$

Montrer que

$$c'_n=c_n+A(\alpha-a)^{-n-1} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

20.18. Soit $f(z)=g(z)+\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$, où $g(z)$ est une fonction régulière pour $\varrho<|z|<\frac{1}{\varrho}$, $\varrho<1$. Notons $f_1(z)$ la branche régulière de la fonction $f(z)$ dans la couronne $\varrho<|z|<1$ correspondant à la branche $\ln\frac{1+z}{1-z}$ égale à 0 pour $z=0$, et $f_2(z)$ la branche régulière de la fonction $f(z)$ dans le domaine $1<|z|<$ $<\frac{1}{\varrho}$ correspondant à la branche $\ln\frac{1+z}{1-z}$ égale à πi pour $z=\infty$. Posons

$$f_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad \varrho<|z|<1,$$

$$f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n z^n, \quad 1<|z|<\frac{1}{\varrho}.$$

Montrer que

$$c'_{2n}=c_{2n},\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ c'_0=c_0+\frac{\pi i}{2};\ c'_{2n+1}=c_{2n+1}-\frac{1}{2n+1}.$$

20.19. Développer la fonction $\operatorname{ctg} z$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans la couronne $\pi<|z|<2\pi$.

Indication. Utiliser le développement de la fonction $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$ en série de Taylor (voir le problème 11.27).

20.20. Développer la fonction $\frac{1}{e^z-1}$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans la couronne $2\pi<|z|<4\pi$.

Indication. Voir le problème 11.26.

On utilise souvent des développements en série de Laurent convergeant au voisinage d'un certain point $z=a$. Compte tenu de ces développements, on a introduit les termes suivants :

On appelle *série de Laurent pour une fonction $f(z)$ au voisinage du point* $z=a$ la série

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

qui converge dans une certaine couronne $0<|z-a|<\varrho$.

On appelle *série de Laurent pour une fonction f(z) au voisinage du point* $z=\infty$ la série

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

qui converge dans une certaine couronne $R<|z|<\infty$.

On appelle *partie principale* de la série de Laurent pour une fonction $f(z)$ au voisinage du point $z=a$ l'ensemble de termes de cette série qui tendent vers l'infini lorsque $z\to a$. Si a est un nombre fini, la partie principale de la série de Laurent est constituée par les puissances négatives de $z-a$; pour $a=\infty$, par les puissances positives de z.

La différence entre toute la série de Laurent pour une fonction $f(z)$ au voisinage du point $z=a$ et la partie principale de cette série est appelée *partie régulière* de la série de Laurent pour la fonction $f(z)$ au voisinage du point $z=a$.

Le problème concernant la recherche de la partie principale de la série de Laurent pour une fonction $f(z)$ au voisinage du point $z=a$ est résolu par les mêmes méthodes que le problème général du développement d'une fonction en série de Laurent. Quand même, compte tenu du fait que le nombre de coefficients recherchés est moindre, la résolution de ce problème est d'habitude plus aisée.

20.21. Trouver la partie principale de la série de Laurent pour les fonctions suivantes au voisinage du point $z=z_0$ (le point z_0 est indiqué entre parenthèses) :

1. $\frac{z}{(z+2)^2}$ $(z_0=-2)$. 2. $\frac{e^z+1}{e^z-1}$ $(z_0=0,\ \pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i,\ \dots)$.

3. $\frac{z-1}{\sin^2 z}$ $(z_0=0)$. 4. $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$ $(z_0=ib,\ b>0)$.

5. $\frac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$ $(z_0=\infty)$. 6. $\frac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2}$ $(z_0=ib,\ b>0)$.

7. $\frac{z}{(z^2+b^2)^2}$ $(z_0=ib)$. 8. $\operatorname{ctg}\pi z$ $(z_0=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$

9. $\frac{1}{\sin \pi z}$ $(z_0=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$.

10. $\sqrt{z^4+b^4}$ $(z_0=\infty,\ b>0$, toutes les branches).

11. $z^2\sqrt{\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}}$ $(z_0=\infty,\ b>0$, toutes les branches).

12. $z^3 \operatorname{arctg} z$ $(z_0=\infty$, toutes les branches).

20.22. Dans les exemples qui suivent, on considère pour les fonctions $\ln z$ et z^α (α est réel) une branche régulière, dans le plan muni d'une coupure suivant le demi-axe réel positif, prenant des valeurs positives sur la borne supérieure de cette coupure pour $z>1$. Trouver la partie principale de la série de Laurent pour les fonctions ci-dessous au voisinage du point $z=z_0$ (les valeurs de z_0 sont données entre parenthèses) :

1. $\frac{z^\alpha}{z+1}$, $\alpha>0$ $(z_0=-1)$. 2. $\frac{1}{(z+1)^2 \ln z}$ $(z_0=-1)$.

3. $\frac{z^{\alpha}}{(z+1)^2(z+2)^2}$, $\alpha>0$ (a : $z_0=-1$; b : $z_0=-2$).

4. $\frac{1}{(z^2+b^2)(\ln z+\pi i)}$, $b>0$ (a : $z_0=ib$; b: $z_0=-ib$).

5. $\frac{\sqrt{z}\ln z}{(z+1)^2}$ ($z_0=-1$).

6. $\frac{1}{(z+b)^2(\ln z-\pi i)}$, $b>0$, $b\neq 1$ (a : $z_0=-1$; b: $z_0=-b$).

7. $\frac{\ln^2 z}{z^2+b^2}$, $b>0$ (a : $z_0=ib$; b : $z_0=-ib$).

8. $\frac{1}{(z+1)^2}\cdot\frac{1}{(\ln z-\pi i)^2}$ ($z_0=-1$).

20.23. Trouver la partie principale de la série de Laurent pour les fonctions indiquées ci-dessous au voisinage du point $z=z_0$ si, pour les logarithmes et les puissances fractionnaires, on choisit des branches réelles sur la borne supérieure de la coupure [0, 1].

1. $(z^2+1)\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ ($z_0=\infty$). 2. $(z^2-1)\ln\frac{z}{1-z}$ ($z_0=\infty$).

3. $\frac{z^2}{z^2+b^2}\left(\ln\frac{z}{1-z}\right)^2$, $b>0$ ($z_0=ib$).

4. $\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{\ln\frac{z}{1-z}-\pi i}$ ($z_0=\infty$).

20.24. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $0<|z-a|<\varrho$, et supposons que la série de Laurent au point $z=a$ de cette fonction soit de la forme

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

Montrer que :

a) la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement au point $z=a$ si, et seulement si, $c_n=0$, $n=-1, -2, \ldots$;

b) la fonction $f(z)$ possède au point $z=a$ un pôle d'ordre m si, et seulement si, $c_{-m}\neq 0$, $c_{-m-1}=c_{-m-2}=\ldots=0$;

c) la fonction $f(z)$ présente au point $z=a$ un point singulier essentiel si, et seulement si, il y a une infinité de coefficients c_n différents de zéro à numéros négatifs.

20.25. Soit $f_k(z)$ une fonction possédant au point $z=a$ un pôle d'ordre k ($k=1, 2, \ldots$). Alors, la fonction

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)$$

possède au point $z=a$ un pôle d'ordre n.

Supposons que la suite $S_n(z)$ converge uniformément en chaque partie fermée de la couronne $0<|z-a|<\varrho$. La limite de cette suite doit-elle avoir au point $z=a$ un point singulier essentiel ?

20.26. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la couronne $r<|z-a|<R$, et supposons que la série de Laurent de cette fonction suivant les puissances de $z-a$ dans cette couronne soit de la forme

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Montrer que :

a) pour prolonger analytiquement la fonction $f(z)$ dans tout le disque $|z-a|<R$, il faut et il suffit que

$$c_{-n}=0, \ n=1, \ 2, \ \ldots;$$

b) pour prolonger analytiquement la fonction $f(z)$ dans la couronne $\varrho<|z-a|<R$, où $0\leq\varrho<r$, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, |c_{-n}|^{1/n}=\varrho.$$

20.27. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D à l'exception des points singuliers isolés de caractère uniforme $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Notons $g_k(z)$ la partie principale de la série de Laurent pour la fonction $f(z)$ au voisinage du point a_k. Montrer que la fonction $f(z)-\sum_{k=1}^{m} g_k(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le domaine D.

20.28. Montrer qu'une fonction régulière dans tout le plan fini et possédant au point $z=\infty$ un pôle d'ordre m est un polynôme de degré m.

20.29. Montrer qu'une fonction qui ne possède dans le plan complexe élargi aucun type de points singuliers, sauf les pôles, est une fonction rationnelle.

20.30. Montrer que la forme générale d'une fonction $R(z)$ qui possède un pôle d'ordre m_0 au point $z=\infty$ et des pôles d'ordre m_k aux points a_k, $k=1, 2, \ldots, n$, sans avoir d'autres pôles, est donnée par la formule

$$R(z)=\sum_{s=0}^{m_0} A_{0,s}z^s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m_k} A_{k,s}(z-a_k)^{-s},$$

où $A_{k,m_k}\neq 0$, $k=0, 1, \ldots, n$, tandis que les autres constantes $A_{k,s}$ sont arbitraires.

20.31. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôlesaux points $a_1, \ldots, a_n$ sans en avoir d'autres situés à distances finies. Notons D_s le domaine constitué par des points situés plus près du pôle a_s que de n'importe quel autre pôle. Montrer que :

1. $\lim_{m\to\infty}\left|\frac{R^{(m)}(z)}{m!}\right|^{1/m}=\frac{1}{|z-a_s|}$ $(z\in D_s)$;

2. en chaque partie fermée B du domaine D_s, la fonction $R^{(n)}(z)$ ne s'annule pas si seulement $n>n_0(B)$;

3. pour chaque point $z=a$ situé sur la frontière de l'un des domaines D_s, on peut indiquer une suite de points $\{z_m\}$, $z_m\to a$ tels que $R^{(m)}(z_m)=0$ $(m=0, 1, \ldots)$.

Indication. Examiner la suite $\left\{\frac{1}{m_k}\ln\frac{R^{(m_k)}(z)}{m_k!}\right\}$ et utiliser le résultat du problème 20.30.

Chaque *série de Fourier* $F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$ peut être considérée comme une série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $z = e^{i\varphi}$ sur la circonférence $|z| = 1$. Pour cette raison, le problème concernant le développement d'une fonction en série de Fourier est souvent ramené au développement en série de Laurent en effectuant le remplacement $e^{i\varphi} = z$.

20.32. Développer en série de Fourier les fonctions ci-dessous :

1. $\dfrac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $-1<a<1$. 2. $\dfrac{a\sin\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $-1<a<1$.

3. $\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $0<a<1$. 4. $\dfrac{1}{1-a\sin\varphi}$, $-1<a<1$.

5. $\dfrac{\sin^2\varphi}{(1+a^2+2a\cos\varphi)^2}$, $0<a<1$. 6. $\ln(1+a^2-2a\cos\varphi)$, $0<a<1$.

7. $\cos\varphi\cdot\ln(1+a^2\cos^2\varphi)$, $0<a<1$.

20.33. Développer en série de Fourier la fonction $\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$.

Indication. Utiliser l'égalité

$$\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = \ln\left|\frac{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}{2i}\right| = \ln\frac{|e^{i\varphi}-1|}{2} = \operatorname{Re}\ln\frac{1-e^{i\varphi}}{2}.$$

20.34. Développer en série de Fourier les fonctions suivantes :

1. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|$. 2. $\frac{\pi-\varphi}{2}$ $(0<\varphi<2\pi)$.

RÉPONSES

20.01.

1. $1/2<|z|<2$. 2. $1<|z|<3$. 3. $e^{-\alpha}<|z-1|<e^{\alpha}$.
4. $0<|z+1|<\infty$. 5. $0<|z-a|<1$. 6. $|z|=1$.
7. $|z|=1$. 8. Ensemble vide.

20.08.

1. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{3}z^n+\sum_{0}^{+\infty}\frac{-1}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$.

2. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{2}{3}z^n+\frac{1}{6}+\frac{5}{12}z+\frac{7}{24}z^2+\sum_{3}^{+\infty}\frac{17\cdot(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n+1}}z^n$.

3. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{5}z^{2n}+\sum_{-\infty}^{-1}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{5}z^{2n+1}+\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n 5}z^n$.

4. $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-3n-4}{9}z^n+\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}z^n$.

5. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{5}z^{2n}+\sum_{0}^{+\infty}\frac{-1}{5\cdot 4^{n+1}}z^{2n}$. 6. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{-5n-6}{25}z^{2n}+\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{100\cdot 4^n}z^{2n}$.

20.09.

1. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{9}(z-1)^n+\sum_{0}^{+\infty}\frac{3n+5}{9\cdot 2^{n+2}}(z-1)^n$.

2. $\sum_{-\infty}^{-2}\frac{(n+1)\cdot(-1)^n}{9}(z-1)^n+\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27\cdot 2^{2n+3}}(z-1)^n$.

3. $\sum_{-\infty}^{-1}(n+2)i^{n+1}(z-i)^n$. 4. $1+\sum_{-\infty}^{0}(-1)^{n+1}2^{-\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi n}{4}(z-1)^{n-1}$.

5. $-\sum_{-\infty}^{-2}z^n-\frac{1}{2}z^{-1}-\sum_{0}^{+\infty}2^{-n-2}z^n$.

6. $\sum_{-\infty}^{-1}i^{-n-1}(z-1)^n+\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-1)^n$.

7. $\frac{1}{3}(z+1)^{-1}-\frac{8}{9}+\frac{19}{27}(z+1)-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$.

8. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{1+(-1)^n4^{-n-1}}{5}z^{2n}$.

20.10.

1. $\sum_{-\infty}^{0}\frac{2}{2n-1}z^{2n-1}-\sum_{0}^{+\infty}\frac{2^{-2n}}{2n+1}z^{2n+1}+(2k+1)\pi i;\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

2. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{1-(-1)^n4^{-n}}{n}z^{2n}-\sum_{-\infty}^{0}\frac{2}{2n-1}z^{2n-1}+2k\pi i,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

3. $\sum_{-\infty}^{-1}\frac{2^{-n+1}-(-1)^n(1+2^{-n})}{n}(z+1)^n+2k\pi i,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

4. $\sum_{-\infty}^{0}\frac{2}{2n-1}(z+1)^{2n-1}+\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}(z+1)^{2n+1}+(2k+1)\pi i,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

5. $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m}(\alpha_p^n-\beta_p^n)z^n+2k\pi i,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

20.11.

$$-z-\frac{1}{2z}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{n!2^n}z^{-2n+1}.$$

20.12.

$\sum_{0}^{\infty}c_nz^{-n}$, où $c_0=1$,

$$c_n=(-1)^n2^{-2n}\left\{\frac{(2n)!}{(n!)^2}+2\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{(2n-2m)!(2m-2)!}{[(n-m)!]^2m!(m-1)!}\right\}.$$

20.13.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}+n-1\right)}{n!}z^{-n}.$$

20.14.

$$2\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^n}{nz^n}.$$

20.15.

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}z^{-2n-1}.$$

20.16.

1. $z^3+z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{(n+3)!}$. 2. $-\pi z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n+1}$.

3. $(z-2)^3+6(z-2)^2+\dfrac{23}{2}(z-2)+5+\sum_1^{\infty}(-1)^n\dfrac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1}+$
$$+\sum_1^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+2)!}(16n^2+24n+5)(z-2)^{2n}.$$

4. $-\sum_{-\infty}^{-2}e\cdot z^n+(1-e)z^{-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=n+2}^{\infty}\dfrac{1}{p!}\right)z^n.$

5. $\sum_{-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{e}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{p=0}^{n}\dfrac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}(n-p)!}+\sum_{p=n+1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{p+1}}{p!}\right\}(z-1)^n.$

6. $\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(t)z^n$, où $J_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2k+n}$, $J_{-n}(t)=(-1)^nJ_n(t).$

7. $\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{\beta^{p-n}-\alpha^{p-n}}{p!p}\right)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2k\pi i}{n!}+\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{\beta^p-\alpha^p}{(p+n)!}\right)z^n$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$

20.19.

$$\sum_{-\infty}^{-1}2\pi^{-2k}z^{2k-1}+3z^{-1}+\sum_1^{\infty}\left(\frac{(-1)^k2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}+2\pi^{-2k}\right)z^{2k-1}.$$

20.20.

$$\sum_{-\infty}^{-1}(-1)^k2^{-2k+1}\pi^{-2k}z^{2k-1}+3z^{-1}-\frac{1}{2}+\sum_1^{\infty}\left(\frac{B_{2k}}{(2k)!}+\frac{2(-1)^k}{(2\pi)^{2k}}\right)z^{2k-1}.$$

20.21.

1. $-\dfrac{2}{(z+2)^2}+\dfrac{1}{z+2}$. 2. $\dfrac{2}{z-2k\pi i}$ $(z_0=2k\pi i)$. 3. $-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$.

4. $-\dfrac{ie^{-b}}{2b}\cdot\dfrac{1}{z-ib}$. 5. z^2. 6. $-\dfrac{ie^{-b}}{4b}\cdot\dfrac{1}{(z-ib)^2}+\dfrac{e^{-b}}{4b}\,\dfrac{1}{z-ib}$.

7. $-\dfrac{i}{4b}\cdot\dfrac{1}{(z-ib)^2}$. 8. $\dfrac{1}{\pi(z-k)}$ $(z_0=k)$. 9. $\dfrac{(-1)^k}{\pi(z-k)}$ $(z_0=k)$.

10. $\pm z$. 11. $\pm z^2$. 12. $\pi\left(k+\dfrac{1}{2}\right)z^3-z^2$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$

20.22.

1. $e^{\pi i\alpha}\cdot\dfrac{1}{z+1}$. 2. $-\dfrac{i}{\pi}\,\dfrac{1}{(z+1)^2}-\dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{z+1}$.

3. *a)* $\dfrac{e^{\pi i\alpha}}{(z+1)^2}-\dfrac{(\alpha+2)e^{\pi i\alpha}}{z+1}$; *b)* $\dfrac{2^{\alpha}e^{\pi i\alpha}}{(z+2)^2}+\dfrac{(4-\alpha)2^{\alpha-1}e^{\pi i\alpha}}{z+2}$.

4. *a)* $-\dfrac{\dfrac{3}{2}\pi+i\ln b}{2b\left(\ln^2b+\dfrac{9}{4}\pi^2\right)}\cdot\dfrac{1}{z-ib}$; *b)* $\dfrac{\dfrac{5}{2}\pi+i\ln b}{2b\left(\ln^2b+\dfrac{25}{4}\pi^2\right)}\cdot\dfrac{1}{z+ib}$.

5. $-\dfrac{\pi}{(z+1)^2}+\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-i}{z+1}$. 6. *a)* $-\dfrac{1}{(b-1)^2}\cdot\dfrac{1}{z+1}$; *b)* $\dfrac{1}{\ln b}\cdot\dfrac{1}{(z+b)^2}+\dfrac{1}{b\ln^2b}\cdot\dfrac{1}{z+b}$.

7. *a)* $\dfrac{\left(\ln b+\dfrac{\pi i}{2}\right)^2}{2ib}\cdot\dfrac{1}{z-ib}$; *b)* $-\dfrac{\left(\ln b+\dfrac{3}{2}\pi i\right)^2}{2ib}\cdot\dfrac{1}{z+ib}$.

8. $\dfrac{1}{(z+1)^4}-\dfrac{1}{(z+1)^3}+\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{(z+1)^2}$.

20.23.

1. $e^{-\frac{3\pi i}{4}}\left(z^3-\frac{3}{4}z^2+\frac{29}{32}z\right)$. 2. $\pi i z^2+z$.

3. $\dfrac{ib}{2}\left[\ln\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}+i\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} b\right)\right]^2\cdot\dfrac{1}{z-ib}$. 4. z.

20.25. Non. Exemple :

$$f_n(z)=\frac{1}{n!z^n}-\frac{1}{(n-1)!z^{n-1}},\quad n=1, 2, \ldots$$

20.32.

1. $\sum_1^\infty a^n\cos n\varphi$. 2. $\sum_1^\infty a^n\sin n\varphi$. 3. $1+2\sum_1^\infty a^n\cos n\varphi$.

4. $$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\sum_1^\infty(-1)^n\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{2n}\cos 2n\varphi-$$
$$-\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\sum_1^\infty(-1)^n\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi.$$

5. $\dfrac{1}{2a^2(1-a^2)}+\dfrac{1}{2a^2(1-a^2)}\sum_1^\infty(-a)^n(1+a^2-n(1-a^2))\cos n\varphi$.

6. $-2\sum_1^\infty\dfrac{a^n}{n}\cos n\varphi$.

7. $$2\left[\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}\right)^2+\ln\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{2}\right]\cos\varphi+$$
$$+2\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}\right)^{2n}\left(\frac{1}{n}+2\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a^2}\right)\cos(2n+1)\varphi.$$

20.33.

$-\ln 2-\sum_1^\infty\dfrac{1}{n}\cos n\varphi$.

20.34.

1. $-2\sum_0^\infty\dfrac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}$. 2. $\sum_1^\infty\dfrac{\sin n\varphi}{n}$.

§ 21. Calcul des résidus

Soit $f(z)$ une fonction régulière en un point z_0 ou bien y possédant un point singulier isolé de caractère uniforme. On appelle *résidu de la fonction $f(z)$ au point z_0*, pour $z_0\neq\infty$, la grandeur

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=\varrho} f(z)\,dz,$$

où le nombre $\varrho>0$ est assez petit (la circonférence est parcourue une fois

dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). On appelle *résidu de la fonction $f(z)$ au point* ∞ la grandeur

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, dz,$$

où le nombre $R>0$ est assez grand (la circonférence est parcourue une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

On peut aussi donner une définition plus uniforme :

On appelle *résidu d'une fonction $f(z)$ en un point* $z=z_0$, qui est un point de régularité de la fonction $f(z)$ ou un point singulier isolé de caractère uniforme, le quotient par $2\pi i$ de l'intégrale de $f(z)$ prise le long de la frontière d'un voisinage assez petit du point z_0 (en donnant cette définition, on convient que l'intégrale le long de la frontière du domaine est toujours prise en tel sens que lors du parcours de la courbe frontière le domaine reste à gauche).

Conformément au théorème de Cauchy, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$ si la fonction $f(z)$ est régulière au point z_0 et si $z_0 \neq \infty$. Le résidu à l'infini peut être différent de zéro, même si la fonction est régulière à l'infini.

Calculer les résidus en partant de leur définition est une opération assez compliquée. A la base du calcul pratique des résidus on trouve le théorème suivant :

Soit, pour $0<|z-z_0|<\varrho$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Alors $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}$. *Mais si, pour* $R<|z|<\infty$, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, *alors* $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

21.01. Calculer

1. $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{\sin z}{z^2}$. 2. $\operatorname*{Res}_{z=\infty} e^{1/z}$. 3. $\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2}$. 4. $\operatorname*{Res}_{z=\infty} z^2 \sin\frac{\pi}{z}$.

5. $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$. 6. $\operatorname*{Res}_{z=1} z e^{\frac{1}{z-1}}$. 7. $\operatorname*{Res}_{z=\infty} z^n e^{\frac{a}{z}}$. 8. $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$.

En réalité, le problème de la recherche des résidus est beaucoup plus simple par rapport au problème du développement d'une fonction en série de Laurent au voisinage d'un point donné, car, lorsqu'on cherche le résidu, il ne faut trouver qu'un seul coefficient de la série de Laurent. Cette simplification se fait sentir d'autant plus que moins nombreux sont les termes de la partie principale de la série de Laurent.

Ci-dessous sont données les principales formules servant à la recherche des résidus :

Soit $f(z)$ une fonction ayant un pôle d'ordre 1 au point z_0 à distance finie. Alors,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z). \tag{1}$$

Soit $f(z)$ une fonction qui se présente sous la forme $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont régulières au point z_0 à distance finie, et $\psi(z)$ satisfait aux conditions

$$\psi(z_0)=0, \quad \psi'(z_0)\neq 0.$$

Alors

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{2}$$

Soit $f(z)$ une fonction régulière au point $z=\infty$. Alors

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty} z(f(\infty)-f(z)). \tag{3}$$

Soit $f(z)$ une fonction qui se présente sous la forme $f(z)=\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$, où la fonction $\varphi(\zeta)$ est régulière au point $\zeta=0$. Alors

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\varphi'(0). \tag{4}$$

Soit $f(z)$ une fonction qui se présente sous la forme $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$, où la fonction $\varphi(z)$ est régulière au point z_0 à distance finie. Alors

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}z_0. \tag{5}$$

21.02. Trouver les résidus des fonctions ci-dessous en tous leurs points singuliers à distances finies :

1. $\dfrac{1}{z+z^3}$. 2. $\dfrac{z^2}{1+z^4}$. 3. $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$. 4. $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$.

5. $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$. 6. $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n=1, 2, \ldots$ 7. $\dfrac{1}{\sin \pi z}$.

8. $\operatorname{ctg} \pi z$. 9. $\operatorname{th} z$. 10. $\operatorname{cth}^2 \pi z$. 11. $\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$. 12. $\dfrac{1}{e^z+1}$.

13. $\dfrac{\sin \pi z.}{(z-1)^3}$. 14. $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

21.03. Trouver les résidus à l'infini des fonctions ci-dessous :

1. $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$. 2. $\cos \pi \dfrac{z+2}{2z}$. 3. $\dfrac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}$. 4. $\dfrac{\cos^2 \frac{\pi}{z}}{z+1}$.

5. $\dfrac{(z^{10}+1)\cos \frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$. 6. $z\cos^2 \dfrac{\pi}{z}$.

Les problèmes qui suivent contiennent différents procédés servant souvent à faciliter le calcul des résidus.

21.04. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan complexe à l'exception d'un nombre fini de points singuliers isolés de caractère uniforme $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (le point $z=\infty$ est exclu). Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0.$$

21.05. Montrer que pour chaque fonction paire $f(z)$,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

(en supposant que les résidus écrits ont un sens).

21.06. Montrer que, pour une fonction paire $f(z)$, l'égalité

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=-z_0} f(z)$$

a lieu, et que pour une fonction impaire $f(z)$, l'égalité

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=-z_0} f(z)$$

est vérifiée (en supposant que les résidus écrits ont un sens).

21.07. Soit $f(z) = g(az)$, où $a \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0 a} f(z) = \frac{1}{a} \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z).$$

21.08. Soit $f(z) = z^m g(z^n)$, où m et n sont des entiers satisfaisant aux conditions $m \geq 0$, $m < n$. Montrer que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0 e^{2k\pi i/n}} f(z) = e^{2k\pi i(m+1)/n} \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

21.09. Trouver les résidus des fonctions ci-dessous en tous leurs points singuliers et à l'infini :

1. $\dfrac{1}{z^4(z-2)}$. 2. $\dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$. 3. $\dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$.

4. $\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, $a \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ 5. $\sin z \sin \dfrac{1}{z}$.

6. $\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$. 7. $\dfrac{1+z^8}{z^4(z^4+1)} \cos z \operatorname{ch} z$. 8. $\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

Si une fonction $f(z)$ peut se présenter sous la forme $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, où les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ possèdent en un point z_0 des zéros d'ordre supérieur à 1, les formules (1), (2) ou (5) sont peu utiles pour le calcul de la grandeur $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$. Dans ce cas, le procédé le plus sûr consiste dans le remplacement des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ par un certain nombre de termes de leurs développements en série de Taylor au voisinage du point z_0.

21.10. Calculer :

1. $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, $n = 1, 2, \ldots$ 2. $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z(\sin z - z)}$.

3. $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$. 4. $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}$, $n = 2, 3, \ldots$

5. $\operatorname*{Res}_{z=0} z^{n-2} \operatorname{ctg}^n z$, $n = 2, 3, \ldots$ 6. $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.

21.11. Soient $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ deux fonctions régulières en un point à distance finie z_0 possédant en ce point un zéro d'ordre m. Démontrer les formules suivantes :

1. $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left\{\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\cdot\frac{1}{z-z_0}\right\}=\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)}$.

2. $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left\{\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^2}\right\}=\frac{1}{m+1}\,\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)}\left[\frac{\varphi^{(m+1)}(z_0)}{\varphi^{(m)}(z_0)}-\frac{\psi^{(m+1)}(z_0)}{\psi^{(m)}(z_0)}\right]$.

Dans le cas, où l'on ne calcule pas les résidus d'une fonction uniforme dans tout le plan, mais ceux d'une certaine branche régulière d'une fonction analytique multiforme, il faut être très correct dans les calculs et faire attention à ce que toutes les opérations soient effectuées sur la même branche.

21.12. Trouver les résidus pour chaque branche régulière dans un certain voisinage d'un point z_0 (en excluant, peut-être, ce point) :

1. $\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z+3}{4\pi i-\ln(1+z)}$. 2. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\ln\frac{z-1}{z+1}$. 3. $\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z}{2+\sqrt{5-z}}$.

4. $\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z}{\sqrt{4-z^2}+2}$. 5. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

6. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{\sqrt[3]{2z^2-z^3}}{z+3}$.

Dans certains problèmes, il est plus commode de calculer les résidus en partant de leur définition, en tant qu'intégrale prise le long d'un contour, et en appliquant le théorème de Cauchy en vertu duquel on peut déformer le contour à l'intégration dans le domaine de régularité de la fonction sur laquelle porte l'intégration.

21.13. Soit $f(z)$ une fonction entière. Démontrer les formules suivantes :

1. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right\}=\int_a^b f(z)\,dz$ (ici, pour $\ln\frac{z-b}{z-a}$, on prend n'importe quelle branche régulière au voisinage du point à l'infini).

2. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{f(z)\ln\frac{z^2-a^2}{z^2+b^2}\right\}=\int_{ib}^{a} f(z)\,dz+\int_{-ib}^{-a} f(z)\,dz$ (ici, pour $\ln\frac{z^2-a^2}{z^2+b^2}$, on prend n'importe quelle branche régulière au voisinage du point à l'infini).

3. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{f(z)\left(\ln\frac{z-b}{z-a}\right)^2\right\}=2\int_a^b f(x)\ln\frac{b-x}{x-a}\,dx$ (ici, a et b sont des nombres réels, $a<b$, et, pour $\ln\frac{z-b}{z-a}$, on prend une branche régulière au voisinage du point à l'infini qui s'annule pour $z=\infty$).

4. $\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left\{f(z)\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^\alpha\right\}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_a^b f(x)\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^\alpha dx$ (ici, $a<b$, $-1<\alpha<1$, sont

des nombres réels, et, pour $\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\alpha}$, on prend une branche régulière au voisinage du point à l'infini égale à 1 pour $z=\infty$).

* * *

21.14. Trouver $\operatorname{Res}_{z=z_0}\{f(z)\varphi(z)\}$ si la fonction $\varphi(z)$ est régulière au point z_0 et si la fonction $f(z)$ a au point z_0 un pôle d'ordre 1, son résidu y étant égal à A.

21.15. Trouver $\operatorname{Res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}$ si la fonction $f(z)$:

1. est régulière au point z_0 et y possède un zéro d'ordre m ;
2. possède au point z_0 un pôle d'ordre m.

21.16. Trouver $\operatorname{Res}_{z=z_0}\left\{\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}$ si la fonction $\varphi(z)$ est régulière au point $z=z_0$, et si la fonction $f(z)$:

1. est régulière au point z_0 et y possède un zéro d'ordre m ;
2. possède au point z_0 un pôle d'ordre m.

21.17. Trouver $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(\varphi(z))$ si la fonction $\varphi(z)$ est régulière au point z_0 et $\varphi'(z_0)\neq 0$, tandis que la fonction $f(z)$ possède au point $\varphi(z_0)$ un pôle d'ordre 1, son résidu y étant égal à A.

* * *

21.18. Soient $f(z)$ une fonction régulière pour $R<|z|<\infty$ et $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)=0$. Montrer que la fonction $f(z)$ possède une primitive régulière pour $R<|z|<\infty$.

21.19. Dire pour quelles valeurs des paramètres a, b, les fonctions ci-dessous sont uniformes dans tout le plan complexe :

1. $\displaystyle\int_1^z \frac{a+e^{1/\zeta}}{\zeta}\,d\zeta.$ 2. $\displaystyle\int_1^z \frac{a\sin\zeta+b\zeta\cos\zeta}{\zeta^2}\,d\zeta.$ 3. $\displaystyle\int_1^z \frac{\sin(\zeta+a\zeta^3)}{\zeta^4}\,d\zeta.$

RÉPONSES

21.01.

1. 1. 2. -1. 3. e. 4. $\frac{\pi^3}{6}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $\frac{3}{2}$. 7. $-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$. 8. $\frac{1}{n!}$.

21.02.

1. 1 pour $z=0$; $-\frac{1}{2}$ pour $z=i$; $-\frac{1}{2}$ pour $z=-i$.
2. $\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$ pour $z=e^{\pi i/4}$; $\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$ pour $z=e^{-\pi i/4}$; $-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$ pour $z=e^{3\pi i/4}$; $-\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$ pour $z=e^{-3\pi i/4}$.

3. 1 pour $z=-1$. 4. $-\frac{3i}{16}$ pour $z=i$; $\frac{3i}{16}$ pour $z=-i$.

5. $-\frac{1}{2}$ pour $z=1$; $\frac{1}{4}$ pour $z=i$; $\frac{1}{4}$ pour $z=-i$. 6. C_{2n}^{n-1} pour $z=1$.

7. $\frac{(-1)^n}{\pi}$ pour $z=n$, où $n=0$; ± 1, ± 2, ...

8. $\frac{1}{\pi}$ pour $z=n$, où $n=0$, ± 1, ± 2, ...

9. 1 pour $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i$, où $n=0$, ± 1, ± 2, ...

10. 0 pour $z=\pi in$, où $n=0$, ± 1, ± 2, ...

11. $-\sin 1$ pour $z=1$. 12. -1 pour $z=(2n+1)\pi i$, où $n=0$, ± 1, ± 2, ...

13. 0 pour $z=1$.

14. 0 pour $z=0$; $\frac{i^{2n-k}}{2\sqrt{\pi n}}$ pour $z=i^k\sqrt{\pi n}$, où $k=0, 1, 2, 3$, $n=1, 2, 3, ..$

21.03.

1. 0. 2. π. 3. 0. 4. -1. 5. -1. 6. π^2.

21.09.

1. $\frac{1}{64}$ pour $z=2$; $-\frac{1}{64}$ pour $z=0$; 0 pour $z=\infty$.

2. $\frac{257}{64}$ pour $z=-2$; $-\frac{1}{64}$ pour $z=0$; -4 pour $z=\infty$.

3. 0 pour $z=0$ et $z=\infty$; $-\frac{1023}{256}i$ pour $z=2i$; $\frac{1023}{256}i$ pour $z=-2i$.

4. a^n+a^{-n} pour $z=a$; $-a^{-n}$ pour $z=0$; $-a^n$ pour $z=\infty$.

5. 0 pour $z=0$ et $z=\infty$.

6. $-\frac{i}{4e}$ pour $z=i$; $\frac{i}{4e}$ pour $z=-i$; 0 pour $z=\infty$.

7. 0 pour $z=0$ et $z=\infty$; $-\frac{1}{4}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}(\cos\sqrt{2}+\operatorname{ch}\sqrt{2})$ pour $z=e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$.

8. $-\frac{1}{4e}$ pour $z=i$; $-\frac{1}{4e}$ pour $z=-i$; $\frac{1}{2e}$ pour $z=\infty$.

21.10.

1. 1. 2. 24. 3. $\frac{4}{3}$. 4. 0. 5. $-\frac{n}{3}$. 6. $-\frac{4}{5}$.

21.12.

1. -3 lorsque $\ln(1+z)|_{z=0}=4\pi i$, et 0 pour les autres branches.

2. 2 pour toutes les branches.

3. 4 lorsque $\sqrt{5-z}\,|_{z=1}=-2$, et 0 lorsque $\sqrt{5-z}\,|_{z=1}=2$.

4. 4 lorsque $\sqrt{4-z^2}\,|_{z=0}=-2$, et 0 lorsque $\sqrt{4-z^2}\,|_{z=0}=2$.

5. $\frac{1}{8}\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sqrt{(z-1)(z-2)}$. 6. $\frac{11}{3}\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sqrt[3]{2z^2-z^3}$.

21.14. $A\varphi(z_0)$.

21.15. 1. m. 2. $-m$.

21.16. 1. $m\varphi(z_0)$. 2. $-m\varphi(z_0)$.

21.17. $\dfrac{A}{\varphi' z_0}$.

21.19. 1. pour $a = -1$. 2. pour $a + b = 0$. 3. pour $a = 1/6$.

§ 22. Calcul des intégrales prises le long d'un contour fermé

Les problèmes de ce paragraphe impliquent l'application du *théorème des résidus :*

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D, sauf un nombre fini de points $a_k \in D$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ qui sont des points singuliers isolés de caractère uniforme, et continue jusqu'à la frontière ∂D de ce domaine, à l'exception des mêmes points que ci-dessus. On suppose que la frontière ∂D du domaine D est constituée par un nombre fini de courbes fermées lisses par morceaux. Alors,

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z),$$

si la frontière est parcourue dans le sens positif (c'est-à-dire si le domaine reste à gauche lorsqu'on parcourt la frontière dans le sens d'intégration).

Remarque. Si le domaine D comporte le point à l'infini, ce point est inclus dans les points a_k même si la fonction $f(z)$ est régulière en ce point.

Les procédés de calcul des résidus sont considérés connus.

22.01. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$ $(D : |z-1| < 1)$.

2. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ $(D : |z-1-i| < 2)$.

3. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3}\, dz$ $(D : x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3})$.

4. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ $(D : 2 < |z| < 4)$.

5. $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z}{z+3}\, e^{1/3z}\, dz$ $(D : |z| > 4)$.

En calculant des intégrales portant sur des fonctions régulières dans tout le plan à l'exception d'un nombre fini de points singuliers isolés de caractère uniforme, il faut avoir en vue que la somme entière de tous les résidus (y compris le résidu à l'infini) d'une telle fonction est nulle. Autrement dit, pour une telle fonction, l'égalité $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\, dz = -\int_{\partial D_1} f(z)\, dz$, où D_1 est le complémentaire de $\overline{D}$ dans le plan complexe élargi tout entier (l'ensemble D_1 peut être constitué par un seul ou par plusieurs domaines).

22.02. Calculer les intégrales ci-dessous :

1. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ $\quad (D : |z|<2)$.

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3 \sin^3 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}\, dz$ $\quad (D : |z|<3)$.

3. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1}\, dz$ $\quad (D : |z|<2)$.

4. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z+1} e^{1/z}\, dz$ $\quad (D : |z|<2)$.

5. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1}\, dz$ $\quad (D : |z|>3)$.

6. $\int\limits_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1}\, dz$ $\quad (D : |z|<2)$.

7. $\int\limits_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1}\, dz$ $\quad (D : |z-1|>1)$.

8. $\int\limits_{\partial D} \exp \frac{1}{1-z} \frac{dz}{z}$ $\quad (D : |z-2|+|z+2|<6)$.

9. $\int\limits_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1}\, dz$ $\quad (D : |z|>2)$.

10. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z\, dz}{(z^2-z)(z-i)}$ $\quad (D : |z-1|<1)$.

11. $\int\limits_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\, dz$ $\quad (D : |z|>1)$.

12. $\int\limits_{\partial D} \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i}\, dz$ $\quad (D : |z|<1,\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0)$.

13. $\int\limits_{\partial D} \frac{z\, dz}{ez^2-1}$ $\quad (D : |z|>4)$.

14. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3\, dz}{e^{z^2}-1}$ $\quad (D : |z|<4)$.

15. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3\, dz}{e^{2\pi i/z^3}-1}$ $\quad \left(D : |z|<\sqrt[3]{n+\frac{1}{2}}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\right)$.

22.03. Démontrer la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

(la circonférence est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

Lors du calcul des intégrales de contour portant sur des branches uniformes des fonctions analytiques multiformes, il faut faire attention à ce que les résidus trouvés concernent la branche intéressée.

22.04. Calculer les intégrales pour toutes les branches des fonctions analytiques multiformes se trouvant sous le signe d'intégration :

1. $\int_{\partial D}\frac{dz}{2+\ln(z+3)}(D\ :\ |z|<2,\ 9).$
2. $\int_{\partial D}\frac{dz}{\ln(z-2)+\pi i}\left(D\ :\ |z-1|<\frac{1}{2}\right).$
3. $\int_{\partial D}\frac{\cos z}{\ln z+\pi i}dz\left(D\ :\ |z+1|<\frac{1}{2}\right).$
4. $\int_{\partial D}\frac{\ln(z+1)}{\sin\pi z}dz\left(D\ :\ |z|<\frac{1}{2}\right).$
5. $\int_{\partial D}\ln\frac{z-1}{z+1}dz\ (D\ :\ |z|>2).$
6. $\int_{\partial D}\frac{\operatorname{arctg} z}{z}dz(D\ :\ |z|>2).$
7. $\int_{\partial D}\sqrt[4]{z^4+1}\,dz\ (D\ :\ |z|>2).$
8. $\int_{\partial D}\frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}\ (D\ :\ |z|>1).$
9. $\int_{\partial D}\frac{dz}{7-z+4\sqrt{3-z}}\ (D\ :\ |z+1|<1).$
10. $\int_{\partial D}\frac{e^z\,dz}{\sin(1+\sqrt{z})}\left(D\ :\ |z-2|<\frac{3}{2}\right).$

22.05. Vérifier que les fonctions analytiques multiformes se trouvant sous le signe d'intégration admettent la séparation, dans le domaine D, d'une branche uniforme satisfaisant aux conditions données. Calculer l'intégrale portant sur cette branche :

1. $\int_{\partial D}\frac{dz}{(2+\sqrt{z-1})\sin z}\left(D\ :\ |z|<\frac{1}{2}\right)$ (ici, $\sqrt{z-1}\big|_{z=0}=i$).
2. $\int_{\partial D}\frac{dz}{1+\ln(z-2)}\ (D\ :\ (z-3)<0{,}99)$ (ici, $\ln(z-2)\big|_{z=3}=0$).
3. $\int_{\partial D}\frac{dz}{\ln z-3\pi i}\left(D\ :\ |z+2|<\frac{3}{2}\right)$ (ici, $\ln z\big|_{z=-e}=1-\pi i$).
4. $\int_{\partial D}\frac{z+2}{2\pi i-\ln(1+z)}dz\left(D\ :\ |z-2|<\frac{5}{2}\right)$ (ici $\ln(1+z)\big|_{z=e-1}=1-2\pi i$).

5. $\int\limits_{\partial D} \frac{z+2}{z+\ln(1-z)} dz \left(D : |z+2| < \frac{5}{2}\right)$ (ici, $\ln(1-z)|_{z=1-e} = 1$).

6. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{\pi + \operatorname{arctg} z}$ $(D : |z| > 2)$ $\left(\text{ici, } \operatorname{arctg} z|_{z=\infty} = \frac{\pi}{2}\right)$.

7. $\int\limits_{\partial D} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} dz$ $(D : |z| > 1{,}1)$ $\left(\text{ici, } \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\bigg|_{z=\frac{5}{3}} = -\frac{1}{2}\right)$.

8. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+2\sin\sqrt{z}}$ $(D : |z-10| < 9{,}99)$ (ici, $\sqrt{z}|_{z=4} = -2$).

9. $\int\limits_{\partial D} \sqrt{(z-a)(z-b)}\, dz$ $(D : |z| > |a| + |b|)$

$\left(\text{ici, } \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)(z-b)} \to 1,\ z \to \infty\right)$.

10. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}$ $(D : |z| > |a| + |b|)$

$\left(\text{ici, } \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)(z-b)} \to -1,\ z \to \infty\right)$.

11. $\int\limits_{\partial D} \frac{z\, dz}{\sqrt[3]{(z-a)^2(z-b)}}$ $(D : |z| > |a| + |b|)$

$\left(\text{ici, } \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)^2(z-b)} \to e^{-2\pi i/3},\ z \to \infty\right)$.

12. $\int\limits_{\partial D} \frac{z\, dz}{\sqrt[4]{(z-a)^3(z-b)}}$ $(D : |z| > |a| + |b|)$

$\left(\text{ici, } \frac{1}{z}\sqrt[4]{(z-a)^3(z-b)} \to 1,\ z \to \infty\right)$.

13. $\int\limits_{\partial D} (z-a)^{\alpha}(z-b)^{1-\alpha} \to dz$ $(D : |z| > |a| + |b| + 1)$

$\left(\text{ici, } \frac{1}{z}(z-a)^{\alpha}(z-b)^{1-\alpha} \to 1,\ z \to \infty\right)$.

14. $\int\limits_{\partial D} z\sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \ln\frac{z-a}{z-b}\, dz$ $(D : |z| > |a| + |b|)$

$\left(\text{ici, } \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \to 1,\ \ln\frac{z-a}{z-b} \to 0,\ z \to \infty\right)$.

15. $\int\limits_{\partial D} \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} \ln\frac{z-a}{z-b}\, dz$ $(D : |z| > |a| + |b|)$

$\left(\text{ici, } \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} \to 1,\ \ln\frac{z-a}{z-b} \to 2\pi i,\ z \to \infty\right)$.

16. $\int\limits_{\partial D} z^n \ln \frac{z-a}{z-b}\, dz$ $(D\ :\ |z| > |a|+|b|)$; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$\left(\text{ici, } \ln\frac{z-a}{z-b} \to 2\pi i,\ z\to\infty\right)$.

* * *

22.06. Montrer que l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\, dz$, prise le long de la frontière du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, est égale à la somme des résidus de la fonction figurant sous le signe d'intégration dans ce demi-plan, et calculer sa valeur.

Indication. Appliquer le théorème des résidus à l'intégrale prise sur le bord du demi-disque $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| < R$, ensuite passer à la limite pour $R \to \infty$.

22.07. Montrer que l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z-1} e^{-z^2}\, dz$, prise sur la frontière de l'angle $|\arg z| < \pi/4$, est égale à la somme des résidus de la fonction figurant sous le signe d'intégration dans cet angle, et calculer sa valeur.

Indication. En estimant l'intégrale le long de l'arc de circonférence $|\arg z| < \pi/4$, $|z| = R$, utiliser le lemme de Jordan (voir le problème 5.37).

22.08. Se convaincre que le théorème des résidus est applicable aux intégrales ci-dessous, prises le long de la frontière des domaines infinis indiqués entre parenthèses, et calculer ces intégrales :

1. $\int\limits_{\partial D} \frac{ze^{-z}}{z^2-1}\, dz \quad (D\ :\ \operatorname{Re} z > 0)$.

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{\operatorname{sh} 2z}\, dz \quad \left(D\ :\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\int\limits_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz \quad (D\ :\ -1 < \operatorname{Re} z < 1)$.

4. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^2}{(z-1)^2} e^{-z^2}\, dz \quad \left(D\ :\ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}\right)$.

5. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}} \quad (D\ :\ x > y^2,\ (z = x+iy))$ $\left(\text{ici, } \sqrt{z^2+1}\,\big|_{z=0} = 1\right)$.

22.09. Se convaincre que le théorème des résidus n'est pas applicable aux intégrales ci-dessous :

1. $I = \int\limits_{\partial D} e^{-z^2}\, dz \quad (D\ :\ \operatorname{Im} z > 0)$,

2. $I = \int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{1+z^2}\, dz \quad (D\ :\ \operatorname{Im} z > 0)$.

22.10. Soit D tout le plan complexe présentant une coupure suivant le demi-axe réel négatif, et désignons par $\sqrt{z}$ et $\ln z$ les branches positives pour $z>1$ de ces fonctions dans le domaine D. Montrer que le théorème des résidus est applicable à l'intégrale $\int\limits_{\partial D} \frac{\sqrt{z}\ln z}{1+z^2}\,dz$, et calculer cette intégrale.

Indication. Examiner d'abord l'intégrale sur la frontière du domaine

$$\varrho<|z|<R, \qquad -\pi<\arg z<\pi$$

(couronne munie d'une coupure), ensuite poser $\varrho\to 0$ et $R\to\infty$.

22.11. Se convaincre que le théorème des résidus est applicable aux intégrales ci-dessous et calculer ces intégrales :

1. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sqrt{z}\ln^2 z}{(z-i)^2}\,dz \quad (D : -\pi<\arg z<\pi)$

(ici, $\sqrt{z}>0$ pour $z>0$, et $\ln z>0$ pour $z>1$).

2. $\int\limits_{\partial D} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\,dz \quad (D : z\notin[-1,\ 1]) \left(\text{ici, } \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\Big|_{z=\infty}=1\right).$

3. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2-1}\,dz \quad (D : z\notin[-i,\ i])$ (ici, $\sqrt{1+z^2}\to 1$ pour $z\to 0$, $\operatorname{Re} z>0$).

4. $\int\limits_{\partial D} \frac{\arcsin z}{1+z^2}\,dz \quad (D : \{z\notin(-\infty,\ -1],\ z\notin[1,\ +\infty)\})$

(ici, $\arcsin z|_{z=0}=\pi$).

5. $\int\limits_{\partial D} \sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}\,dz \quad (D : \{z\notin[-2,\ -1],\ z\notin[1,\ 2]\})$

(ici, $\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}|_{z=0}=2$).

6. $\int\limits_{\partial D} \frac{\ln z}{(z+i)^2}\,dz \quad (D : \{z\notin C\},\ C : \{x=y^2,\ y\geq 0\})$ (ici, $\ln z|_{z=-1}=-\pi i$).

* * *

22.12. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions régulières dans la fermeture $\overline{D}$ d'un domaine fini D et supposons que la fonction $f(z)$ possède dans le domaine D les zéros $a_1, \ldots, a_n$ (chaque zéro s'écrit tant de fois que son ordre l'indique), sans avoir d'autres zéros ni dans le domaine D ni sur sa frontière. Montrer que

$$\int\limits_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} g(a_k).$$

22.13. Supposons que la fonction $f(z)$ du problème 22.12 ait encore dans le domaine D les zéros $b_1, \ldots, b_m$ (chaque zéro s'écrit aussi tant de fois

que son ordre l'indique). Montrer que

$$\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} g(a_k) - 2\pi i\sum_{k=1}^{m} g(b_k).$$

22.14. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine fini D, et soient $a_1, \ldots, a_n$ des points deux à deux distincts situés dans le domaine D. Notons

$$P(z) = (z-a_1)\ldots(z-a_n)$$

et

$$\Phi(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{P(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (z \notin \bar{D}).$$

Montrer que la fonction $\Phi(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan et qu'elle représente un polynôme de degré $n-1$ satisfaisant aux conditions

$$\Phi(a_k) = f(a_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

(Le polynôme $\Phi(z)$ est appelé *polynôme d'interpolation de Lagrange.*)

22.15. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine D qui contient le segment $[-1, 1]$. Montrer qu'une fonction $\Phi(z)$, définie en dehors du domaine D par l'intégrale

$$\Phi(z) = -\frac{(1-z^2)^n}{2\pi i}\int_{\partial D} f(\zeta)(1-\zeta^2)^{-n}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (z \notin \bar{D}),$$

se prolonge analytiquement dans tout le plan et représente un polynôme de degré $2n-1$ satisfaisant aux conditions

$$\Phi^{(k)}(\pm 1) = f^{(k)}(\pm 1) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

22.16. Supposons que les fonctions $f(z)$, $P(z)$ et $\Phi(z)$ soient les mêmes qu'au problème 22.14. Notons D_1 le domaine de régularité de la fonction $f(z)$ qui contient $\bar{D}$ (étant donné la régularité de $f(z)$ dans $\bar{D}$, un tel domaine existe) et posons

$$R(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{P(\zeta)} \quad (z \in D_1,\ z \notin \bar{D}).$$

Montrer que la fonction $R(z)$ se prolonge analytiquement dans tout le domaine D et qu'elle est égale à $f(z) - \Phi(z)$.

22.17. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $|z| \leq R$, et soit $g(z)$ une fonction définie pour $|z| < R$ par l'égalité

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = R}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - z)} \quad (|z| < R).$$

Montrer que la fonction $g(z)$ est régulière pour $|z| \leq R$ aussi et trouver l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = R}(\zeta - a)(\zeta - b)g(\zeta)\frac{d\zeta}{z - \zeta} \quad (|z| < R)$$

dans les cas où :

1. $|a| < R$, $|b| < R$. 2. $|a| < R$, $|b| > R$. 3. $|a| > R$, $|b| > R$.

22.18. Soit donnée une fonction $g(z)$ régulière pour $|z| \leq R$. Trouver la solution générale $f(z)$ de l'équation

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-z)} = g(z) \qquad (|z|<R),$$

régulière pour $|z| \leq R$, dans les cas où :

1. $|a|<R$, $|b|<R$. 2. $|a|<R$, $|b|>R$.

22.19. Soient a, b, c des nombres deux à deux distincts situés dans le disque $|z|<R$. Quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire une fonction donnée $g(z)$ régulière pour $z \leq R$ pour que l'équation

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{(\zeta-a)(\zeta-b)}{(\zeta-c)(\zeta-z)} f(\zeta) d\zeta = g(z) \qquad (|z|<R)$$

admette une solution $f(z)$ régulière pour $|z| \leq R$? Trouver cette solution si les conditions de résolubilité sont remplies.

22.20. Trouver toutes les solutions $f(z)$ de l'équation

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z} = z \qquad (|z|<2),$$

régulières pour $|z| \leq 2$.

22.21. Trouver toutes les solutions $f(z)$ de l'équation

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=2} \left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} = z \qquad (|z|<2),$$

régulières pour $|z| \leq 2$.

RÉPONSES

22.01.

1. $-\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 2. $-\dfrac{\pi i}{2}$. 3. $\pi i \sin 1$. 4. $-\dfrac{3\pi i}{64}$. 5. $\dfrac{16}{3}\pi i$.

22.02.

1. 0. 2. 0. 3. $2\pi i$. 4. $-\dfrac{2\pi i}{3}$. 5. $2\pi i \cos 1$. 6. $4\pi i(\cos 1-\sin 1)$.

7. $-2\pi i$. 8. $2\pi i$. 9. $\pi i(\cos 1+2\sin 1)$. 10. $\dfrac{\pi}{2}(i-1)\sin 1$. 11. 0.

12. $\dfrac{\pi}{2}(i-1)e^{\pi/2}$. 13. $-10\pi i$. 14. 0. 15. $n+1$.

22.04.

1. $2\pi i e^{-2}$ si $\ln(z+3)|_{z=0}=\ln 3$, et 0 si $\ln(z+3)|_{z=0}=\ln 3+2k\pi i$, où $k \neq 0$.
2. $-2\pi i$ si $\ln(z-2)|_{z=1}=-\pi i$, et 0 pour les autres branches.
3. $-2\pi i \cos 1$ si $\ln z|_{z=-1}=-\pi i$, et 0 pour les autres branches.
4. $-4k\pi$ si $\ln(1+z)|_{z=0}=2k\pi i$. 5. $4\pi i$ pour toutes les branches.
6. $-\pi^2 i(2k+1)$ si $\operatorname{arctg} z|_{z=\infty}=\pi\left(k+\dfrac{1}{2}\right)$. 7. 0 pour toutes les branches.

8. $-\pi i$ si $\sqrt{4z^2+4z+3}>0$ pour $z>1$, et πi si $\sqrt{4z^2+4z+3}<0$ pour $z>1$.

9. 0 si $\sqrt{3-z}\,|_{z=-1}=2$; $-4\pi i$ si $\sqrt{3-z}\,|_{z=-1}=-2$.

10. 0 si $\sqrt{z}\,|_{z=1}=1$, et $-4\pi i e$ si $\sqrt{z}\,|_{z=1}=-1$.

22.05.

1. $\frac{2}{5}\pi(1+2i)$. 2. $\frac{2\pi i}{e}$. 3. 0. 4. 0. 5. $\frac{4}{3}\pi i$. 6. $-\frac{8i}{9\pi}$.

7. $-2\pi i$. 8. $\frac{8\pi^2 i}{3\sqrt{3}}$. 9. $\frac{\pi i}{4}(b-a)^2$. 10. $2\pi i$. 11. $\frac{\pi}{3}(2a+b)(\sqrt{3}+i)$.

12. $-\frac{\pi i}{2}(3a+b)$. 13. $\pi i\alpha(1-\alpha)(a-b)^2$. 14. $2\pi i(a-b)b$.

15. $\frac{4}{3}\pi^2(b-a)\left(1-\frac{3i}{2\pi}\right)$. 16. $\frac{2\pi i}{n+1}(a^{n+1}-b^{n+1})$.

22.06. $-\frac{2\pi}{e}$.

22.07. $\frac{2\pi i}{e}$.

22.08.

1. $\frac{\pi i}{e}$. 2. πi. 3. $2\pi i$. 4. 0. 5. $-\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

22.09.

1. $I>0$, tandis que la somme des résidus est égale à zéro. 2. $I=0$, tandis que la somme des résidus est différente de zéro.

22.10. $\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}i$.

22.11.

1. $-\pi^2\left[1+\frac{\pi}{8}-i\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\right]\sqrt{2}$. 2. $2\pi i$. 3. $2\pi i(\sqrt{2}-1)$.

4. $2\pi i\ln(\sqrt{2}-1)$. 5. 0. 6. $-2\pi i$.

22.17.

1. $I=\frac{z-b}{a-b}f(a)+\frac{z-a}{b-a}f(b)-f(z)$. 2. $I=\frac{z-b}{a-b}f(a)-f(z)$. 3. $I=-f(z)$.

22.18.

1. $f=(z-a)(z-b)g(z)+cz+c_1$. 2. $f=(z-a)(z-b)g(z)+c(z-b)$.

22.19. L'équation est résoluble si la condition $(a-c)g(a)=(b-c)g(b)$ est remplie et sa solution est de la forme

$$f(z)=\frac{(z-c)g(z)-(a-c)g(a)}{(z-a)(z-b)}.$$

22.20. $f(z)=z$.

22.21. $f(z)=z/2$.

§ 23. Principe de l'argument. Théorème de Rouché

En résolvant les problèmes ci-dessous, considérer connu le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction régulière (à l'exception peut-être d'un nombre fini de pôles) *dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine borné D dont la frontière ∂D comporte un nombre fini de courbes simples fermées lisses par morceaux. Si la fonction $f(z)$ ne possède ni zéros ni pôles sur la frontière ∂D, la formule ci-dessous est valable*

$$n_f^+ - n_f^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz, \tag{1}$$

où n_f^+ est le nombre de zéros de la fonction $f(z)$ dans le domaine D, tandis que n_f^- est le nombre de pôles de cette fonction dans le même domaine (compte tenu de leur multiplicité).

23.01. Supposons que la frontière ∂D d'un domaine D soit constituée par m courbes simples fermées lisses par morceaux $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Sous les hypothèses du théorème formulé plus haut, montrer que la formule (1) peut être mise sous la forme

$$n_f^+ - n_f^- = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial s} \arg f(z) |dz|.$$

Ici, $\frac{\partial}{\partial s}$ signifie la différentiation suivant la direction de la courbe au point d'intégration.

23.02. Montrer que la formule (1) peut être mise sous la forme

$$n_f^+ - n_f^- = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial n} \ln |f(z)|\ |dz|.$$

Ici, $\frac{\partial}{\partial n}$ signifie la différentiation suivant la direction de la normale extérieure à la courbe au point d'intégration.

Indication. Utiliser les conditions de Cauchy-Riemann pour les parties réelle et imaginaire de la fonction $\ln f(z)$.

Soit [illegible] une courbe fermée continue arbitraire ne passant pas par le point $z = 0$. Par le symbole $\operatorname{var}_C \ln z$ nous allons désigner la différence entre le résultat du prolongement analytique de la fonction $\ln z$ le long de la courbe C et l'élément initial de $\ln z$.

23.03. Supposons que la frontière ∂D d'un domaine borné D soit constituée par les courbes fermées lisses par morceaux $C_1, \ldots, C_m$, et soit $f(z)$ une fonction régulière dans le domaine D, sauf en un nombre fini de pôles, et continue jusqu'à sa frontière (à l'exception des mêmes pôles). Montrer que, si la fonction $f(z)$ ne devient ni zéro ni infinie sur la frontière du domaine D, alors la formule ci-dessous a lieu (par $f(C)$ on désigne l'image de la courbe C par l'application $w = f(z)$) :

$$n_f^+ - n_f^- = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{var}_{f(C_k)} \ln w.$$

Cette formule peut être mise sous la forme

$$n_f^+ - n_f^- = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \underset{f(C_k)}{\text{var}} \arg w$$

(principe de l'argument).

23.04. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z| \leq R$, excepté les pôles $a_1, \ldots, a_n$ (chaque pôle est écrit tant de fois que son ordre l'indique), et soient $b_1, \ldots, b_m$ les zéros de cette fonction (chaque zéro s'écrit tant de fois que son ordre l'indique). Démontrer la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\mathrm{R}e^{i\varphi})| \, d\varphi = \ln |f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{R}{|a_k|} + \sum_{k=1}^{m} \ln \frac{R}{|b_k|}$$

(formule de Jensen).

Indication. Ecrire la formule du problème 23.02 pour le disque $|z| < \varrho$ et, après avoir effectué certaines transformations, intégrer par rapport à ϱ.



23.05. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine borné D, sauf en un nombre fini de pôles, et continue jusqu'à sa frontière (à l'exception des mêmes pôles). Montrer que, si la fonction $\operatorname{Im} f(z)$ ne s'annule pas sur la frontière du domaine D, le nombre de zéros de la fonction $f(z)$ dans le domaine D est égal au nombre de ses pôles dans ce domaine.

Indication. Appliquer le principe de l'argument (voir le problème 23.03) et remarquer que l'image de chaque composante de la frontière du domaine D se situe dans le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$ ou dans le demi-plan $\operatorname{Im} w < 0$, où la fonction $\ln w$ admet la séparation d'une branche régulière.

23.06. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine borné D, sauf en un nombre fini de pôles, et continue jusqu'à sa frontière ∂D (à l'exception des mêmes pôles). Notons

$$M = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Montrer que, pour chaque valeur complexe de a satisfaisant à la condition $|a| > M$, le nombre de zéros de la fonction $f(z) - a$ dans le domaine D est égal au nombre de pôles de cette fonction dans ce même domaine.

23.07. Soient $F(z)$ et $f(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine borné D, continues jusqu'à sa frontière ∂D et satisfaisant à la condition $|f(z)| < |F(z)|$ $(z \in \partial D)$. Montrer que le nombre de zéros de la fonction $F(z) + f(z)$ dans le domaine D est égal au nombre de zéros de la fonction $F(z)$ dans le même domaine *(théorème de Rouché).*

23.08. Soient $f(z)$ et $F(z)$ deux fonctions régulières dans un domaine borné D et continues jusqu'à sa frontière ∂D sur laquelle la fonction $\operatorname{Im} \frac{f(z)}{F(z)}$ ne s'annule pas. Montrer que le nombre de zéros de la fonction $F(z)$ dans

le domaine D est le même que le nombre de zéros de la fonction $F(z)+f(z)$ dans ce domaine.

23.09. Trouver le nombre de racines des équations ci-dessous dans les domaines indiqués entre parenthèses :

1. $z^4-3z+1=0(|z|<1)$. 2. $2z^4-5z+2=0$ $(|z|)<1)$.

3. $z^7-5z^4+z^2-2=0(|z|<1)$. 4. $z^8-4z^5+z^2-1=0$ $(|z|<1)$.

5. $z^3-12z+2=0$ $(|z|<2)$. 6. $z^4-9z+1=0$ $(|z|<2)$.

7. $z^6-6z+10=0$ $(|z|>1)$. 8. $z^4+z^3-4z+1=0$ $(1<|z|<2)$.

23.10. Montrer que pour toute valeur complexe de a et pour un nombre entier $n\geq 2$, l'équation $1+z+az^n=0$ a au moins une racine dans le disque $|z|\leq 2$.

Indication. Outre le théorème de Rouché, utiliser les formules de Viète (pour des valeurs de $|a|$ assez grandes).

23.11. Montrer que, pour $\lambda>1$, l'équation $ze^{\lambda-z}=1$ admet dans le disque $|z|\leq 1$ exactement une racine (réelle d'ailleurs).

23.12. Montrer que, pour $\lambda>1$, l'équation $z=\lambda-e^{-z}$ a dans le demi-plan $\operatorname{Re} z\geq 0$ exactement une racine (réelle d'ailleurs).

23.13. Montrer que l'équation $az^3-z+b=e^{-z}(z+2)$ n'admet pas de racine dans le demi-plan $\operatorname{Re} z\geq 0$ pour $a>0$, $b>2$.

23.14. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<1$. Montrer qu'il existe un nombre $\varrho>0$ tel que, pour tous les w du disque $|w|<\varrho$, l'équation $z=wf(z)$ ait dans le disque $|z|<1$ exactement une racine.

23.15. Soient $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z|<1$ et $f(0)\neq 0$. Montrer qu'il existe un nombre $\varrho>0$ tel que, pour tous les w de la couronne $0<|w|<\varrho$, l'équation $z^m=wf(z)$ ait dans le disque $|z|<1$ exactement m racines distinctes.

23.16. Montrer que l'équation $z\sin z=1$ n'a que des racines réelles.

Indication. Trouver le nombre de racines réelles de cette équation sur le segment $\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ et le comparer avec le nombre de toutes les racines de cette équation dans le disque $|z|<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

23.17. Montrer que l'équation $\operatorname{tg} z=z$ n'a que des racines réelles



23.18. Soit $\{f_n(z)\}$ une suite de fonctions régulières dans un domaine D qui converge uniformément dans ce domaine vers une fonction $f(z)$ non identiquement nulle. Notons D' un domaine situé strictement à l'intérieur du domaine D et tel que la fonction $f(z)$ n'ait pas de zéros sur sa frontière Montrer que toutes les fonctions $f_n(z)$ à partir d'un certain numéro possèdent dans le domaine D' autant de zéros que la fonction $f(z)$.

23.19. Soit $f(z)$ une fonction entière représentant la limite d'une suite de polynômes $\{P_n(z)\}$ qui converge uniformément dans chaque partie finie du

plan. Montrer que, si tous les polynômes $P_n(z)$ ne possèdent que des zéros réels, alors la fonction $f(z)$ et toutes ses dérivées n'ont aussi que des zéros réels.

23.20. Montrer que toutes les dérivées de la fonction e^{-z^2+az}, où a est un nombre réel arbitraire, n'ont que des zéros réels.

* * *

23.21. Supposons que tous les zéros du polynôme $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+ \dots +a_n$ se situent dans le disque $|z|<1$. Notons

$$Q(\varphi)=\operatorname{Re} P(e^{i\varphi}), \qquad S(\varphi)=\operatorname{Im} P(e^{i\varphi}), \quad -\infty<\varphi<+\infty.$$

Montrer que :

1. Tous les zéros des polynômes trigonométriques $Q(\varphi)$ et $S(\varphi)$ sont réels (dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ chacun de ces polynômes a exactement $2n$ zéros).

2. A l'intérieur de chaque couple de zéros du polynôme $Q(\varphi)$ on trouve exactement un zéro du polynôme $S(\varphi)$ et vice versa.

Indication. Conformément au principe de l'argument, le nombre de zéros du polynôme $P(z)$ dans le disque $|z|<1$ est égal à $\underset{0<\varphi<2\pi}{\operatorname{var}} \dfrac{Q(\varphi)}{S(\varphi)}$.

23.22. Soient $0\leq a_0<a_1<\dots<a_n$. Montrer que la fonction

$$F(z)=a_0+a_1\cos z+\dots+a_n\cos nz$$

n'a que des zéros réels.

Indication. Voir les problèmes 2.29 et 23.21.

23.23. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue et monotone dans l'intervalle $0\leq x\leq\alpha$. Montrer que la fonction

$$F(z)=\int_0^\alpha \varphi(x)\cos xz\,dx$$

n'a que des zéros réels.

Indication. Ecrire l'intégrale en tant que limite de la somme intégrale.

23.24. La fonction de Bessel d'ordre n, $n=0, 1, \dots$, est définie par l'égalité

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} e^{\frac{z}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Montrer que la fonction $J_n(z)$ n'a que des zéros réels.

23.25. Soient

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n,$$

$$Q(x)=\operatorname{Re} P(x), \qquad S(x)=\operatorname{Im} P(x), \quad -\infty<x<\infty.$$

Montrer que toutes les racines du polynôme $P(z)$ se situent dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ si, et seulement si, les conditions ci-dessous sont satisfaites:

a) Les polynômes $Q(x)$ et $S(x)$ n'ont que des zéros réels simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ (numérotés en ordre croissant);

b) $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \ldots < \mu_{n-1} < \lambda_n$;

c) $S(x) < 0, \ x > \mu_{n-1}$.

23.26. Montrer que le polynôme $z^2 + a_1 z + a_2$ n'a des zéros que dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies :

$$\beta_1 < 0, \quad \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\beta_2}{\beta_1} + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 < 0,$$

où

$$\alpha_k = \operatorname{Re} a_k, \ \beta_k = \operatorname{Im} a_k \ (k = 1, \ 2).$$

RÉPONSES

23.09.

1. 1. 2. 1 3. 4. 4. 5. 5. 1. 6. 1. 7. 6. 8. 3.

§ 24. Points isolés de ramification

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la couronne $0 < |z-a| < r$ sans y être régulière (c'est-à-dire qu'elle n'est pas uniforme). Alors, le point $z = a$ est appelé *point isolé de ramification* pour la fonction $f(z)$.

Si en chaque point de la couronne le nombre de différents éléments de la fonction $f(z)$ est égal à n, le point $z = a$ est appelé *point de ramification d'ordre n* pour la fonction $f(z)$. Si en un point quelconque de la couronne le nombre de différents éléments de la fonction $f(z)$ est infini, le point $z = a$ est appelé *point de ramification logarithmique* pour la fonction $f(z)$ (ou *point de ramification d'ordre infini*).

24.01. Les fonctions ci-dessous sont des fonctions analytiques dans la couronne $0 < |z| < 1$. Etablir le caractère du point isolé de ramification $z = 0$.

1. $\frac{1}{\sqrt{z}}$. 2. $\sqrt{\ln(1+z)}$, $\ln(1+z)|_{z=0} = 0$. 3. $\ln\frac{z+1}{z}$.

4. $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$. 5. $\ln(\sqrt{z} + z)$. 6. $\frac{1}{\ln z}$. 7. $z^{\sqrt{2}}$. 8. $\sqrt[n]{\ln z}$.

9. $\sqrt[3]{\sin \pi z}$. 10. $\ln \ln z$. 11. $\ln \operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2}$. 12. $e^{-\sqrt{\ln z}}$.

Remarque. La définition des différents types de points isolés de ramification donnée plus haut est aussi valable pour le cas, où la fonction $f(z)$ est analytique non dans la couronne $0 < |z-a| < r$, mais dans un domaine simplement connexe arbitraire privé du point $z = a$.

24.02. Les fonctions ci-dessous sont des fonctions analytiques dans le plan fini présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$. Etablir le caractère du point isolé de ramification $z = \infty$.

1. $\sqrt{z(z^2-1)}$. 2. $\ln(z+\sqrt{z^2-1})$.

3. $\sqrt[3]{\ln\frac{z+1}{z-1}}$, $\ln\frac{z+1}{z-1}>0$ pour $z>1$. 4. $\ln\ln z$.

5. $\sqrt{\ln\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$, $\sqrt{z^2-1}>0$ pour $z>1$.

6. $\sqrt[3]{\ln\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2z}}$, $\sqrt{z^2-1}<0$ pour $z>1$.

24.03. Soit $z=a$ un point de ramification d'ordre fini pour deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$. Montrer que ce point est aussi un point de ramification d'ordre fini ou un point singulier isolé de caractère uniforme pour les fonctions $f(z)+g(z)$ et $f(z)g(z)$.

24.04. Soit $z=a$ un point de ramification d'ordre m pour une fonction $f(z)$ et un point de ramification d'ordre n pour une fonction $g(z)$. Etablir l'ordre du point de ramification $z=a$ pour les fonctions $f(z)+g(z)$ et $f(z)g(z)$ en supposant que m et n sont premiers entre eux.

24.05. Résoudre le problème précédent en supposant que m et n sont distincts sans être obligatoirement premiers entre eux.

Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine multiplement connexe contenant la couronne $0<|z-a|<r$, généralement parlant, la fonction $f(z)$ se décompose dans cette couronne en plusieurs branches. Pour chacune de ces branches, le point $z=a$ est un point isolé de ramification ou un point singulier isolé de caractère uniforme. Les points singuliers de ces branches sont appelés *points singuliers de la fonction $f(z)$ situés au-dessus du point $z=a$.*

24.06. Les fonctions ci-après sont des fonctions analytiques dans tout le plan complexe privé d'un nombre fini de points. Etablir le nombre et le caractère des points singuliers situés au-dessus de ces points exceptionnels.

1. $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$. 2. $\operatorname{arctg} z$. 3. $\ln(z+\sqrt{z^2+1})$. 4. $(\arcsin z^2)$.

5. $\sqrt[3]{\arcsin z}$. 6. $e^{\operatorname{arctg} z}$. 7. $\sqrt{z \operatorname{arctg} z}$. 8. $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z(1-z)}}$.

24.07. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la couronne $r<|z|<R$ (désignons-la par D), et soit $f_a(z)$ un élément quelconque de cette fonction au point $z=a$. Désignons par le symbole $\{f_a(z)\}_m$ l'élément obtenu à partir de l'élément $f_a(z)$ par prolongement le long de la circonférence $|z|=|a|$ parcourue m fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Montrer que, pour que la fonction $f(z)$ soit une fonction n-forme dans la couronne D, il faut et il suffit que $\{f_a(z)\}_m\neq f_a(z)$ pour $m=1, 2, \ldots, n-1$, et $\{f_a(z)\}_n=$ $=f_a(z)$.

24.08. Soit $z=a$ un point de ramification d'ordre n pour une fonction $f(z)$. Montrer que l'expression $f(a+\zeta^n)$ représente n fonctions ayant $\zeta=0$ comme point singulier isolé de caractère uniforme.

24.09. Montrer que, si une fonction $f(z)$ admet le point $z=a$ comme point de ramification d'ordre n, alors elle peut être mise sous la forme



$$f(z)=F(\sqrt[n]{z-a}),$$

où la fonction $F(w)$ admet le point $w=0$ comme point singulier isolé de caractère uniforme.

*   *   *

Soit $z=a$ un point de ramification d'ordre fini pour une fonction $f(z)$. Si la limite

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

existe (qu'elle soit finie ou infinie), lorsque le point z tend arbitrairement vers le point a, alors le point $z=a$ est appelé *point singulier algébrique* de la fonction $f(z)$.

24.10. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le disque $|z-a|<r$ ayant au point $z=a$ un zéro d'ordre m sans avoir d'autres zéros. Montrer que l'expression $\sqrt[n]{f(z)}$ représente :

a) si les nombres m et n sont premiers entre eux, une fonction analytique dans la couronne $0<|z-a|<r$ ayant au point $z=a$ un point de ramification algébrique d'ordre n ;

b) si m est divisible par n, n fonctions distinctes régulières dans le disque $|z-a|<r$;

c) si les nombres m et n admettent comme plus grand commun diviseur le nombre p, $1<p<n$, p fonctions distinctes analytiques dans la couronne $0<|z-a|<r$ ayant au point $z=a$ un point de ramification algébrique d'ordre n/p.

24.11. Montrer que les assertions *a)* et *c)* du problème 24.10 restent également en vigueur dans le cas où la fonction $f(z)$ a au point $z=a$ un pôle d'ordre m sans avoir ni zéros, ni pôles aux autres points du disque $|z-a|<r$.

24.12. Montrer qu'une fonction $f(z)$ admettant au point $z=a$ un point de ramification algébrique d'ordre n peut être mise sous la forme $f(z)=$ $=F(\sqrt[n]{z-a})$, où $F(w)$ est une fonction régulière au point $w=0$ ou y admet un pôle.

24.13. Montrer qu'une fonction $f(z)$ admettant au point $z=a$ un point de ramification algébrique d'ordre n peut être mise sous la forme

$$f(z)=g_0(z)+(z-a)^{1/n}g_1(z)+(z-a)^{2/n}g_2(z)+\ldots+(z-a)^{(n-1)/n}g_{n-1}(z),$$

où $g_k(z)$ sont des fonctions régulières au point $z=a$ ou y admettent des pôles.

24.14. Soit $z=a$ un point singulier algébrique d'une fonction $f(z)$. Montrer qu'il existe une couronne $0<|z-a|<\delta$ dans laquelle tous les éléments de la fonction $f(z)$ ne s'annulent pas.

24.15. Soit $z=a$ un point singulier algébrique des fonctions $f(z)$ et $g(z)$. Montrer que pour les fonctions

$$f(z)+g(z), \quad f(z)g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)}$$

le point $z=a$ ne peut être que : un point singulier algébrique, un pôle ou un point singulier éliminable.

24.16. Soient $z=a$ un point singulier algébrique d'une fonction $f(z)$ et $\lim_{z\to a} f(z)=b$, et soit $w=b$ un point singulier algébrique d'une fonction $F(w)$. Montrer que $z=a$ est un point singulier algébrique de la fonction $F[f(z)]$.

24.17. Soient $z=a$ un point singulier algébrique d'une fonction $f(z)$ et $\lim_{z\to a} f(z)=b$, $b\neq\infty$, et soient $F(w)$ une fonction régulière au point $w=b$ et $F'(b)\neq 0$. Montrer que le point $z=a$ est un point de ramification algébrique de même ordre pour les fonctions $F[f(z)]$ et $f(z)$ (si $F'(b)=0$, l'ordre du point de ramification pour la fonction $F[f(z)]$ peut être moindre que pour la fonction $f(z)$; voir le problème 24.10).

24.18. Soient $z=a$ un point de ramification algébrique d'ordre 2 pour une fonction $f(z)$ et $\lim_{z\to a} f(z)=b$, et soit $w=b$ un point de ramification algébrique d'ordre 3 pour une fonction $F(w)$. Quel peut être l'ordre du point de ramification $z=a$ pour la fonction $F[f(z)]$ (indiquer toutes les possibilités existantes)?

24.19. Résoudre le problème précédent pour des ordres de ramification m et n arbitraires (respectivement pour les fonctions $f(z)$ et $F(w)$).

24.20. Montrer que, si le point $z=a$ est un point de ramification logarithmique pour une fonction $f(z)$ et un point singulier algébrique pour la fonction $g(z)=e^{f(z)}$, alors la limite de $g(z)$ pour $z\to a$ ne peut être égale qu'à zéro ou à l'infini.

24.21. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la couronne $r<|z-a|<R$. Montrer que l'expression $f(a+e^{\zeta})$ représente un ensemble fini ou infini de fonctions régulières dans la bande $\ln r<\operatorname{Re}\zeta<\ln R$.

24.22. Soit $z=a$ un point isolé de ramification d'une fonction $f(z)$. Notons

$$M(\varrho)=\sup_{|z-a|=\varrho}|f(z)|$$

(pour trouver la borne supérieure, on prend les valeurs de tous les éléments de la fonction $f(z)$ obtenus à partir d'un élément quelconque par prolongement le long de la circonférence $|z-a|=\varrho$ parcourue n'importe quel nombre de fois). Montrer que, pour $\varrho\to 0$, la fonction $M(\varrho)$ ne peut pas tendre vers zéro plus vite que toute puissance de ϱ.

Indication. Voir le problème 14.41.

24.23. Montrer qu'une fonction $f(z)$ non identiquement constante, analytique dans tout le plan élargi privé de deux points, satisfaisant à la condition $|f(z)|\leq 1$ pour n'importe quel de ses éléments, ne peut pas exister.

RÉPONSES

24.01.

1. Point de ramification d'ordre 2.
2. Point de ramification d'ordre 2.
3. Point de ramification logarithmique.
4. Point de ramification d'ordre 6.
5. Point de ramification logarithmique.
6. Point de ramification logarithmique.
7. Point de ramification logarithmique.
8. Point de ramification logarithmique.
9. Point de ramification d'ordre 3.
10. Point de ramification logarithmique.
11. Point de ramification logarithmique.
12. Point de ramification logarithmique.

24.02.

1. Point de ramification d'ordre 2.
2. Point de ramification logarithmique.
3. Point de ramification d'ordre 3.
4. Point de ramification logarithmique.
5. Point singulier éliminable.
6. Point de ramification d'ordre 3.

24.04. *mn*.

24.05. Plus petit commun multiple des nombres *m* et *n*.

24.06.

1. $z=0$ et $z=1$ sont des points de ramification d'ordre 3 ; au-dessus du point $z=\infty$ il y a trois pôles d'ordre 1.

2. $z=i$ et $z=-i$ sont des points de ramification logarithmiques.

3. Au-dessus du point $z=\infty$ il y a deux points de ramification logarithmiques (correspondant à deux branches de la racine) ; au-dessus des points $z=i$ et $z=-i$ il y a une infinité de points de ramification d'ordre 2.

4. Au-dessus du point $z=\infty$ il y a deux points de ramification logarithmiques ; au-dessus des points $z=1$ et $z=-1$ il y a une infinité de points de ramification d'ordre 2.

5. Au-dessus du point $z=\infty$ il y a deux points de ramification logarithmiques ; au-dessus des points $z=1$ et $z=-1$ il y a une infinité de points de ramification d'ordre 2 ; au-dessus du point $z=0$ il y a un point de ramification d'ordre 3 et une infinité de points de régularité.

6. $z=i$ et $z=-i$ sont des points de ramification logarithmiques.

7. $z=i$ et $z=-i$ sont des points de ramification logarithmiques ; au-dessus du point $z=0$ il y a une infinité de points de ramification d'ordre 2 et deux points singuliers éliminables.

8. $z=1$ est un point de ramification d'ordre 2 ; au-dessus du point $z=0$ il y a deux points singuliers éliminables.

24.18. Point singulier de caractère uniforme, point de ramification d'ordre 2, 3 ou 6.

24.19. La fonction $F(f(z))$ peut être uniforme ou bien elle peut avoir un point de ramification dont l'ordre est égal à l'un des diviseurs du nombre *mn*.

§ 25. Points singuliers sur la frontière du domaine de régularité

Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D borné par une courbe simple lisse par morceaux, et soit L une courbe située dans le domaine D, à l'exception de son extrémité ζ qui se trouve sur la frontière de ce domaine. Si la fonction $f(z)$ ne peut pas être prolongée analytiquement au point ζ le long de la courbe L, alors le point ζ est appelé *point singulier* de la fonction $f(z)$.

Remarque. On démontre aisément que, sous les hypothèses faites relativement au domaine D, la possibilité de prolonger analytiquement la fonction $f(z)$ au point ζ ne dépend pas du choix de la courbe L (si, bien entendu, cette courbe ne quitte pas le domaine D). Pour cette raison, sous les hypothèses faites, la notion de point singulier ne dépend pas non plus de la courbe L (ce n'est pas ainsi dans le cas général d'un domaine arbitraire ; voir le problème 25.06).

25.01. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D borné par une courbe simple lisse par morceaux, et soit L une courbe contenue dans le domaine D, sauf son extrémité ζ qui se situe sur la frontière de ce domaine. Montrer que, si pour un certain k

$$f^{(k)}(z) \to \infty \qquad (z \to \zeta,\ z \in L),$$

alors le point ζ est un point singulier de la fonction $f(z)$.

25.02. En utilisant le résultat du problème 25.01, montrer que toutes les branches régulières dans le domaine D des fonctions ci-dessous admettent le point ζ comme point singulier (le point ζ et le domaine D sont indiqués entre parenthèses et suivent la formule qui donne la fonction) :

1. $\ln z \quad (\zeta = 0,\ \zeta = \infty;\quad D : \operatorname{Re} z > 0)$.
2. $\operatorname{arctg} z \quad (\zeta = i,\ \zeta = -i;\quad D : |z| < 1)$.
3. $\sqrt[n]{z} \quad (\zeta = 0,\ \zeta = \infty;\quad D : \operatorname{Im} z > 0)$.
4. $\ln(z + \sqrt{1+z^2}) \quad (\zeta = i,\ \zeta = -i,\ \zeta = \infty;\quad D : \operatorname{Re} z > 0)$.
5. $\arcsin z \quad (\zeta = 1,\ \zeta = -1,\ \zeta = \infty;\quad D : \operatorname{Im} z > 0)$.
6. $z^3 \ln z \quad (\zeta = 0;\quad D : |z-1| < 1)$.

25.03. Montrer que toutes les branches régulières dans le domaine D des fonctions ci-dessous admettent le point à l'infini comme point singulier (le domaine D est indiqué entre parenthèses) :

1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{z}} \quad (D : \operatorname{Im} z > 0)$. 2. $\dfrac{1}{\ln z} \quad (D : \operatorname{Re} z > 1)$.

3. $\dfrac{1}{z^3 \ln z} \quad (D : \operatorname{Im} z > 0)$.

Indication. Etudier le point $\zeta = 0$ pour la fonction $f(1/\zeta)$.

25.04. Montrer que la fonction $e^{-(\ln z)^2}$ admet la séparation des branches régulières dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ et que chacune de ces branches a comme points singuliers les points $z = 0$ et $z = \infty$.

25.05. La fonction $(1 + i\sqrt{z})^{-2}$ a deux branches régulières dans le demi-plan supérieur. Montrer que le point $z = \infty$ est un point singulier pour les deux branches, tandis que le point $z = -1$ ne l'est que pour l'une d'elles.

25.06. Soit $f(z)$ une branche régulière de la fonction $(1 + i\sqrt{z})^{-2}$ définie par la condition $\sqrt{z} > 0$ pour $z > 0$. Montrer que, si l'on considère la fonction

$f(z)$ en tant que fonction seulement dans le demi-plan supérieur, alors le point $z=-1$ est pour elle un point singulier, tandis que si la fonction $f(z)$ n'est considérée que dans le demi-plan inférieur, ce point n'est pas un point singulier.

25.07. Montrer que la fonction $f(z)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ est régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ et que le point $z=0$ est pour elle un point singulier.

25.08. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue et positive pour $t\geq 0$ satisfaisant à la condition

$$-M\ln t\leq \ln\varphi(t)\leq M\ln t \qquad (t\geq 1).$$

Montrer que la fonction $f(z)=\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-tz}\,dt$ est régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ et que le point $z=0$ est pour elle un point singulier.

25.09. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t\geq 0$ satisfaisant à la condition

$$|\varphi(t)-e^{i\alpha t}|\leq Me^{-\delta t}, \qquad t\geq 0 \ \ (\delta>0,\ -\infty<\alpha<\infty).$$

Montrer que la fonction $f(z)=\int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-tz}\,dt$ peut être prolongée analytiquement dans le demi-plan $\operatorname{Re} z>-\delta$ privé du point $z=i\alpha$ en lequel cette fonction admet un pôle simple, la partie principale y étant égale à $\frac{1}{z-i\alpha}$.

25.10. Montrer que le prolongement analytique de chacune des fonctions ci-dessous n'admet dans tout le plan d'autres points singuliers que des pôles. Trouver tous les pôles de ces fonctions et les parties principales en ces pôles :

1. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+e^{-\alpha t}}\,dt,\ \alpha>0.$ 2. $\int\limits_0^\infty \frac{te^{-tz}}{(1+e^{-\alpha t})^2}\,dt,\ \alpha>0.$

3. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+te^{-t}}\,dt.$ 4. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+\alpha e^{-t}+\beta e^{-t^2}}\,dt,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

25.11. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue et positive sur le segment [0, 1]. Montrer que la fonction $f(z)=\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$, qui est régulière pour $\operatorname{Im} z>0$ (et même dans tout le plan présentant une coupure suivant le segment [0, 1]), admet des points singuliers pour $z=0$ et $z=1$.

25.12. Soit $\varphi(t)$ une fonction régulière dans un certain domaine contenant le segment [0, 1]. Montrer que la fonction $f(z)=\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$, qui est régulière pour $\operatorname{Im} z>0$, admet des points singuliers pour $z=0$ et $z=1$.

25.13. Supposons que le rayon de convergence de la série $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soit égal à 1 et que tous les coefficients a_n soient réels. Notons $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que, si $S_n \to +\infty$ ou si $S_n \to -\infty$, le point $z=1$ est un point singulier.

Indication. Utiliser l'identité $f(z)=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$.

25.14. Montrer que, si l'on trouve au moins un pôle de $f(z)$ sur le périmètre du disque de convergence de la série $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, cette série diverge en tous les points de ce périmètre.

25.15. Soit $\{c_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, une suite satisfaisant à la condition

$$|c_n + Ae^{-i(n+1)\alpha}| < \frac{M}{R^n}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad (R>1,\ -\infty<\alpha<\infty).$$

Montrer que la fonction $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ peut être prolongée analytiquement dans le disque $|z|<R$ privé du point $z=e^{i\alpha}$ et qu'au point $z=e^{i\alpha}$ la fonction $f(z)$ a un pôle simple, la partie principale y étant $A(z-e^{i\alpha})^{-1}$.

25.16. Montrer que, si une fonction $f(z)$ est régulière dans le disque $|z|\leq R$, à l'exception d'un pôle simple situé au point $\mathrm{R}e^{i\alpha}$, où la partie principale est $\frac{A}{z-\mathrm{R}e^{i\alpha}}$, alors

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

où

$$|c_n + AR^{-n-1}e^{-i(n+1)\alpha}| < \frac{M}{(R+\varepsilon)^n}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad (\varepsilon>0).$$

25.17. Démontrer le théorème suivant. Pour qu'une fonction $f(z)$ soit régulière dans le disque $|z|<R$, $R>1$, à l'exception des pôles situés aux points $e^{i\alpha_1}, \ldots, e^{i\alpha_m}$ respectivement d'ordres $s_1, \ldots, s_m$, il faut et il suffit que la suite $\{c_n\}$ des coefficients de sa série de Taylor au point $z=0$ satisfasse à la condition

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| c_n - \sum_{k=1}^{m} e^{in\alpha_k} P_k(n) \right|^{1/n} \leq \frac{1}{R},$$

où $P_k(n)$ est un certain polynôme de degré s_k.

25.18. Supposons que la série $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ n'ait sur la frontière du disque de convergence qu'un seul point singulier, à savoir le pôle $z=z_0$ d'ordre m. Montrer que $a_n=\frac{An^{m-1}}{z_0^n}[1+\varepsilon(n)]$, où $\varepsilon(n)\to 0$ pour $n\to\infty$, A étant une constante différente de zéro.

25.19. Montrer que, si sur la frontière du disque de convergence de la série entière $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ il n'y a qu'un seul point singulier $z=z_0$, qui est un pôle pour $f(z)$, alors la limite ci-dessous existe :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

25.20. Notons $\Phi_\alpha(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}z^n$ ($|z|<1$). Montrer que, pour $\operatorname{Re}\alpha>0$, l'égalité ci-dessous a lieu :

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{z}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-z}\,dt \qquad (|z|<1).$$

Indication. Utiliser l'identité

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha} \qquad (\operatorname{Re}\alpha>0,\ n>0).$$

25.21. En s'appuyant sur le résultat du problème précédent, montrer que, pour $\operatorname{Re}\alpha>0$, la fonction $\Phi_\alpha(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant la demi-droite $(1,\ +\infty)$.

25.22. Montrer que, pour tout α, la fonction $\Phi_\alpha(z)$ peut être prolongée analvtiquement dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant la demi-droite $(1,\ +\infty)$.

25.23. Notons $\varphi_{\alpha,m}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(\ln n)^m z^n$ ($|z|<1$). Ici, α est un nombre complexe arbitraire, m étant un entier positif. Montrer que la fonction $\varphi_{\alpha,m}(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe présentant une coupure suivant la demi-droite $(1,\ +\infty)$.

Indication. Différentier par rapport à α l'identité donnée à l'indication du problème 25.20.

Les problèmes de 25.24 à 25.28 s'appuient essentiellement sur le théorème suivant :

La somme d'une série entière a au moins un point singulier sur la frontière du disque de convergence de cette série.

25.24. Soit R, $0<R<\infty$, le rayon de convergence de la série $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Introduisons la notation :

$$\nu(r,\ \varphi)=\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(re^{i\varphi})}{n!}\right|^{1/n}, \qquad 0<r<R, \qquad 0\leq\varphi<2\pi.$$

Montrer que :

a) la fonction $\nu(r,\ \varphi)$ est une fonction continue de r et φ et satisfait à l'inégalité $\nu(r,\ \varphi)\leq(R-r)^{-1}$;

b) $\max\limits_{0\leq\varphi<2\pi}\nu(r,\ \varphi)=\dfrac{1}{R-r}$;

c) si $\nu(r,\ \varphi)=\dfrac{1}{R-r}$, le point $z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$ est un point singulier de la fonction $f(z)$;

d) si $\nu(r,\ \varphi)<\dfrac{1}{R-r}$, le point $z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$ n'est pas un point singulier de la fonction $f(z)$.

25.25. Soient $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}=1$, tous les coefficients c_n étant non négatifs. Montrer que le point $z=1$ est un point singulier de la fonction $f(z)$.

25.26. Montrer que l'assertion du problème 25.25 reste vraie même pour des hypothèses plus faibles :

$$\operatorname{Re} c_n \geq 0 \quad (n>n_0), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} (\operatorname{Re} c_n)^{1/n}=1.$$

25.27. Soient p et q certains entiers positifs et supposons que le rayon de convergence de la série $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{np+q}$ est égal à 1. Montrer que :

a) la fonction $f(z)$ a au moins p points singuliers sur la circonférence $|z|=1$;

b) si $z_0=e^{i\alpha}$ est un point singulier de la fonction $f(z)$, les points

$$z_k=e^{i\left(\alpha+\frac{2\pi k}{p}\right)}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,$$

sont également des points singuliers de cette fonction.

25.28. Supposons que le rayon de convergence de la série $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ soit égal à 1 et soit $c_n=0$ lorsque n est divisible par p (ici, p est un entier positif). Montrer que :

a) la fonction $f(z)$ a au moins deux points singuliers sur la circonférence $|z|=1$;

b) si $z_0=e^{i\alpha}$ est un point singulier de la fonction $f(z)$, parmi les points

$$z_k=e^{i\left(\frac{2k\pi}{p}\right)}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,$$

il y a encore au moins un point singulier de cette fonction.

Indication. Utiliser l'identité ci-dessous qui est facile à vérifier :

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(ze^{\frac{2\pi k i}{p}}\right)\equiv 0.$$

25.29. Montrer que chaque point de la circonférence $|z|=1$ est un point singulier pour les fonctions suivantes :

1. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. 2. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

25.30. Soient respectivement r et R les rayons de convergence des séries $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Désignons par α_1, α_2, ... les points singuliers de la fonction $f(z)$ sur la circonférence $|z|=r$, et par β_1, β_2, ... les points singuliers de la fonction $g(z)$ sur la circonférence $|z|=R$. Montrer que, si la fonction $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ admet des points singuliers sur la circonférence $|z|=rR$, ces points singuliers ne peuvent se situer qu'aux points de type $z=\alpha_k\beta_m$.

Indication. Utiliser la formule

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varrho}(t)g\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

(choisir ϱ de façon que les séries pour $f(t)$ et $g\left(\frac{z}{t}\right)$ convergent sur la circonférence $|t|=\varrho$), ensuite déformer convenablement le contour à intégration.

25.31. Soit R, $0<R<\infty$, le rayon de convergence de la série $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$, et soit $f(z)$ une fonction qui a sur la circonférence $|z|=R$ exactement un point singulier $z=Re^{i\alpha}$. Montrer que, pour n'importe quel s, la fonction $f_1(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^s c_n z^n$ admet sur la circonférence $|z|=R$ le même point singulier (sans y avoir d'autres points singuliers).

RÉPONSES

25.10.

1. Les pôles $z=-\alpha n$, où $n=0, 1, 2, \ldots$, les parties principales y étant $\frac{(-1)^n}{z+\alpha n}$.
2. Les pôles $z=-\alpha n$, où $n=0, 1, 2, \ldots$, les parties principales y étant $\frac{(-1)^n(n+1)}{(z+\alpha n)^2}$.
3. Les pôles $z=-n$, où $n=0, 1, 2, \ldots$, les parties principales y étant $\frac{(-1)^n n!}{(z+n)^{n+1}}$.
4. Les pôles $z=-n$, où $n=0, 1, 2, \ldots$, les parties principales y étant $\frac{(-1)^n}{z+n}\alpha^n$.

§ 26. Fonctions inverses et implicites

Les problèmes qui suivent impliquent l'utilisation du *théorème de Rouché* (voir le problème 23.07) et du *théorème des résidus*.

26.01. Soit $f(w)$ une fonction régulière dans le disque $|w-w_0|\leq r$ satisfaisant aux conditions

$$f(w_0)\neq 0, \qquad |f(w)|\leq M \qquad (|w-w_0|\leq r).$$

Montrer que, pour tout z contenu dans le disque $|z-z_0|<r/M$, l'équation

$$w-w_0=(z-z_0)f(w)$$

admet dans le disque $|w-w_0|\leq r$ exactement une solution $w(z)$.

26.02. Si les conditions du problème 26.01 sont vérifiées, montrer la validité de la formule

$$w(z)=w_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-w_0|=r}\frac{1-(z-z_0)f'(w)}{w-w_0-(z-z_0)f(w)}(w-w_0)\,dw.$$

Indication. Calculer l'intégrale dans le second membre à l'aide du théorème des résidus.

26.03. Si les conditions du problème 26.01 sont vérifiées, montrer que

$$w(z) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{|w - w_0| = r} \left(\frac{f(w)}{w - w_0}\right)^n dw = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [f(w)]^n \Big|_{w = w_0}.$$

26.04. Supposons vérifiées les conditions du problème 26.01, et soit en outre $F(w)$ une fonction régulière dans le disque $|w - w_0| \leq r$. Montrer que

$$F(w(z)) = F(w_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

où

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \{F'(w)[f(w)]^n\} \Big|_{w = w_0}.$$

26.05. Supposons vérifiées les conditions du problème 26.04. Montrer que

$$\frac{F(w(z))}{1 - (z - z_0) f'(w(z))} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

où

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dw^n} \{F(w)[f(w)]^n\} \Big|_{w = w_0}.$$

26.06. Soit $w(z)$ la solution de l'équation $w = ze^{aw}$, solution régulière au point $z = 0$. Montrer que

1. $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} z^n.$ 2. $e^{\alpha w(z)} = 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an + \alpha)^{n-1}}{n!} z^{n-1}.$

26.07. Soient m un entier positif et $w(z)$ la solution de l'équation $w = ze^{aw^m}$, solution régulière au point $z = 0$. Montrer que

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (nm + 1)^{n-1}}{n!} z^{nm+1}.$$

26.08. Soient α un nombre complexe arbitraire et $w(z)$ une fonction régulière au point $z = 0$ vérifiant l'équation $w = 1 + zw^\alpha$ et la condition $w(0) = 1$. En supposant que pour la fonction $[w(z)]^\alpha$ on a choisi au voisinage du point $z = 0$ une branche régulière égale à 1 pour $z = 0$, démontrer les formules suivantes :

1. $w(z) = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\alpha(n\alpha - 1) \ldots (n\alpha - n + 2)}{n!} z^n;$

2. $\ln w(z) = z + \frac{2\alpha - 1}{2} z^2 + \frac{(3\alpha - 1)(3\alpha - 2)}{2 \cdot 3} z^3 + \ldots$

26.09. Soient $f(w)$ et $g(w)$ deux fonctions régulières pour $|w| \leq r$ et $f(0) \neq 0$. Montrer que, pour des valeurs assez petites de $|z|$, l'équation $w = zf(w) + z^2 g(w)$ admet exactement une solution $w(z)$ dans le disque $|w| \leq r$, et que, pour des valeurs assez petites de $|z|$, cette solution est donnée par la formule

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = r} \frac{1 - zf'(w) - z^2 g'(w)}{w - zf(w) - z^2 g(w)} w \, dw.$$

26.10. Soit $w(z)$ la fonction définie dans le problème 26.09. Montrer que $w(z)=\sum_{1}^{\infty} c_n z^n$, où

$$c_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{1}{k!(n-2k)!}\frac{d^{n-k-1}}{dw^{n-k-1}}\{[f(w)]^{n-2k}[g(w)]^k\}|_{w=0}.$$

26.11. Soient $f_1(w), \ldots, f_m(w)$ des fonctions régulières dans le disque $|w|\leq r$, et soit $f_1(0)\neq 0$. Montrer que, pour des valeurs assez petites de $|z|$, l'équation

$$w=zf_1(w)+\ldots+z^m f_m(W)$$

admet exactement une solution $w(z)$ dans le disque $|w|\leq r$, et que cette solution est donnée par la formule (les valeurs de $|z|$ doivent toujours être assez petites)

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{1-zf_1'(w)-\ldots-z^m f_m'(w)}{w-zf_1(w)-\ldots-z^m f_m(w)}\,w\,dw.$$

26.12. Soit $f(w)$ une fonction régulière dans le disque $|w-w_0|\leq r$ en y satisfaisant à l'inégalité $0<|f(w)|\leq M$. Montrer que, pour tous les z vérifiant la condition $0<|z-z_0|<\frac{r^m}{M}$, l'équation $(w-w_0)^m=(z-z_0)f(w)$ admet exactement m solutions dans le disque $|w-w_0|\leq r$, et que toutes ces solutions sont données par la formule $z=\varphi(\sqrt[m]{z-z_0})$, où $\varphi(\zeta)$ est une fonction régulière dans le disque $|\zeta|\leq rM^{-1/m}$ et $\varphi'(0)\neq 0$.

Indication. Montrer que l'équation étudiée est équivalente à l'équation $w-w_0=\sqrt[m]{z-z_0}f_1(w)$, où $f_1(w)=\sqrt[m]{f(w)}$ (pour la racine, on choisit n'importe quelle branche régulière dans le disque $|w-w_0|\leq r$).

26.13. Soient $f_1(w), f_2(w), \ldots, f_n(w)$ des fonctions régulières dans le disque $|w|\leq r$, et soit $f_1(0)\neq 0$. Montrer que, pour tous les z vérifiant la condition $0<|z|<\varrho$, où $\varrho>0$ est assez petit, l'équation $w^m=zf_1(w)+\ldots+z^m f_n(w)$ admet exactement m solutions dans le disque $|w|\leq r$ et que toutes ces solutions sont données par la formule $w=\varphi(\sqrt[m]{z})$, où $\varphi(\zeta)$ est une fonction régulière dans un certain voisinage du point $\zeta=0$ et $\varphi'(0)\neq 0$.

26.14. Soit $w(z)$ une fonction régulière dans un certain voisinage du point $z=0$ vérifiant les conditions $w=ze^{aw}+\alpha z^2 e^{bw}$, $w(0)=0$.

Montrer que $w(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, où

$$c_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{\alpha^k}{k!(n-2k)!}[(n-2k)a+kb]^{n-k-1}.$$

26.15. Soit $w(z)$ une fonction analytique dans une certaine couronne $0<|z-1|<\varrho$ vérifiant les conditions

$$\frac{(w^2+3w+3)(w^2+w+1)}{(w^2+2w+2)^2}=z,\quad \lim_{z\to 1} w(z)=-1.$$

Montrer que

$$w(z)=-1+\sqrt{1-z}\left(1-2\frac{1}{2!}(z-1)+2^2\cdot\frac{1\cdot 3}{3!}(z-1)^2-2^3\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!}(z-1)^3+\ldots\right).$$

26.16. Soit $w(z)$ la solution régulière au point $z=0$ de l'équation $w=ze^w$. Montrer que, dans un certain voisinage du point $z=0$, le développement suivant a lieu

$$\sqrt{w(z)}=\sqrt{z}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n!}z^n\right).$$

26.17. Soit $w(z)$ une fonction admettant au point $z=\infty$ un pôle d'ordre 1 et vérifiant l'équation

$$(w+1)^3=zw^2.$$

Montrer que, dans un certain voisinage du point $z=\infty$, les développements ci-dessous ont lieu :

1. $\dfrac{1}{w(z)}=\dfrac{1}{z}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n(3n-1)\dots(2n+1)}{(n+1)!}\dfrac{1}{z^n}\right).$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{w(z)}}=\dfrac{1}{\sqrt{z}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n(3n-1)\dots(n+1)}{(2n+1)!}\dfrac{1}{z^n}\right).$

26.18. Soit $F(z, w)$ une fonction régulière de z et w pour $|z-z_0|\leq r$, $|w-w_0|\leq R$, c'est-à-dire

$$F(z, w)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{kn}(z-z_0)^k(w-w_0)^n,$$

et supposons que la fonction $f_0(w)=F(z_0, w)$ n'admette dans le disque $|w-w_0|\leq R$ qu'un seul zéro au point w_0 (d'ordre 1). Montrer que, pour une valeur assez petite de $|z-z_0|$, l'équation $F(z, w)=0$ a exactement une solution $w(z)$ dans le disque $|w-w_0|\leq R$ et que cette solution est donnée par la formule (les valeurs de $|z-z_0|$ restant toujours assez petites)

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-w_0|=R}\frac{F'_w(z, w)}{F(z, w)}w\,dw.$$

26.19. Soit $F(z, w)$ une fonction régulière de z et w pour $|z-z_0|\leq r$, $|w-w_0|\leq R$, et supposons que la fonction $f_0(w)=F(z_0, w)$ admette dans le disque $|w-w_0|\leq R$ un zéro d'ordre m au point $w=w_0$ sans y avoir d'autres zéros. Montrer que, si $F'_z(z_0, w_0)\neq 0$, alors, pour des z vérifiant la condition $0<|z-z_0|<\varrho$, où le nombre $\varrho>0$ est suffisamment petit, l'équation $F(z, w)=0$ admet dans le disque $|w-w_0|\leq R$ exactement m solutions et que toutes ces solutions sont données par la formule $w=\varphi(\sqrt[m]{z-z_0})$, où la fonction $\varphi(\zeta)$ est régulière au point $\zeta=0$ et $\varphi'(0)\neq 0$.

* * *

Soit $\psi(z)$ une fonction réelle définie dans un domaine D du plan complexe, et soit λ un nombre réel quelconque. L'ensemble E_λ constitué par les points du domaine D en lesquels la fonction $\psi(z)$ prend la valeur λ est appelé *ensemble de niveau de la fonction $\psi(z)$ correspondant à la valeur λ.*

La structure d'un ensemble de niveau d'une fonction continue arbitraire peut être très compliquée. La structure d'un ensemble de niveau du module ou de la partie réelle d'une fonction régulière dans le domaine D est beaucoup plus simple. Dans les problèmes qui suivent, on étudie précisément ces derniers ensembles. La résolution de la majeure partie de ces problèmes nécessite l'utilisation du théorème d'existence d'une fonction inverse formulé ci-dessous :

Soit $f(z)$ une fonction définie sur un ensemble E. On appellera *fonction inverse de la fonction* $f(z)$ une fonction $\varphi(w)$ définie sur un ensemble E_1 si les valeurs de la fonction $\varphi(w)$ en chaque point de l'ensemble E_1 appartiennent à l'ensemble E et si, pour chaque point $w \in E_1$, l'égalité $f(\varphi(w)) = w$ est vérifiée.

Si une fonction $f(z)$ est régulière dans un certain voisinage d'un point $z_0 \neq \infty$ et si $f'(z_0) \neq 0$, il existe une fonction $\varphi(w)$ inverse de la fonction $f(z)$ définie et régulière dans un certain voisinage d'un point $w_0 = f(z_0)$. En outre, toutes les fonctions inverses de ce type coïncident dans un certain voisinage du point $w_0 = f(z_0)$ si leurs valeurs au point w_0 coïncident.

26.20. Soit C une courbe lisse simple contenue dans le domaine de régularité d'une fonction $f(z_0)$ mais qui ne passe pas par les points où la fonction $f'(z)$ s'annule. Montrer que :

1. Si la fonction $\operatorname{Re} f(z)$ reste constante sur la courbe C, la fonction $\operatorname{Im} f(z)$ varie monotonement lorsque le point z se déplace le long de la courbe C.

2. Si la fonction $|f(z)|$ reste constante sur la courbe C, la fonction $\arg f(z)$ varie monotonement lorsque le point z se déplace le long de la courbe C.

Indication. Utiliser les équations de Cauchy-Riemann.

26.21. Soient $f(z)$ une fonction régulière dans un certain voisinage d'un point $z_0 \neq \infty$ et $f'(z_0) \neq 0$. Notons E_0 l'ensemble de niveau de la fonction $\operatorname{Re} f(z)$ correspondant à la valeur $\lambda = \operatorname{Re} f(z_0)$. Montrer que la partie de l'ensemble E située dans un voisinage assez petit du point z_0 coïncide avec l'ensemble de points d'une courbe lisse simple passant par le point z_0.

26.22. Montrer que l'assertion du problème 26.21 reste vraie pour l'ensemble de niveau de la fonction $|f(z)|$.

Pour abréger, nous allons identifier l'ensemble de niveau coïncidant avec l'ensemble des points d'une courbe lisse simple avec cette courbe.

26.23. Soit $f(z)$ une fonction régulière admettant une dérivée différente de zéro dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine borné D. Montrer que l'ensemble de niveau de la fonction $\operatorname{Re} f(z)$ ou $|f(z)|$ correspondant à une valeur fixée arbitraire λ est constitué par un nombre fini de courbes lisses simples (ces courbes peuvent dégénérer en points).

Une courbe lisse C est appelée *arc analytique ouvert* si elle a au moins une équation de la forme $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où $z(t)$ est une fonction régulière admettant une dérivée différente de zéro dans un certain domaine contenant l'intervalle (a, b).

Une courbe lisse fermée est appelée courbe analytique fermée si elle a au moins une équation de la forme $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, où $z(t)$ est une fonction

régulière dans une certaine bande $-\delta < \text{Im } t < \delta$, y admet une dérivée différente de zéro et est périodique de période $b-a$.

26.24. Montrer que, si les conditions du problème 26.23 sont satisfaites, chacune des courbes appartenant à l'ensemble de niveau est non seulement une courbe lisse, mais aussi une courbe analytique.

26.25. Soit $f(z)$ une fonction régulière en un point $z_0 \neq \infty$ dont la dérivée a au point z_0 un zéro d'ordre $m-1$. Montrer que dans un voisinage assez petit du point z_0 l'ensemble de niveau de la fonction $\text{Re } f(z)$ correspondant à la valeur $\lambda = \text{Re } f(z_0)$ est constitué par le point z_0 lui-même et par $2m$ arcs analytiques ouverts simples qui sortent de ce point. En outre, les angles ayant pour sommet ce point et compris entre chaque paire d'arcs voisins sont égaux entre eux.

26.26. Montrer que l'assertion du problème 26.25 reste vraie également pour l'ensemble de niveau de la fonction $|f(z)|$.

26.27. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\bar{D}$ d'un domaine D. Montrer que l'ensemble de niveau de la fonction $\text{Re } f(z)$ ou $|f(z)|$ correspondant à une valeur arbitraire λ est constitué par un nombre fini de courbes analytiques fermées simples, d'arcs analytiques ouverts simples et de points. Les arcs analytiques ouverts simples ne peuvent être joints l'un à l'autre (par leurs extrémités) qu'aux points du domaine D, où la fonction $f'(z)$ s'annule.

26.28. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle. L'ensemble de niveau de la fonction $\text{Re } f(z)$ correspondant à la valeur $\lambda = 0$ décompose le plan complexe en un nombre fini de domaines $D_1, \ldots, D_n$. Montrer les propriétés suivantes des domaines D_k :

1. Chaque point du plan est un point intérieur à l'un des domaines D_k ou un point frontière d'un nombre pair de domaines pareils.

2. Sur la frontière d'un domaine D_k on trouve au moins un pôle de la fonction $f(z)$.

3. Si $\text{Re } f(z) \lesseqgtr 0$ $(z \in D_k)$, chaque valeur de w vérifiant la condition $\text{Re } w \lesseqgtr 0$ est prise par la fonction $f(z)$ dans le domaine D_k exactement $\nu_k + 1$ fois, où ν_k est le nombre de zéros de la fonction $f'(z)$ dans le domaine D_k.

26.29. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D, contenant $z = \infty$ comme point frontière, et en tous les points frontières à distances finies de ce domaine. Montrer que, si $\text{Re } f(z) = \lambda$ sur la frontière du domaine D, la fonction $f(z)$ prend, dans le domaine D, le même nombre de fois toutes les valeurs de w vérifiant la condition $\text{Re } w > \lambda$ (ce nombre de fois peut être infini).

26.30. Dire pour quelles valeurs de λ l'ensemble de niveau de la fonction $|z^2 - 1|$ correspondant à la valeur de λ est constitué par une courbe lisse fermée simple.

26.31. Soit $P(z)$ un polynôme de degré n admettant exclusivement des zéros d'ordre 1. Notons $a_1, \ldots, a_{n-1}$ les zéros de sa dérivée et λ_k les grandeurs $\lambda_k = |P(a_k)|$. Montrer que :

1. Pour $0 < \lambda < \min_k \lambda_k$, l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant à l'inégalité $|P(z)| < \lambda$ est constitué par n domaines deux à deux disjoints.

2. Pour $\lambda > \max\limits_k \lambda_k$, l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant à l'inégalité $|P(z)| < \lambda$ représente un domaine fini simplement connexe.

26.32. Tout en conservant les notations du problème précédent, supposons que toutes les grandeurs λ_k soient distinctes et que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$. Montrer que, pour $\lambda_m < \lambda < \lambda_{m+1}$, l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant à l'inégalité $|P(z)| < \lambda$ est constitué par $n-m$ domaines simplement connexes deux à deux disjoints.

26.33. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\overline{D}$ d'un domaine borné simplement connexe D dont la frontière est constituée par l'ensemble de niveau de la fonction $|f(z)|$. Montrer que, si la fonction $f(z)$ n'est pas identiquement constante, alors le nombre de zéros de la fonction $f(z)$ dans le domaine D est égal au nombre de zéros de la fonction $f'(z)$ dans le domaine D plus 1.

Indication. Soit $z = z(t)$, $0 \leq t \leq l$, l'équation paramétrique de la courbe frontière du domaine D. Dans cette équation, en qualité de paramètre t on prend la longueur de l'arc de cette courbe comptée à partir de l'un de ses points. Alors, $f(z(t)) = Re^{i\theta(t)}$, où R est une constante. Montrer que $\theta(t)$ est une fonction monotonément croissante, ensuite, exprimer (en s'appuyant sur le principe de l'argument) par la fonction $\theta(t)$ le nombre de zéros des fonctions $f(z)$ et $f'(z)$ dans le domaine D.

26.34. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la fermeture $\overline{D}$ d'un domaine borné m-connexe D dont la frontière est constituée par l'ensemble de niveau de la fonction $|f(z)|$. Montrer que, si la fonction $f(z)$ n'est pas identiquement constante, alors elle a dans le domaine D au moins m zéros.

Indication. Voir l'indication concernant le problème précédent.

* * *

26.35. Soit $w(z)$ une fonction régulière au point $z = 0$ vérifiant l'équation $w = ze^w$. Trouver le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z = 0$ des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{2 - w(z)}$. 2. $\dfrac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$. 3. $\dfrac{1}{1 - 2w(z)}$. 4. $\dfrac{1}{1 + 2w(z)}$.

Indication. Pour la fonction $w(z)$, le rayon de convergence de la série peut être calculé d'après les coefficients de cette série (voir le problème 26.06) ; pour les autres fonctions, il faut calculer la distance du point $z = 0$ au point singulier le plus proche de la fonction développable en série.

26.36. Soit $w(z)$ une fonction régulière au point $z = 0$ vérifiant l'équation $e^w - 1 = ze^{2w}$, $w(0) = 0$. Trouver le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z = 0$ pour les fonctions suivantes :

1. $w(z)$. 2. $e^{w(z)}$. 3. $\ln \dfrac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$. 4. $\sqrt{1 + w^2(z)}$.

26.37. Soit $P(w)$ un polynôme présentant au point $w = 0$ un zéro d'ordre 1, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de $P'(w)$. Notons $w(z)$ une fonction régu-

lière au point $z=0$ satisfaisant aux conditions $P(w)=z$, $w(0)=0$. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z=0$ pour la fonction $w(z)$ est égal à l'un des nombres $|P(a_k)|$, $k=1, 2, \ldots, n$.

26.38. Soient $R(w)$ une fonction rationnelle admettant au point $w=0$ un zéro d'ordre 1, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de sa dérivée. Notons $w(z)$ une fonction régulière au point $z=0$ vérifiant les conditions $R(w)=z$, $w(0)=0$. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z=0$ pour la fonction $w(z)$ est égal à l'un des nombres $|R(a_1)|$, $|R(a_2)|$, $\ldots$, $|R(a_n)|$, $|R(\infty)|$.

26.39. Montrer que l'assertion du problème 26.38 reste vraie également dans le cas où $R(z)$ n'est pas une fonction rationnelle, mais une fonction qui, dans la partie finie du plan, n'a pas de points singuliers autres que les pôles. Mais, dans ce cas, le symbole $R(\infty)$ désigne toutes les valeurs asymptotiques de la fonction $R(z)$, c'est-à-dire les valeurs vers lesquelles cette fonction tend suivant une courbe quelconque allant à l'infini.

26.40. Soit $P(w)$ un polynôme dont le développement taylorien au point $w=0$ a des coefficients non négatifs, et soit $P(0)>0$. Notons $w(z)$ une fonction vérifiant les conditions $w=zP(w)$, $w(0)=0$. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z=0$ pour la fonction $w(z)$ est égal à $\frac{\lambda}{P(\lambda)}$, où λ est la plus petite racine positive de l'équation $P(\lambda)=\lambda P'(\lambda)$.

26.41. Montrer que l'assertion du problème 26.40 reste vraie également dans le cas où $P(w)$ n'est pas un polynôme mais une fonction qui, dans la partie finie du plan, n'a pas de points singuliers autres que les pôles.

26.42. Soient $f_1(w), \ldots, f_m(w)$ des fonctions jouissant des propriétés suivantes :

a) elles sont régulières au point $w=0$ et tous les coefficients de leurs développements tayloriens sont non négatifs;

b) $f_1(0)>0$;

c) dans la partie finie du plan, elles n'ont pas de points singuliers autres que les pôles.

Notons $w(z)$ une fonction régulière au point $z=0$ vérifiant les conditions $w=zf_1(w)+\ldots+z^m f_m(w)$, $w(0)=0$. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z=0$ pour la fonction $w(z)$ est égal à la plus petite valeur de λ_k dans les couples de nombres positifs (λ_k, μ_k) vérifiant le système d'équations

$$\mu=\lambda f_1(\mu)+\ldots+\lambda^m f_m(\mu), \qquad 1=\lambda f_1'(\mu)+\ldots+\lambda^m f_m(\mu).$$

26.43. Trouver le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z=0$ pour les fonctions $w(z)$ régulières au point $z=0$ et vérifiant les conditions :

1. $w^3-6w^2+9w=z$, $\quad w(0)=0$. $\quad$ 2. $we^{-w-w^2}=z$.
3. $w=z(w+1)(w+3)^2$, $\quad w(0)=0$.
4. $w(w+2)=z(w+1)(w+3)$, $\quad w(0)=0$.
5. $w=ze^w+z^2e^{2w}$, $\quad w(0)=0$.
6. $w=z(1+w)+\frac{1}{2}z^3(1+w)^3$, $\quad w(0)=0$.

26.44. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor au point $z=0$, pour une fonction $w(z)$ vérifiant les conditions

$$w=1+zw^{\alpha}, \qquad w(0)=(w(0))^{\alpha}=1 \qquad (\alpha>1),$$

est égal à $\alpha^{-\alpha}(\alpha-1)^{\alpha-1}$.

* * *

26.45. Soit $P(z)$ un polynôme. Montrer que sur la frontière du domaine de convergence de la série $f(z)=\sum_{1}^{\infty}c_n(P(z))^n$ on trouve soit un point singulier de la fonction $f(z)$, soit un point en lequel la fonction $P'(z)$ s'annule.

26.46. Montrer que la série

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)+\frac{1}{2\cdot4}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^4+\ldots$$

converge uniformément sur tout l'axe réel et trouver sa somme.

26.47. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}z^{n-1}e^{-nz}$ converge uniformément pour $z\geq0$ et trouver sa somme.

26.48. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(2n+1)!}z^ne^{-2nz}$ converge uniformément pour $0\leq z<\infty$ et trouver sa somme.

* * *

26.49. Soit $w(z)$ une fonction régulière au point $z=0$ vérifiant l'équation $w=ze^w$. Montrer que :

1. La fonction $w(z)$ est régulière dans le disque $|z|<1/e$ et le point $z=1/e$ est un point singulier de cette fonction.

2. La fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin qui ne passe pas par les points $z=1/e$, $z=0$ et $z=\infty$.

3. Le prolongement analytique de la fonction $w(z)$ dans la couronne $\left|z-\frac{1}{e}\right|<\frac{1}{e}$ aboutit à une fonction analytique dans cette couronne admettant au point $z=1/e$ un point isolé de ramification d'ordre 2.

26.50. Soit $w(z)$ une fonction régulière au point $z=0$ vérifiant les conditions

$$e^w-1=ze^{aw}, \qquad w(0)=0 \ (a>1).$$

Montrer que :

1. La fonction $w(z)$ est régulière dans le disque $|z|<\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a}$ et le point $z=\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a}$ est un point singulier de cette fonction.

2. La fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin qui ne passe pas par les points $z=0$, $z=\infty$, $z=\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a}e^{2k\pi i a}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

3. Le prolongement analytique de la fonction $w(z)$ dans la couronne $\left|z-\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a}\right|<\varrho$ aboutit à une fonction analytique dans cette couronne ayant au point $z=\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a}$ un point isolé de ramification d'ordre 2.

26.51. Soit $F(z, w)$ un polynôme en z et w vérifiant les conditions $F(0, 0)=0$, $F'_w(0, 0)\neq 0$. Notons $w(z)$ une fonction régulière au point $z=0$ vérifiant les conditions $F(z, w(z))\equiv 0$, $w(0)=0$. Montrer que la fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin qui ne passe pas par les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vérifiant le système d'équations

$$F(z, w)=0, \quad F'_w(z, w)=0$$

(après l'élimination de w entre ces équations).

26.52. Soit $w(z)$ une fonction régulière au point $z=1$ vérifiant les conditions $w^3-2wz+z^3=0$, $w(1)=1$. Montrer que la fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement dans la couronne $0<|z-1|<1$ et dire quel est le caractère du point isolé de ramification $z=\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ pour la fonction analytique obtenue.

RÉPONSES

26.35.

1. $2/e^2$. 2. $1/e$. 3. $1/2\sqrt{e}$. 4. $1/e$.

26.36.

1. $1/4$. 2. $1/4$. 3. $(e-1)/e^2$. 4. $1/4$.

26.43.

1. 4. 2. $1/e^2$. 3. $4/135$. 4. 1. 5. $\frac{1}{2}e^{-3/4}$. 6. $2/5$.

26.46. z pour $-1\leq z\leq 1$; $1/z$ pour $z<-1$ et pour $z>1$.

26.47. 1 pour $0\leq z\leq 1/e$; pour $z>1/e$, la somme est égale à la fonction $u(z)$ inverse de la fonction $z=\frac{\ln u}{u-1}$ $(0<u(z)<1)$.

26.48. 1 pour $0\leq z\leq 1/e^2$; pour $z>\frac{1}{e^2}$, la somme est égale à la fonction $u(z)$ inverse de la fonction $z=\sqrt{\frac{\ln u}{u^2-1}}$ $(0<u<1)$.

26.52. Point isolé de ramification d'ordre 2.

CHAPITRE V

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RÉSIDUS

§ 27. Développement des fonctions méromorphes en séries de fractions simples et en produits infinis

Une fonction est appelée *méromorphe dans un domaine D* si, dans ce domaine, elle n'a pas de points singuliers, sauf les pôles. Pour abréger, une fonction méromorphe dans tout le plan fini est appelée *fonction méromorphe*.

27.01. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dont les pôles sont $a_1, a_2, \ldots$, les parties principales correspondant à ces pôles étant respectivement $g(z\ ;\ a_1), g(z\ ;\ a_2), \ldots$. Supposons qu'un domaine fini G soit borné par une courbe simple fermée lisse par morceaux C qui ne passe pas par les pôles de la fonction $f(z)$. Montrer que, dans le domaine G, la fonction $f(z)$ peut être mise sous la forme

$$f(z)=f_1(z)+\sum_{a_k\in G} g(z;\ a_k),$$

où la fonction $f_1(z)$ est régulière dans le domaine G et est égale à

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\quad (z\in G).$$

27.02. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dont les pôles sont $a_1, a_2, \ldots$, les parties principales correspondant à ces pôles étant respectivement $g(z\ ;\ a_1), g(z\ ;\ a_2), \ldots$. Supposons qu'il existe une suite de domaines finis D_n bornés par des courbes simples lisses par morceaux C_n jouissant des propriétés suivantes :

1. Quel que soit le nombre $R>0$, les domaines D_n contiennent le disque $|z|<R$, pour $n>n_0(R)$.

2. Pour $n\to\infty$, on a $\int_{C_n} |f(z)|\,\frac{|dz|}{|z|+1}\to 0$. Montrer que

$$f(z)-\sum_{a_k\in D_n} g(z;\ a_k)\to 0\quad (n\to\infty),$$

la tendance vers la limite étant uniforme par rapport à z en n'importe quelle partie bornée du plan.

27.03. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dont les pôles sont $a_1, a_2, \ldots$, les parties principales correspondant à ces pôles étant respectivement $g(z\ ;\ a_1), g(z\ ;\ a_2) \ldots$. Désignons par $G(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ le plan des z privé des disques $|z-a_k|\leq\varrho_k$, $k=1, 2, \ldots$. Supposons que les rayons $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ peuvent être choisis tels que :

1. Les disques $|z-a_k|\leq\varrho_k$, $k=1, 2, \ldots$, n'aient pas de points deux à deux communs.

2. Pour tous les $z \in G(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$, l'inégalité

$$|f(z)| \leq \varepsilon(|z|),$$

où $\varepsilon(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$, soit satisfaite.

Montrer que

$$f(z) - \sum_{|a_k|<R} g(z;\ a_k) \to 0 \quad (R \to \infty),$$

la tendance vers la limite étant uniforme par rapport à z en chaque partie bornée du plan.

Indication. Utiliser le résultat du problème 27.02. Comme domaine D_R prendre une partie du domaine $G(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ située dans le disque $|z| < R$ et complétée par les disques $|z-a_k| \leq \varrho_k$, $|a_k| < R$.

27.04. Démontrer la formule

$$\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z-n^2}$$

et se convaincre que la série figurant au second membre converge uniformément en chaque partie bornée du plan.

Nota. La série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dont les termes peuvent devenir infinis sera appelée *convergente* si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut citer un N tel que, pour tous les $n > N$ et $m > 0$, l'inégalité $|\sum_{k=n}^{n+m} u_k| < \varepsilon$ soit valable. D'une façon analogue, on définit la convergence uniforme des séries de ce type.

27.05. Montrer que $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$.

27.06. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{1}{e^z - e^a} = e^{-a}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{z-a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z-a)}{(z-a)^2 + 4n^2\pi^2}\right]$.

2. $\frac{\pi}{\sqrt{z} \sin \pi\sqrt{z}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{z-n^2}$.

3. $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$.

4. $\frac{\cos \sqrt{z}}{z \sin^2 \sqrt{z}} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{(z-n^2\pi^2)^2} - \frac{1}{n^2\pi^2(z-n^2\pi^2)}\right]$.

5. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z} = \frac{1}{4z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{\operatorname{sh} \pi n} \frac{2\pi z^2}{4z^4 + n^4\pi^4}$.

27.07. Montrer que

$$\frac{1}{\cos \pi \sqrt{z}} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{z - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Indication. Utiliser le résultat du problème 27.02 en prenant comme domaines D_n les disques $|z| < n^2$. Lors de l'estimation de l'intégrale le long de C_n, utiliser le lemme de Jordan (voir les problèmes 5.37 et 5.39).

27.08. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$. 2. $\frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}-n\right)^2}$.

3. $\frac{1}{\operatorname{ch} z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{z^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$. 4. $\operatorname{tg} z=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$.

5. $\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$.

6. $\frac{e^{az}}{e^z-1}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z\cdot\cos 2\pi na-4\pi n\sin 2\pi na}{z^2+4n^2\pi^2}$, $0<a<1$.

27.09. Soit $F(z)$ une fonction entière satisfaisant à l'inégalité

$$|F(x+iy)|\leq Me^{a|y|},\qquad -\pi<a<\pi$$

pour tous les x et y réels. Montrer que

$$\frac{\pi F(z)}{\sin \pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{F(n)}{z-n}$$

et

$$\frac{\pi F(z)}{\cos \pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{F\left(n+\frac{1}{2}\right)}{z-n-\frac{1}{2}}.$$

27.10. Montrer que

1. $\frac{\sin az}{\sin \pi z}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin na}{z^2-n^2}$, $-\pi<a<\pi$.

2. $\frac{\operatorname{ch} az}{\operatorname{sh} \pi z}=\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z\cos na}{z^2+n^2}$, $-\pi<a<\pi$.

3. $\frac{\pi}{\sin \pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\pi n+\alpha n-\alpha z)}}{z-n}$, $-\pi<\alpha<\pi$.

4. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\alpha(z-n)}{z-n}=0$, $-\pi<\alpha<\pi$.

5. $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}=\pi\alpha+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha(z-n)}{(z-n)^2}$, $0\leq\alpha<\pi$.

27.11. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{e^{(\alpha+\beta)z}-1}{(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\alpha z}{\alpha^2z^2+4k^2\pi^2}+\frac{2\beta z}{\beta^2z^2+4k^2\pi^2}\right)$ $\alpha\beta\neq 0$; $\alpha\neq\beta$.

2. $\operatorname{ctg}(z-a)+\operatorname{ctg} a=z\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a-\pi n)(z-a+\pi n)}$, $\sin a\neq 0$.

3. $\frac{\sin a}{\cos z-\cos a}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2a}{a^2-(z+2\pi n)^2}$, $\sin a\neq 0$.

4. $\frac{\cos a}{\sin a-\sin z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi-2a}{(z-a+2\pi n)(z+a+(2n-1)\pi)}$, $\cos a\neq 0$.

27.12. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dont les pôles sont $a_1, a_2, \ldots$ et les zéros $b_1, b_2, \ldots$ (chaque zéro et chaque pôle écrits tant de fois que leur ordre l'indique), et supposons que le point $z=0$ n'est ni zéro ni pôle de la fonction $f(z)$. Supposons en outre que

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-b_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-a_n}$$

et que ces deux séries convergent uniformément en chaque partie bornée du plan. Montrer que

$$f(z)=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)}f(0)$$

et que les deux produits ci-dessus convergent aussi uniformément en chaque partie bornée du plan.

Nota. Le produit $\prod_{k=1}^{\infty}u_k$ dont les facteurs peuvent s'annuler sera appelé *convergent* si, pour tout $\varepsilon>0$, on peut citer un N tel que, pour tous les $n>N$ et $m>0$, l'inégalité $\left|1-\prod_{k=n}^{n+m}u_k\right|<\varepsilon$ soit valable. D'une façon analogue, on définit la convergence uniforme des produits de ce type.

27.13. Démontrer les formules suivantes :

1. $\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$. 2. $\operatorname{sh} z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$.

3. $\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right)$.

4. $\operatorname{th} z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+\left(\frac{z}{\pi n}\right)^2}{1+\left(\frac{z}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)^2}\right]$.

5. $e^{az}-e^{bz}=(a-b)ze^{\frac{1}{2}(a+b)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(a-b)^2z^2}{4n^2\pi^2}\right]$.

6. $e^z-e^a=(z-a)e^{\frac{z+a}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{z-a}{2\pi n}\right)^2\right]$.

7. $\operatorname{ch} z-\cos z=z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right)$.

8. $\cos\pi z-\cos\pi a=-\frac{\pi^2}{2}(z^2-a^2)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z+a}{2n}\right)^2\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z-a}{2n}\right)^2\right]$.

9. $\cos\pi z=\pi(2z+1)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z(z+1)}{n^2-\frac{1}{4}}\right)$.

10. $\dfrac{\cos z-\cos a}{1-\cos a}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{(2\pi n+a)^2}\right).$

11. $\sin(z-a)+\sin a=\dfrac{z(\pi+2a-z)}{\pi+2a}\prod_{n\neq 0}\left\{1+\dfrac{z(\pi+2a-z)}{2\pi n(\pi(2n-1)-2a)}\right\}.$

12. $\dfrac{\sin(z-a)}{\sin a-\sin z}=-\prod_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-\dfrac{z(z-2a)}{\pi^2(2n+1)^2-a^2}}{1-\dfrac{z(z+2a)}{\pi^2(2n+1)^2-a^2}}.$

13. $e^{z^2}+e^{2z-1}=2e^{\frac{1}{2}(z^2+2z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(z-1)^4}{\pi^2(2n-1)^2}\right).$

14. $e^{2\,\mathrm{ch}\,z}-e^{2\,\mathrm{sh}\,z}=2e^{e^z-z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{e^{-2z}}{\pi^2n^2}\right).$

27.14. En utilisant la formule $\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$, montrer que

$$\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{2n+1}\qquad(|z|<\pi),$$

où

$$a_n=-2\pi^{-2(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2(n+1)}.$$

27.15. Trouver les coefficients du développement en série de Laurent suivant les puissances de z dans la couronne $k\pi<|z|<(k+1)\pi$, $k=1, 2, \ldots$ de la fonction $\operatorname{ctg} z$.

27.16. Supposons que toutes les conditions du problème 27.03 soient satisfaites, sauf la condition 2 qui est remplacée par

2*. $|f(z)|\leq|z|^p\varepsilon(|z|)$. $(z\in G(\varrho_1, \varrho_2, \ldots))$,

où p est un entier positif, tandis que la fonction $\varepsilon(t)$ tend toujours vers zéro pour $t\to+\infty$. Supposons en outre que le point $z=0$ ne soit pas un pôle de la fonction $f(z)$. Montrer que

$$f(z)-\sum_{|a_k|<R}\left\{g(z;\ a_k)-\sum_{s=1}^{p-1}\frac{z^s}{s!}g^{(s)}(0;\ a_k)\right\}\to\sum_{s=0}^{p-1}\frac{z^s}{s!}f^{(s)}(0)\quad(R\to\infty),$$

a tendance vers la limite étant uniforme en chaque partie bornée du plan.

Indication. Appliquer le résultat du problème 27.03 à la fonction $z^{-p}f(z)$.

27.17. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

où C est la constante d'Euler définie par l'égalité

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Indication. Montrer d'abord que

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt\ (\operatorname{Re} z>0),$$

ensuite, en intégrant par parties, calculer l'intégrale se trouvant sous le signe de limite.

27.18. A l'aide du résultat du problème 27.17, démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=C-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right).$
2. $\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$

RÉPONSES

27.15.

$$\operatorname{ctg} z=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m+1} \quad (k\pi<|z|<(k+1)\pi),$$

où

$$a_m=-2\pi^{-2m-2}\sum_{s=k+1}^{\infty} s^{-2m-2} \quad (m\geq 0),$$

$$a_m=2\pi^{-2m-2}\sum_{s=1}^{k} s^{-2m-2} \quad (m<0).$$

§ 28. Les plus simples types d'intégrales impropres

La possibilité la plus simple de calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

au moyen du théorème des résidus se présente si le comportement de la fonction $f(z)$ dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ (ou dans le demi-plan $\operatorname{Im} z<0$) permet de considérer l'intégrale (1) comme une intégrale de $f(z)$ sur la frontière de ce demi-plan.

28.01. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$, sauf aux pôles $a_1, \ldots, a_n$, et continue jusqu'à la frontière de ce demi-plan (sauf aux mêmes pôles que ci-dessus). Montrer que, si la fonction $f(z)$ vérifie la condition $f(z)=o\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $z\to\infty$ dans le demi-plan $\operatorname{Im} z\geq 0$, la formule ci-dessous est valable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Indication. Appliquer le théorème des résidus au demi-disque $\operatorname{Im} z>0$, $|z|<R$, ensuite, passer à la limite pour $R\to\infty$.

28.02. Quels changements subira la formule du problème 28.01 si la condition $\operatorname{Im} z>0$ est remplacée par $\operatorname{Im} z<0$?

28.03. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$. 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2ix-2}$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$. 5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$. 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4+6x^2+25}$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. 8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+4ix-5)^2}$. 9. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$.

10. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^6\,dx}{(x^4+a^4)^2}$, $a>0$. 11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2ix-1-a^2)^2}$, $a>0$.

12. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4}$, $a>0$, $b>0$.

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, $a>0$, $b>0$.

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2i\alpha x-\alpha^2-\beta^2)^n}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $n=1, 2, \ldots$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a+bx^2)^n}$, $a>0$, $b>0$, $n=1, 2, \ldots$

28.04. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$, sauf aux pôles $a_1, \ldots, a_n$, et continue jusqu'à la frontière de ce demi-plan, sauf aux mêmes pôles que ci-dessus. Montrer que, si, pour $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z\geq 0$, la fonction $f(z)$ vérifie la condition $f(z)=o(1)$, la formule ci-dessous est valable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}.$$

Indication. Voir l'indication concernant le problème 28.01. Lors de l'estimation de l'intégrale le long de la demi-circonférence $\operatorname{Im} z>0$, $|z|=R$, on peut utiliser le lemme de Jordan (voir le problème 5.37).

28.05. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx$. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{x^2-2ix-2}$. 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+4ix-5)^2}$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+109}\,dx$. 5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}\,dx$. 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}\,dx}{x^4+8x^2+16}$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}\sqrt{x+i}}{x^2+1}\,dx, \quad \sqrt{z+i}\,\Big|_{z=0} = e^{\pi i/4}.$ 8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+2ix-2)^2}\,dx.$

9. $\displaystyle\int_{1+i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\,dz, \quad t>0.$ 10. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{zt^z}{z^2+1}\,dz, \quad \sigma>0, \ 0<t<1.$

11. $\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zt}}{(z^2-1)^2}\,dz;$ a) $t>0;$ b) $t<0;$ c) $t=0.$

12. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^{z+2}}{z(z+1)(z+2)}\,dz, \ \sigma<-2, \ 0<t<1.$

13. $\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\operatorname{ch} zt}{(z+1)(z+2)}\,dz, \ t>0.$

14. $\displaystyle\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \frac{z\sin zt}{z^2+1}\,dz, \ t>0.$ 15. $\displaystyle\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z\cos zt}{(z+1)^2}\,dz, \ t>0.$

28.06. Supposons satisfaites les conditions du problème 28.04. Supposons en outre que la fonction $f(z)$ soit réelle pour les valeurs réelles de z. Démontrer les formules ci-dessous :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,dx = -2\pi\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)e^{iz},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\,dx = 2\pi\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)e^{iz}.$$

28.07. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx.$ 4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^3+13x)}{x^4+13x^2+36}\sin x\,dx.$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}\,dx.$ 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,dx.$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx.$ 8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx, \ a>0.$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx,\ a>0.$ 10. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx,\ a>0.$

11. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx,\quad a>0,\quad \operatorname{Re} b>0.$

12. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx,\quad a>0,\quad \operatorname{Re} b>0.$

13. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+b^2)^3}\,dx,\quad \operatorname{Re} a>0.$

14. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0.$

15. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^4+x^2+1}\,dx,\quad a>0.$

Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$, sauf au point c intérieur à ce segment, et supposons que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge. On appelle *intégrale de $f(x)$ le long du segment* $[a, b]$ *au sens de détermination principale* la limite

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varrho\to 0}\int_{I_\varrho} f(x)\,dx$$

(si cette limite existe et si elle est finie), où I_ϱ désigne le segment $[a, b]$ duquel on a enlevé le voisinage $(c-\varrho,\ c+\varrho)$ du point c.

Pour définir l'intégrale, au sens de la détermination principale, d'une fonction $f(x)$ présentant plusieurs discontinuités sur le segment $[a, b]$, il faut décomposer le segment $[a, b]$ en la somme de plusieurs segments dont chacun ne contient qu'un seul point de discontinuité.

28.08. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle ayant les pôles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans le demi-plan supérieur, et les pôles $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sur l'axe réel, sans avoir d'autres pôles pour $\operatorname{Im} z\geq 0$. Montrer que, si la fonction $R(z)$ satisfait à la condition $R(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)$ pour $r\to\infty$, la formule ci-dessous est valable:

$$\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{itx}\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} R(z)e^{itz}+\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{r=b_k} R(z)e^{itz}$$

(à condition que l'intégrale figurant au premier membre existe).

Indication. Appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de la fonction $R(z)e^{iz}$ le long de la frontière du domaine

$$\operatorname{Im} z > 0, \ |z| < R, \ |z-b_1| > \varrho_1, \ \ldots, \ |z-b_m| > \varrho_m,$$

ensuite passer à la limite pour $R \to \infty$, $\varrho_k \to 0$. Généralement parlant, les limites des intégrales le long des petites circonférences seront différentes de zéro.

Remarque. Le résultat du problème 28.08 peut être utilisé pour calculer les intégrales convergentes. Ainsi, par exemple, le procédé le plus simple permettant de calculer l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ consiste dans l'utilisation de ce résultat.

En effet,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

28.09. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)}, \quad a > 0, \ -\infty < \xi < \infty.$

2. $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx;$ a) $\alpha > 0$; b) $\alpha < 0$.

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$ a) $\alpha > 0$; b) $\alpha < 0$.

4. $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx;$ a) $\alpha > 0$; b) $\alpha < 0$.

5. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x^2} dx, \ \alpha > 0.$ 6. $\int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx, \ n = 2, 3, 4.$

7. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx, \ a > 0, \ b > 0.$

8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx, \ a > 0, \ \operatorname{Re} b > 0.$

9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \frac{\sin ax}{x} dx, \ a > 0, \ \operatorname{Re} b > 0.$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2+b^2)}\,dx,\ a>0,\ \operatorname{Re} b>0.$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+a^2)}\,dx,\ \operatorname{Re} a>0.$

12. $\displaystyle\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-\xi}$; *a)* $\operatorname{Im}\xi>0$; *b)* $\operatorname{Im}\xi<0$.

28.10. Soit

$$R(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{z-b_k},$$

où $\operatorname{Im} a_k>0$ et $\operatorname{Im} b_k<0$. Calculer les intégrales :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\frac{dx}{x-\xi}$; *a)* $\operatorname{Im}\xi>0$; *b)* $\operatorname{Im}\xi<0$; *c)* $\operatorname{Im}\xi=0$.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\frac{dx}{x-\xi}$; *a)* $\operatorname{Im}\xi>0$; *b)* $\operatorname{Im}\xi<0$; *c)* $\operatorname{Im}\xi=0$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}\,dx,\ N>0,\ -\infty<\xi<\infty.$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\frac{\sin^2 N(x-\xi)}{N(x-\xi)^2}\,dx,\ N>0,\ -\infty<\xi<\infty.$

28.11. Soit ζ un nombre complexe arbitraire. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\zeta}{z-\zeta}\,dz,\ -\infty<\sigma<\infty.$

2. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} z-\operatorname{sh}\zeta}{z-\zeta}\right)^2 dz,\ -\infty<\sigma<\infty.$

3. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} az-\operatorname{ch} a\zeta}{z-\zeta}\right)^2 dz,\ -\infty<\sigma<\infty,\ a>0.$

4. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{t^z-t^\zeta}{z-\zeta}\right)^2 dz,\ -\infty<\sigma<\infty,\ 0<t<1.$

5. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{\operatorname{sh}(z-\zeta)}{z-\zeta}\right)^2 \frac{dz}{z^2-1},\ \sigma>1.$

6. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\zeta}{z-\zeta}\right)^2 \frac{dz}{z-1}$, $\sigma<1$.

7. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{t^z-t^\zeta}{z-\zeta}\right)^2 \frac{dz}{z^2+1}$, $\sigma<0$, $t>1$

8. $\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\operatorname{ch} z-\operatorname{ch}\zeta}{z-\zeta}\cdot\frac{\operatorname{sh} z-\operatorname{sh}\zeta}{z-\zeta}\frac{dz}{z^2}$, $\sigma>0$.

* * *

Le calcul de l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi$, où $f(z)$ est une fonction périodique de z de période 2π, se ramène au calcul d'une intégrale de contour par deux méthodes.

28.12. Soient $R(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle et $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ une fonction qui n'a pas de pôles sur l'axe réel. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

28.13. Soit $f(z)$ une fonction périodique de période 2π et méromorphe dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>-\eta$, $\eta>0$. Supposons que la fonction $f(z)$ n'ait pas de pôles sur la frontière du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$, $|\operatorname{Re} z|<\pi$, tandis que dans l'intérieur de ce demi-plan elle n'ait des pôles qu'aux points $a_1, \ldots, a_n$. Montrer que, si la fonction $f(z)$ vérifie la condition $f(z)\to A\neq\infty$ pour $\operatorname{Im} z\to+\infty$, alors la formule ci-dessous est valable

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 2\pi A + 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Indication. Appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z)$ dans le rectangle $|\operatorname{Re} z|<\pi$, $0<\operatorname{Im} z<R$, ensuite, passer à la limite pour $R\to+\infty$. Avoir en vue qu'en vertu de la périodicité de la fonction $f(z)$, les intégrales prises sur les côtés verticales du rectangle se détruisent mutuellement.

28.14. Supposons satisfaites toutes les conditions du problème 28.13 et admettons, en outre, que la fonction $f(z)$ ait encore les pôles $b_1, \ldots, b_m$ situés dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Démontrer la formule ci-dessous :

$$\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 2\pi A + 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \pi i\sum_{k=1}\operatorname*{Res}_{z=b_k} f(z)$$

(en supposant que l'intégrale existe).

28.15. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$. 2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{13+12\sin\varphi}$. 3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi}{13+12\cos\varphi}\,d\varphi$.

4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi$. 5. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\operatorname{ctg}(\varphi-ia)\,d\varphi,\ a>0.$

6. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}e^{2i\varphi}\operatorname{ctg}(\varphi-ia)\,d\varphi,\ a>0.$

7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$; a) $a>1$; b) $-1<a<1$; c) $a=1$.

8. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\sin\varphi}$; a) $a>1$; b) $-1<a<1$ (détermination principale).

9. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1-a\sin^2\varphi}$; a) $0<a<1$; b) $a>1$ (détermination principale).

10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi,\ -1<a<1.$

11. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi,\ -1<a<1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

12. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin n\varphi}{1-2a\sin\varphi+a^2}\,d\varphi,\ -1<a<1,\ n=1,\ 2,\ \ldots$

13. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

14. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi-\cos^2 a}{\sin\varphi-\sin a}\right)^n e^{in\varphi}\,d\varphi,\ 0<a<\frac{\pi}{2},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

28.16. Soit $f(z)$ une fonction satisfaisant à toutes les conditions du problème 28.13, excepté $f(z)\to A$ pour $\operatorname{Im} z\to+\infty$. Montrer que la fonction $f(-i\ln z)$ a au point $z=0$ un point singulier isolé de caractère uniforme et que

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\,d\varphi=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)+2\pi\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f(-i\ln z)}{z}.$$

* * *

28.17. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe périodique de période $i\omega$, $\omega>0$. Supposons que la fonction $f(z)$ n'ait pas de pôles sur l'axe réel, tandis que dans l'intérieur de la bande $0<\operatorname{Im} z<\omega$ elle n'en ait qu'aux points $a_1, \ldots, a_n$. Montrer que, si la fonction $f(z)$ satisfait à la condition

$$f(z)=O(e^{-p|\operatorname{Re} z|})(\operatorname{Re} z\to\pm\infty),\ p>0,$$

alors la formule ci-dessous est valable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}f(x)\,dx=-\frac{2\pi i}{e^{i\alpha\omega}-1}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} e^{\alpha z}f(z)\quad(|\operatorname{Re}\alpha|<p).$$

Indication. Appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de la fonction $e^{\alpha z}f(z)$ sur la frontière de la bande $0<\operatorname{Im} z<\omega$. Exprimer l'une par l'autre les intégrales prises le long des côtés de la bande.

28.18. Supposons satisfaites toutes les conditions du problème 28.17 avec la seule différence que la fonction $f(z)$ peut encore avoir des pôles aux points $b_1, \ldots, b_m$ sur l'axe réel. Démontrer la formule suivante:

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}f(x)\,dx=-\frac{2\pi i}{e^{i\alpha\omega}-1}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)e^{\alpha z}-\pi i\frac{e^{i\alpha\omega}+1}{e^{i\alpha\omega}-1}\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=b_k} f(z)e^{\alpha z}$$

(en supposant que l'intégrale existe).

28.19. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}\,dx}{e^x+1}$, $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}\,dx}{1+e^x+e^{2x}}$, $0<\operatorname{Re}\alpha<2$.

3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\operatorname{ch} x}\,dx$, $|\operatorname{Im}\alpha|<1$. 4. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} a}\,dx$, $a>0$, $|\operatorname{Im}\alpha|<1$.

5. $\displaystyle\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{e^{2x}-1}\,dx$, $0<\operatorname{Re}\alpha<2$.

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{1-e^x}\,dx$, $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, $0<\operatorname{Re}\beta<1$.

7. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\operatorname{sh} x}\,dx$, $|\operatorname{Im}\alpha|<1$. 8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha x}{\operatorname{ch} x}\,dx$, $\operatorname{Re}\alpha>0$.

* * *

Les intégrales du type $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)x^{\alpha-1}dx$ peuvent être ramenées aux intégrales du type examiné plus haut en effectuant le remplacement $x=e^{\xi}$. Quand même, elles peuvent être ramenées directement aux intégrales de contours.

28.20. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle qui n'a pas de pôles pour $z>0$ et qui vérifie la condition

$$R(z)=O(z^{-p})\ (z\to 0),\ R(z)=O(z^{-q})\ (z\to\infty),$$

où p et q sont des entiers ($p<q$).

1. Démontrer la formule

$$\int_0^{\infty} R(x)x^{\alpha-1}dx=-\frac{2\pi i}{e^{2\pi i\alpha}-1}\sum \operatorname{Res} R(z)z^{\alpha-1}\ (p<\alpha<q).$$

Ici, on prend la somme des résidus par rapport à tous les pôles de la fonction $R(z)$ différents du point $z=0$, et, pour le point $z^{\alpha-1}$, dans le plan des z muni d'une coupure suivant la demi-droite $(0, +\infty)$ on choisit la détermination $e^{(\alpha-1)(\ln|z|+i\arg z)}$, $0<\arg z<2\pi$.

2. Démontrer la formule

$$\int_0^{\infty} R(x)x^{\alpha-1}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\sum \operatorname{Res} R(z)(-z)^{\alpha-1}(p<\operatorname{Re}\alpha<q).$$

Ici, on prend toujours la somme des résidus par rapport à tous les pôles de la fonction $R(z)$ différents de zéro, et, pour $(-z)^{\alpha-1}$, on choisit la détermination

$$e^{(\alpha-1)(\ln|z|+i\arg(-z))},\ -\pi<\arg(-z)<\pi.$$

Indication. Appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de la fonction $R(z)z^{\alpha-1}$ ou $R(z)(-z)^{\alpha-1}$ prise le long de la frontière du plan des z muni d'une coupure suivant le demi-axe réel positif.

28.21. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle satisfaisant aux conditions

$$R(z)=O(z^{-p})(z\to 0),\ R(z)=O(z^{-q})(z\to\infty).$$

Notons $a_1, \ldots, a_n$ ses pôles situés en dehors de la demi-droite $[0, +\infty]$ et $b_1, \ldots, b_m$ ceux qui se trouvent justement sur cette demi-droite.

En supposant que l'intégrale existe, démontrer la formule

$$\text{v.p.}\int_0^{\infty} R(x)x^{\alpha-1}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\{R(z)(-z)^{\alpha-1}\}-\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=b_k}\{R(z)z^{\alpha-1}\}.$$

Ici,

$p<\operatorname{Re}\alpha<q$; $(-z)^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)(\ln|z|+i\arg(-z))}$, $|\arg(-z)|<\pi$, et $z^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\ln z}$.

28.22. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. 2. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+i)\sqrt{x}}$. 3. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$.

4. v.p. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$. 5. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x^2+1}dx$. 6. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\ln x)}{x^2+4}dx$.

7. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x+a)}$, $0<\alpha<1$; a) >0; b) $a<0$ (détermination principale).

8. $\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(x+a)(x+2a)}$, $-1<\alpha<1$; $a>0$.

9. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $0<\operatorname{Re}\alpha<3$.

10. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$, $0<\operatorname{Re}\alpha<n$, $n=1, 2, \dots$.

11. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-i\alpha\ln x}dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}$, $-1<\operatorname{Im}\alpha<1$, $-\pi<\lambda<\pi$.

12. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$, $0<\operatorname{Re}\alpha<\frac{1}{3}$.

13. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+\sqrt{x})^2}\,dx$, $0<\operatorname{Re}\alpha<\frac{3}{2}$.

14. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha\ln x)}{x^2-1}\,dx$, $\alpha>0$. 15. $\int\limits_0^\infty \left[\frac{\sin(\alpha\ln x)}{x-1}\right]^2 dx$, $\alpha>0$.

* * *

Les intégrales du type $\int\limits_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^\alpha f(x)\,dx$ se ramènent aussi aux intégrales examinées plus haut en effectuant le remplacement $\frac{x-a}{b-x}=\xi$ et on peut également les réduire directement aux intégrales de contours.

28.23. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle qui n'a pas de pôles pour $a<z<b$ et qui vérifie les conditions

$$R(z)=O((z-a)^{-p})\ (z\to a);\quad R(z)=O((z-b)^q)\ (z\to b),$$

où p et q sont des entiers ($p<q$).

1. Démontrer la formule

$$\int\limits_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1} R(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\sum \operatorname{Res} R(z)\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1},$$

où $p < \operatorname{Re} \alpha < q$, tandis que la somme des résidus est prise par rapport à tous les pôles de la fonction $R(z)$ y compris le point $z = \infty$, excepté les points $z = a$ et $z = b$. Pour $\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1}$ on prend la détermination

$$e^{(\alpha-1)\ln\frac{z-a}{b-z}}, \quad 0 < \operatorname{Im} \ln \frac{z-a}{b-z} < 2\pi.$$

2. Démontrer la formule

$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1} R(x)dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum \operatorname{Res} R(z) \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha-1},$$

où $p < \operatorname{Re} \alpha < q$ et la somme des résidus est toujours prise par rapport à tous les pôles mentionnés de la fonction $R(z)$. Pour $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha-1}$ on prend la détermination

$$e^{(\alpha-1)\ln\frac{z-a}{z-b}}, \quad \left|\operatorname{Im} \ln \frac{z-a}{z-b}\right| < \pi.$$

Indication. Appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de la fonction $\left(\pm\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1} R(z)$ le long de la frontière du plan muni d'une coupure suivant le segment de droite $[a, b]$.

28.24. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle qui a, pour $a < z < b$, des pôles aux points $b_1, \ldots, b_m$ et qui, pour le reste, satisfait aux conditions du problème 28.23. En supposant que l'intégrale existe, démontrer la formule

$$\text{v.p.} \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1} R(x)\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum \operatorname{Res} R(z) \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha-1} - \pi \operatorname{ctg} \pi\alpha \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=b_k} R(z) \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1},$$

où $p < \operatorname{Re} \alpha < p$. La première somme des résidus est prise par rapport à tous les pôles de la fonction $R(z)$ situés en dehors du segment $[a, b]$, et, en calculant les résidus qui y figurent, on prend la branche de la fonction $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha-1}$ correspondant aux déterminations $-\pi < \arg \frac{z-a}{z-b} < \pi$. Dans la seconde somme, $\arg \frac{z-a}{b-z} = 0$.

28.25. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\, dx.$ 2. $\int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x+2}\, dx.$ 3. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3}\, dx.$

4. $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\, dx.$ 5. $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1)^2}\, dx.$ 6. $\int_0^1 \sqrt{x^3-x^4}\, dx.$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt[3]{x(1-x)^2}}$. 8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3}\,dx$. 9. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\sqrt[4]{x^3(3-x)}}{5-x}\,dx$.

10. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{(1+x)(1-x)^2}}{2-x}\,dx$. 11. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)(1+x)^2}}$.

12. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{x^2+1}\,dx$. 13. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt[5]{x^2(2-x)^3}\,dx$.

14. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{3x-x^2-2}}$. 15. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x-1)^2(2-x)}}$.

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$. 17. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$, a) $a>1$; b) $-1<a<1$.

18. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{1-\alpha}dx$, $-1<\operatorname{Re}\alpha<2$.

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(x+1)^3}\,dx$, $-1<\operatorname{Re}\alpha<2$.

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(1-x)^\alpha(1+x)^{1-\alpha}}{x^2+1}\,dx$, $-1<\operatorname{Re}\alpha<2$.

*   *   *

Il y a deux méthodes de calcul des intégrales du type $\int_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}\ln x\,dx$. La première consiste dans l'application du théorème des résidus à l'intégrale de la fonction $f(z)z^{\alpha-1}\ln z$ ou $f(z)(-z)^{\alpha-1}\ln(-z)$ le long de la frontière du plan muni d'une coupure suivant la demi-droite $(0, +\infty)$. Les intégrales obtenues sont exprimées par l'intégrale cherchée et par l'intégrale $\int_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}dx$ dont la formule a été déjà obtenue (voir le problème 28.20). La seconde méthode inclut la différentiation de la dernière intégrale par rapport au paramètre α. Les deux méthodes sont également applicables aux intégrales

$$\int_a^b f(x)\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(e^x)x\,dx.$$

28.26. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle qui n'a pas de pôles pour $z>0$, et admettons que l'intégrale

$$I_\alpha=\int_0^\infty R(x)x^{\alpha-1}\ln x\,dx \quad (\alpha\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

converge. Démontrer la formule

$$I_\alpha=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\sum \operatorname{Res} R(z)(-z)^{\alpha-1}\ln(-z)-\frac{\pi^2\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}\sum \operatorname{Res} R(z)(-z)^{\alpha-1},$$

où la somme des résidus est prise par rapport à tous les pôles de la fonction $R(z)$ situés en dehors de la demi-droite $[0, +\infty]$, et

$$-\pi<\arg(-z)<\pi.$$

28.27. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle qui n'a pas de pôles pour $a<z<b$. Trouver, pour l'intégrale

$$I_\alpha=\int_a^b R(x)\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1}\ln\frac{x-a}{b-x}\,dx \quad (\alpha\neq 0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

une formule analogue à la formule du problème 28.26 en supposant que l'intégrale I_α converge.

28.28. Trouver les changements subis par les formules des problèmes 28.26 et 28.27 dans le cas où la fonction $R(z)$ a un pôle au point $z=c$, où respectivement $0<c<\infty$ et $a<c<b$, tandis que l'intégrale est prise au sens de détermination principale.

28.29. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}.$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}.$ 4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\ln\frac{x}{1-x}\,dx.$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}.$ 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^{2x}+1}\,dx.$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{\operatorname{ch} x}\,dx.$ 8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx.$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\cos x}{\operatorname{sh} x}\,dx.$ 10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx.$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x+a}\,dx,\ a>0.$ 12. v.p. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x-a}\,dx,\ a>0,\ 0<\operatorname{Re}\alpha<1.$

13. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$, $\operatorname{Re} a>0$. 14. $\int\limits_0^1 \ln\frac{x}{1-x}\frac{dx}{x+a}$, $\operatorname{Re} a>0$.

15. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx$, $\operatorname{Re} a>0$. 16. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\cos x}{\operatorname{ch} x}\,dx$.

RÉPONSES

28.02.

La somme des résidus du second membre va changer de signe.

28.03.

1. $\pi/4$. 2. $5\pi/12$. 3. 0. 4. $\pi\sqrt{2}$. 5. $4\pi/3$. 6. $\pi/4$. 7. $3\pi/8$. 8. 0. 9. $\pi/16a^3$.

10. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16a}$. 11. 0. 12. $\frac{\pi}{32}a^{-3/2}b^{-5/2}$. 13. $\frac{\pi(2b+a)}{2ab^3(a+b)^2}$. 14. 0.

15. $a^n\sqrt{\frac{a}{b}}\,\pi\cdot 2^{1-n}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(n-1)!}$.

28.05.

1. $\pi i e^{-1+i}$. 2. $-\frac{2\pi}{e}\sin 1$. 3. 0. 4. $\pi i e^{3i-10}$. 5. $\pi(1-i)e^{-3i-8}$. 6. $\frac{3\pi e^{-2}}{32}$.

7. $\pi(1+i)e^{-1}$. 8. $\frac{\pi}{2e}(\sin 1-\cos 1)$. 9. $2\pi i\sin t$. 10. 0. 11. a) $\frac{\pi i}{2}(1+t)e^{-t}$.

b) $\frac{\pi i}{2}(1-t)e^{t}$. c) $\frac{\pi i}{2}$. 12. $-\pi i(t-1)^2$. 13. $\pi i(e^{-t}-e^{-2t})$. 14. $\pi\operatorname{ch} t$.

15. $\pi(t-i)e^{it}$.

28.07.

1. $\pi e^{-2}\cos 2$. 2. $\frac{\pi}{3}e^{-2}(4-e)$. 3. $\frac{\pi}{2}(e^{-1}+e^{-3})$. 4. $\pi(e^{-2}+e^{-3})$.

5. $\pi e^{-2}(\cos 4-\sin 4)$. 6. $\pi e^{-3}(\cos 1+\frac{1}{3}\sin 1)$.

7. $\pi e^{-3}\left(\frac{1}{3}\cos 1-\sin 1\right)$. 8. $\frac{\pi}{2a}e^{-a}$. 9. $\frac{\pi}{2}e^{-a}$.

10. $\frac{\pi}{4a}e^{-a}$. 11. $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. 12. $\frac{\pi}{4b^3}(ab+1)e^{-ab}$.

13. $\frac{\pi(a^2+3a+3)}{16a^6}e^{-a}$. 14. $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-b}}{b}\right)$.

15. $\frac{\pi}{3}\left[2\sin\frac{a}{2}-\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]e^{-a\sqrt{3}/2}$.

28.09.

1. $-\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\xi}{\xi^2+a^2}$. 2. a) πi ; b) $-\pi i$. 3. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$.

4. a) $\pi\alpha$; b) $-\pi\alpha$. 5. $\frac{\pi\alpha}{2}$. 6. $I_2=\frac{\pi}{2}$, $I_3=\frac{3\pi}{8}$, $I_4=\frac{\pi}{3}$.

7. $\pi(b-a)$. 8. $\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$.

9. $-\frac{\pi}{2}+\pi e^{-ab}$. 10. $\frac{\pi a}{2b^2}-\frac{\pi}{4b^3}(1-e^{-2ab})$.

11. $\frac{\pi}{2a^4}\left(1-a+\frac{a^2}{2}-e^{-a}\right)$. 12. a) πi ; b) $-\pi i$.

28.10.

1. a) $2\pi i \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{\xi-b_k}$; b) $2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\xi-a_k}$; c) $\pi i \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{\xi-b_k}-\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\xi-a_k}$.

2. a) $2\pi i\left\{e^{i\xi}R(\xi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k e^{ia_k}}{\xi-a_k}\right\}$; b) $-2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k e^{ia_k}}{\xi-a_k}$;

c) $2\pi i\left\{\frac{1}{2}e^{i\xi}R(\xi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k e^{ia_k}}{\xi-a_k}\right\}$.

3. $\pi R(\xi)-\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\xi-a_k}e^{iN(\xi-a_k)}-\pi\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{\xi-b_k}e^{iN(\xi-b_k)}$.

4. $\pi R(\xi)+\frac{\pi i}{2N}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(\xi-a_k)^2}[1-e^{-2iN(\xi-a_k)}]-\frac{\pi i}{2N}\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{(\xi-b_k)^2}[1-e^{2iN(\xi-b_k)}]$.

28.11.

1. $\pi i\,\mathrm{sh}\,\zeta$. 2. πi. 3. $-\pi i a$. 4. 0.

5. $\pi i\frac{\zeta^2-\zeta-1}{(\zeta^2-1)^2}+\frac{\pi i}{4}e^{-2\zeta}\left[\frac{e^2}{(1-\zeta)^2}-\frac{e^{-2}}{(1+\zeta)^2}\right]$.

6. $\frac{\pi i}{(\zeta-1)^2}\left\{\frac{2}{e}\,\mathrm{ch}\,\zeta-\zeta-\frac{1}{2}e^{-2\zeta}-\frac{1}{2}e^{-2}\right\}$.

7. 0. 8. $\frac{\pi i}{\zeta^3}(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}-\zeta e^{\zeta}+1+\zeta)$.

28.15.

1. $\frac{\pi}{2}$. 2. $\frac{2\pi}{5}$. 3. $\frac{13}{45}\pi$. 4. $2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$. 5. πi.

6. $2\pi i e^{-2a}$. 7. a) $\frac{\pi}{a^2}$; b) π ; c) π.

8. a) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; b) 0. 9. a) $\frac{\pi}{a}(1-\sqrt{1-a})$; b) $\frac{\pi}{a}$.

10. $\pi\frac{1+a^2}{1-a^2}$. 11. $2\pi\frac{a^n}{1-a^2}$.

12. 0 pour $n=2k$ et $2\pi\frac{(-1)^k a^{2k+1}}{1-a^2}$ pour $n=2k+1$.

13. $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$. 14. $\pi 2^{1-n}(-i)^n$.

28.19.

1. $\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$. 2. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3\sin\pi\alpha}\sin\frac{\pi(1-\alpha)}{3}$. 3. $\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\frac{\pi\alpha}{2}}$.

4. $\dfrac{\pi \sin a\alpha}{\operatorname{sh} \pi\alpha \cdot \operatorname{sh} a}$. 5. $-\dfrac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{\pi\alpha}{2}$. 6. $\pi(\operatorname{ctg} \pi\alpha - \operatorname{ctg} \pi\beta)$.

7. $\dfrac{\pi}{2} \operatorname{th} \dfrac{\pi\alpha}{2}$. 8. $\dfrac{\pi}{4}\left(1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch} \pi\alpha}\right)$.

28.22.

1. π. 2. $\pi \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. 3. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{-4/3}$. 4. 0.

5. $\dfrac{\pi}{2 \operatorname{ch} \dfrac{\pi}{2}}$. 6. $\dfrac{\pi \sin (\ln 2)}{4 \operatorname{ch} \dfrac{\pi}{2}}$.

7. a) $\dfrac{\pi a^{-\alpha}}{\sin \pi\alpha}$; b) $\pi a^{-\alpha} \operatorname{ctg} \pi\alpha$. 8. $(2^{a} - 1) \dfrac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin \pi\alpha}$.

9. $\dfrac{\pi}{2 \sin \pi\alpha}(1 - 2^{\alpha} + 3^{\alpha-1})$.

10. $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{k^{\alpha-1}}{(k-1)!(n-k)!}$.

11. $\dfrac{\pi}{\operatorname{sh} \pi\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{sh} \alpha\lambda}{\sin \lambda}$. 12. $\dfrac{3\pi}{\sin 3\pi\alpha}$.

13. $\dfrac{2\pi(\alpha-1)(2\alpha-1)}{\sin 2\pi\alpha}$. 14. $\dfrac{\pi}{2} \operatorname{th} \dfrac{\pi\alpha}{2}$.

15. $\pi\alpha \operatorname{cth} 2\pi\alpha - \dfrac{1}{2}$.

28.25.

1. $\pi(4 - \sqrt{15})$. 2. $\pi\left(3\dfrac{1}{2} - \sqrt{12}\right)$. 3. $\pi \dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

4. $\pi(\sqrt{2} - 1)$. 5. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 6. $\dfrac{\pi}{16}$. 7. $\pi 2^{2/3} 3^{-1/2}$.

8. $3\pi \cdot 2^{-19/4}$. 9. $\pi \sqrt{2}\left(\dfrac{17}{4} - \sqrt[4]{250}\right)$.

10. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{7}{3} - \sqrt[3]{9}\right)$. 11. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 12. $\dfrac{\pi}{\sin \dfrac{\pi}{5}}\left(-1 + \cos \dfrac{\pi}{10} + \sin \dfrac{\pi}{10}\right)$.

13. $\dfrac{12}{25} \dfrac{\pi}{\sin \dfrac{2\pi}{5}}$. 14. $3\pi \cdot 2^{-5/2}$. 15. $\pi \cdot 2^{2/3} 3^{-1/2}$.

16. $\pi \cdot 2^{2/3} 3^{-1/2}$. 17. a) $-\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$; b) 0.

18. $\dfrac{\pi\alpha(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha}$. 19. $2^{\alpha-3} \dfrac{\pi\alpha(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha}$.

20. $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}\left(-1 + \cos \dfrac{\pi\alpha}{2} + \sin \dfrac{\pi\alpha}{2}\right)$.

28.27.

$$I_\alpha = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \sum \operatorname{Res}\left\{R(z)\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1} \ln\frac{z-a}{b-z}\right\} + \left(\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\right)^2 e^{2\pi i\alpha} \sum \operatorname{Res}\left\{R(z)\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1}\right\}.$$

La somme des résidus est prise par rapport à tous les pôles de la fonction $R(z)$ (y compris le point $z=\infty$) excepté les pôles possibles pour $z=a$ et $z=b$, tandis que

$$0 < \operatorname{Im} \ln\frac{z-a}{b-z} < 2\pi.$$

28.28. Aux seconds membres des formules on ajoute les termes

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha \cdot \operatorname*{Res}_{z=c}(R(z)z^\alpha \ln z) - \frac{}{\sin^2 \pi\alpha} \operatorname*{Res}_{z=c}(R(z)z^\alpha).$$

28.29.

1. 0 2. $2\pi\left(\frac{\pi}{9}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 3. $\frac{-\pi^2\sqrt{2}}{4}$. 4. 0. 5. $-\frac{2\pi^2}{3}$. 6. $\frac{-\pi^2\sqrt{2}}{4}$.

7. $-\frac{\pi^3 \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}{4\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}}$. 8. π^2. 9. $\frac{\pi^2}{e^\pi-1}$. 10. $\pi \operatorname{cth}\pi - \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2\pi}$.

11. $\frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin \pi a}(\ln a - \pi \operatorname{ctg} \pi a)$. 12. $\pi a^{\alpha-1}\left(-\operatorname{ctg}\pi a \cdot \ln a + \frac{\pi}{\sin^2 \pi a}\right)$.

13. $\frac{\pi(\ln a)}{2a}$. 14. $-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{a}{a+1}\right)^2$. 15. $\frac{\pi}{2a}\left((\ln a)^2+\frac{\pi^2}{4}\right)$.

16. $\frac{\pi^3}{8\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}\left(1-2\operatorname{th}^2\frac{\pi}{2}\right)$.

§ 29. Types plus compliqués d'intégrales impropres

La principale difficulté qui surgit lors du calcul des intégrales déterminées au moyen de l'intégration de contour consiste dans le fait que, dans beaucoup de cas, on est obligé d'effectuer l'intégration (le long du contour) de toute une autre fonction que celle dont on prend l'intégrale déterminée.

29.01. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points $a_1, \ldots, a_n$, et soit $\int_0^\infty |R(x)|dx < \infty$. Montrer que

$$\int_0^\infty R(x)dx = -\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=a_k} R(z) \ln z$$

(pour $\ln z$, on prend n'importe quelle branche régulière dans le plan muni d'une coupure suivant le demi-axe réel positif).

29.02. Soit C une courbe simple lisse par morceaux allant du point $z=\zeta$ au point $z=\infty$, et soit $R(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points $a_1, \ldots, a_n$ et satisfaisant à la condition $\int\limits_C |R(z)|\,|dz| < \infty$. Montrer que

$$\int\limits_C R(z)dz = -\sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z) \ln(z-\zeta)$$

(pour $\ln(z-\zeta)$, on prend n'importe quelle branche régulière dans le plan muni d'une coupure suivant la courbe C).

29.03. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points $a_1, \ldots, a_n$ et satisfaisant à la condition $\int\limits_0^\infty |R(x)|dx < \infty$. Notons

$$I_m = \int\limits_0^\infty R(x) \ln^m x \; dx, \quad m=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Montrer que les intégrales I_m sont liées par la relation de récurrence ci-dessous

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k (2\pi i)^{m-k-1} I_k = -\sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z) \ln^m z \tag{1}$$

(ici, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$).

29.04. En conservant les notations du problème 29.03, trouver les formules pour les intégrales I_1 et I_2.

29.05. Supposons que la fonction $R(z)$ du problème 29.03 ait un pôle au point $z=b$, $b>0$, et que les intégrales I_m soient conçues au sens de détermination principale. Quels changements subira dans ce cas la relation de récurrence ?

29.06. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle n'ayant pas de pôles pour $z>0$ et pour $z=-1$, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction différents de $z=0$. En supposant que l'intégrale converge, montrer que

$$\int\limits_0^\infty \frac{R(x)dx}{\ln^2 x+\pi^2} = \sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} \frac{R(z)}{\ln z - \pi i} - R(-1)$$

(ici, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$).

29.07. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de e^z n'ayant pas de pôles sur l'axe réel, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans la bande $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$. Supposons que $\int\limits_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty$ et notons

$$I_m = \int\limits_{-\infty}^\infty x^m f(x)dx.$$

Démontrer les formules suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k (2\pi i)^{m-k-1} I_k = -\sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} z^m f(z),\ m=1,\ 2,\ \ldots$

2. $I_1 = \sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} \left\{ f(z) \left(-\frac{z^2}{2} + \pi i z \right) \right\}$.

3. $I_2 = \sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} \left\{ f(z) \left(-\frac{z^3}{3} + \pi i z^2 + \frac{2}{3}\pi^2 z \right) \right\}$.

29.08. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de e^z n'ayant pas de pôles sur l'axe réel ni au point $z=\pi i$, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans la bande $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$. En supposant que l'intégrale converge, montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x^2+(2m+1)^2\pi^2} = \frac{f(\pi i)}{2m+1} + \sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} \left\{ \frac{f(z)}{2m+1} \sum_{k=-m}^{m} \frac{1}{z+(2k-1)\pi i} \right\},$$

où $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

29.09. Soit C une courbe simple lisse par morceaux allant du point $z=\zeta$ au point $z=\zeta'$, et soit $R(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points $a_1, \ldots, a_n$ à distances finies et en dehors de la courbe C. Montrer que

$$\int_C R(z)dz = -\sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} f(z) \ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} - \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z}$$

(pour $\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z}$, on prend n'importe quelle branche régulière dans le plan complexe élargi muni d'une coupure suivant la courbe C).

29.10. Supposons que la courbe C et la fonction $R(z)$ soient les mêmes qu'au problème 29.09. Choisissons pour $\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z}$ n'importe quelle branche régulière dans le plan complexe élargi muni d'une coupure suivant la courbe C, et considérons comme déterminations de la fonction $\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z}$, pour $z \in C$, les déterminations limites de la branche choisie lorsqu'on s'approche de la courbe C du côté gauche (par rapport à l'orientation de la courbe). Notons

$$I_m = \int_C R(z) \left(\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} \right)^m dz,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

et

$$I_m^* = \int_C \frac{R(z)\,dz}{\left(\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} \right)^2 + (2m+1)^2\pi^2},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Démontrer les formules suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k (2\pi i)^{m-k-1} I_k = -\sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} \left\{ f(z) \left(\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} \right)^m \right\} - \operatorname{Res}_{z=\infty} \left\{ f(z) \left(\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} \right)^m \right\}$.

2. $I_m^* = \frac{1}{2m+1} \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{f(z)}{\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} - \pi i} + \sum_{s=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=a_s} \left\{ \frac{f(z)}{2m+1} \sum_{k=-m}^{m} \frac{1}{\ln \frac{z-\zeta}{\zeta'-z} + (2k-1)\pi i} \right\}$.

29.11. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2+2x+2}.$ 3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2}.$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}.$ 5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx.$ 6. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$ 8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2 dx.$ 9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^3 dx.$ 11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx.$ 12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$

13. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^2 dx.$ 14. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^3 dx.$ 15. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}\,dx.$

16. $\displaystyle\int_0^{1} \ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{1+x^2}.$ 17. $\displaystyle\int_0^{1} \left(\ln\frac{x}{1-x}\right)^2 \frac{dx}{x+1}.$ 18. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{dx}{x^2}.$

19. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\pi^2)\operatorname{ch} x}.$ 20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\,dx}{(x^2+\pi^2)\operatorname{ch} x}.$ 21. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9\pi^2)\operatorname{ch} x}.$

22. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(\ln^2 x+\pi^2)}.$ 23. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+9\pi^2}.$ 24. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,dx}{\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)^2+\pi^2}.$

25. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2+2ax\cos\lambda+a^2},\ a>0,\ 0<\lambda<\pi.$

26. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx,\ \operatorname{Re} a>0.$ 27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-a^2)\,dx}{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} a},\ -\infty<a<\infty.$

28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-a}{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} a}\right)^2 dx,\ -\infty<a<\infty.$

29. v.p. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2-a^2)(\ln^2 x+\pi^2)},\ a>0.$

30. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2(\ln^2 x+\pi^2)},\ a>0.$

31. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2(\ln^2 x+(2m+1)^2\pi^2)}$, $a>0$, $m=0, 1, 2, \ldots$

32. $\int\limits_0^1 \frac{x^k\,dx}{\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)^2+(2m+1)^2\pi^2}$, $m=0, 1, 2, \ldots$

* * *

Beaucoup d'intégrales d'une apparence assez compliquée sont calculées en séparant la partie réelle de la partie imaginaire dans des formules relativement simples.

29.12. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle continue et réelle pour les valeurs réelles de z, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans le demi-plan supérieur. En supposant que les intégrales convergent, démontrer les formules suivantes:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\ln|x-a|\,dx = -2\pi\,\mathrm{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\ln(z-a)$

(ici, a est un nombre réel, tandis que pour $\ln(z-a)$, on choisit n'importe quelle branche régulière dans le demi-plan supérieur);

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)|x-a|^{\alpha-1}dx = -\frac{2\pi}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\,\mathrm{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\left(\frac{z-a}{i}\right)^{\alpha-1}$

(ici, a est un nombre réel, $\alpha>0$, tandis que, pour $[(z-a)/i]^{\alpha-1}$, on choisit dans le demi-plan supérieur une branche positive pour les valeurs positives de $(z-a)/i$);

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\ln|x^2-a^2|\,dx = -2\pi\,\mathrm{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\ln(z^2-a^2)$

(ici, $a>0$, tandis que, pour $\ln(z^2-a^2)$, on choisit n'importe quelle branche régulière dans le demi-plan supérieur);

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\ln(x^2+a^2)\,dx = -4\pi\,\mathrm{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\ln(z+ai)$

(ici, $a>0$, tandis que, pour $\ln(z+ai)$, on choisit une branche arbitraire régulière dans le demi-plan supérieur);

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = 2\pi\,\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\ln(1-iz)$

(ici, pour $\ln(1-iz)$, on choisit une branche régulière dans le demi-plan supérieur pour laquelle $|\arg(1-iz)|<\pi$);

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)(x^2+a^2)^{\alpha/2}\cos\left(\alpha \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)dx = -2\pi \operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)(a-iz)^{\alpha}$

(ici, α est un nombre réel arbitraire, $a>0$, tandis que, pour $(a-iz)^{\alpha}$, on choisit une branche régulière dans le demi-plan supérieur pour laquelle $-|\alpha|\pi < \arg(a-iz)^{\alpha} < |\alpha|\pi$);

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -2\sqrt{2}\pi \operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\sqrt{z+ai}$

(ici, $a>0$, tandis que, pour $\sqrt{z+ai}$, on choisit dans le demi-plan supérieur une branche pour laquelle $-\pi/2<\arg\sqrt{z+ai}<\pi/2$) ;

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\pi\sqrt{2}\operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s}\frac{R(z)}{\sqrt{z+ai}}$

(ici, $a>0$, tandis que, pour $\sqrt{z+ai}$, on choisit dans le demi-plan supérieur une branche pour laquelle $\operatorname{Re}\sqrt{z+ai}>0$).

29.13. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de e^{iz} continue et réelle pour les valeurs réelles de z. Supposons en outre que la fonction $f(z)$ n'ait pas de pôles sur l'axe imaginaire et notons $a_1, \ldots, a_n$ ses pôles situés dans la demi-bande $0<\operatorname{Re} z<2\pi$, $\operatorname{Im} z>0$. Démontrer les formules suivantes :

1. $\int\limits_{0}^{2\pi} f(\varphi)\ln\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi =$

$$=2\pi \operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\frac{f(-i\ln\zeta)}{\zeta}\ln\frac{1+\zeta}{2} - 2\pi\operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} f(z)\ln\frac{1+e^{iz}}{2}$$

(ici, pour $\ln\frac{1+\zeta}{2}$, on choisit n'importe quelle branche régulière dans le disque $|\zeta|<1$; les déterminations de $\ln\frac{1+e^{iz}}{2}$ sont obtenues en effectuant le remplacement $\zeta=e^{iz}$) ;

2. $\int\limits_{0}^{2\pi} f(\varphi)\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|^{\alpha}d\varphi =$

$$=\frac{2\pi}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\frac{f(-i\ln\zeta)}{\zeta}\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\alpha} - \frac{2\pi}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} f(z)\left(\frac{1+e^{iz}}{2}\right)^{\alpha}$$

(ici, $\alpha>-1$, tandis que, pour $\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\alpha}$, on choisit dans le disque $|\zeta|<1$ une branche positive pour $-1<\zeta<1$; les déterminations de $\left(\frac{1+e^{iz}}{2}\right)^{\alpha}$ sont obtenues en effectuant le remplacement $\zeta=e^{iz}$) ;

3. $\int\limits_{0}^{2\pi} f(\varphi)\ln(1+2a\cos\varphi+a^2)d\varphi =$

$$=4\pi\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\frac{f(-i\ln\zeta)}{\zeta}\ln(a+\zeta) - 4\pi\operatorname{Im}\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s} f(z)\ln(a+e^{iz})$$

(ici, $a>1$, tandis que, pour $\ln(a+\zeta)$, on choisit n'importe quelle branche

régulière dans le disque $|\zeta|<1$; les déterminations de $\ln(a+e^{iz})$ sont obtenues en remplaçant ζ par e^{iz}).

29.14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{|x-1|}}{x^2+1}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|x^2-1|}{x^2+1}\,dx.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(x^4+2x^2+2)}{x^2+4}\,dx.$ 4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}\,\frac{dx}{x^2+1}.$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{|x-1|}}.$ 6. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2}\,dx.$

7. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\frac{dx}{1+x^2}.$ 8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,\frac{dx}{1+x^2}.$

9. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}(\operatorname{arctg}x)^2\,\frac{dx}{x^2}.$ 10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2-4x+5}\ln(x^2+1)\,dx.$

11. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}}{x(x^2+1)}\,dx.$

12. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\left(\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}+\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}-2\right)\frac{dx}{x^2}.$

13. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}-\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

14. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\sqrt{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+x^2-ab}\,\frac{dx}{(x^2+1)^2},\quad a>0,\ b>0.$

15. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}{a+\cos\varphi}\,d\varphi,\quad a>1.$ 16. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|}{a+\cos\varphi}\,d\varphi,\quad a>1.$

17. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ln(1-2a\cos\varphi+a^2)}{b+\cos\varphi}\,d\varphi,\quad a>1,\ b>1.$

18. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi}{a+\cos\varphi}\right)\frac{d\varphi}{b+\sin\varphi},\quad a>1,\ b>1.$

* * *

Si la fonction sous le signe d'intégration présente une symétrie quelconque, on arrive souvent à réduire les calculs. Parfois, l'utilisation de la symétrie permet par surcroît d'obtenir certaines formules nouvelles.

29.15. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi},$$

où m et n $(m<n)$ sont des entiers non négatifs, en considérant l'intégrale de la fonction $z^{2m}(1+z^{2n})^{-1}$ le long de la frontière de l'angle $0<\arg z<\pi/n$.

29.16. Soit $R(z)$ une fonction paire rationnelle n'ayant pas de pôles sur l'axe réel ni au point $z=i$, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$. En supposant que l'intégrale converge, démontrer la formule

$$\int_0^\infty \frac{R(x)\ln x}{\ln^2 x+\frac{\pi^2}{4}}\,dx = \pi i \sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} \frac{R(z)}{\ln z-\frac{\pi i}{2}} - \pi R(i)$$

(ici, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0<\arg z<\pi$).

29.17. Soit $R(z)$ une fonction paire rationnelle n'ayant pas de pôles pour $z>1$, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction. En supposant que l'intégrale converge, démontrer la formule

$$\int_1^\infty R(x)\ln(x+\sqrt{x^2-1})dx = -\frac{\pi}{2}\sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)\arcsin z$$

(pour $\arcsin z$ on prend une branche égale à zéro, pour $z=0$, et régulière dans le plan muni de coupures suivant les demi-droites $(-\infty, -1)$ et $(1, +\infty)$.

29.18. Soit $R(z)$ une fonction impaire rationnelle n'ayant pas de pôles sur l'axe réel ni au point $z=i$, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$. En supposant que l'intégrale converge, démontrer la formule

$$\int_0^\infty \frac{R(x)\,dx}{\ln^2 x+\frac{\pi^2}{4}} = -2\sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} \frac{R(z)}{\ln z-\frac{\pi i}{2}} + 2iR(i)$$

(ici, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0<\arg z<\pi$).

29.19. Soient $a>0$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ et $R(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points $a_1, \ldots, a_n$ en dehors du demi-axe réel positif. Démontrer la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax^\alpha \cos \pi\alpha} \sin(ax^\alpha \sin \pi\alpha)R(x)dx = -\pi \sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} R(z)e^{-a(-z)^\alpha}$$

(ici, $-\pi\alpha<\arg(-z)^\alpha<\pi\alpha$).

29.20. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(4x^2+\pi^2)\operatorname{sh} x}$. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\,dx}{(4x^2+\pi^2)\operatorname{ch} x}$.

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 x\,dx}{(4x^2+\pi^2)\operatorname{ch}^2 x}$. 4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(4x^2+9\pi^2)\operatorname{sh} x}$.

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)(4\ln^2 x+9\pi^2)}$. 6. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(x^2-1)(\ln^2 x+\pi^2)}\,dx$.

7. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2}\,dx$. 8. $\displaystyle\int_1^{\infty} \ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\,\frac{dx}{x^2+1}$.

9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+a^2)(4\ln^2 x+\pi^2)}$, $a>0$. 10. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x^2+a^2}\,dx$, $a>0$.

11. $\displaystyle\int_a^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{a}{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$. 12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-e^{2a}}\right)}{\operatorname{ch} x}\,dx$.

13. $\displaystyle\int_a^{\infty} \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\,\frac{dx}{x^2-a^2}$, $a>0$. 14. $\displaystyle\int_a^{\infty} \ln\frac{x+a}{x-a}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$.

15. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a\sqrt[4]{x}}\sin\left(a\sqrt[4]{x}\right)\frac{dx}{x(x+b)}$, $a>0$, $b>0$.

16. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{x^3\,dx}{x^4+a^4}$, $a>0$. 17. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,\frac{x\,dx}{x^4+a^4}$, $a>0$.

RÉPONSES

29.04.

$$I_1=\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s}\left\{R(z)\left[-\frac{\ln^2 z}{2}+\pi i\ln z\right]\right\};$$

$$I_2=\sum_{s=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_s}\left\{R(z)\left(-\frac{1}{3}\ln^3 z+\pi i\ln^2 z+\frac{2}{3}\pi^2\ln z\right)\right\}.$$

29.05. Au second membre on ajoute le terme

$$-\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=b} R(z)\cdot[\ln^m b+(\ln b+2\pi i)^m].$$

29.11.

1. 0. 2. $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$. 3. $-\dfrac{\pi}{4}$. 4. $-\dfrac{\pi^2}{16}$. 5. 0. 6. $\dfrac{\pi}{4}$. 7. $\dfrac{\pi^2}{4}$. 8. $\dfrac{2\pi^2}{3}$.

9. $\dfrac{\pi^3}{16}$. 10. $10\pi^2$. 11. $\dfrac{\pi^2}{2}$. 12. $\dfrac{\pi^2}{8}$. 13. $\dfrac{\pi^2}{6}$. 14. $\dfrac{\pi^2}{8}(20+79\pi^2)$.

15. $\frac{\pi^3}{8}$. 16. $\frac{\pi}{4}\ln 2$. 17. $\frac{\ln 2}{3}(\ln^2 2+\pi^2)$. 18. $\frac{4\pi^2}{3}$. 19. $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$. 20. 1.

21. $\frac{1}{\pi}\left(\frac{26}{15}-\frac{\pi}{2}\right)$. 22. $\frac{1}{2}$. 23. $\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}$. 24. $\frac{1}{12}$. 25. $\frac{\lambda\ln a}{a\sin\lambda}$.

26. $\frac{\pi}{2a}\left((\ln a)^2+\frac{\pi^2}{4}\right)$. 27. $\frac{4}{3}(a^2+\pi^2)\frac{a}{\operatorname{sh} a}$. 28. $\frac{\pi^2}{3\operatorname{ch}^2 a}$.

29. $\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{2a\ln a}+\frac{\ln a}{2a(\ln^2 a+\pi^2)}$. 30. $\frac{1}{a\ln^2 a}-\frac{1}{(a-1)^2}$.

31. $\frac{1}{a\ln^2 a}-\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{m}\frac{\ln^2 a-4k^2\pi^2}{(\ln^2 a+4k^2\pi^2)^2}$. 32. $\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\right)$.

29.14.

1. $2^{1/6}3^{-1/2}\pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 2. $\pi\ln 2$. 3. $\pi\ln\left(4+\sqrt{2}+4\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$. 4. π.

5. $\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$. 6. $\frac{\pi}{4}\ln 5-\frac{\pi}{5}$. 7. $\pi(1-\ln 2)$. 8. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. 9. $\pi\ln 2$.

10. $\frac{3}{4}\pi^2\ln 2$. 11. $\frac{2\pi}{a}\ln(\sqrt{2}+1)$. 12. $\frac{\pi}{2}$. 13. π. 14. $\frac{\pi}{4}\sqrt{(a+1)(b+1)}$.

15. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ln\frac{1+a-\sqrt{a^2-1}}{2}$. 16. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ln\frac{1+a-\sqrt{a^2-1}}{1-a+\sqrt{a^2-1}}$.

17. $\frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}}\ln(a+b-\sqrt{b^2-1})$. 18. $\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}}\operatorname{arctg}\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a}$.

29.20.

1. $\frac{\pi-2}{8}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{6}$. 4. $\frac{10-3\pi}{24}$. 5. 0. 6. $\frac{1}{2}$. 7. $\frac{\pi}{2}$.

8. $\pi\ln(1+\sqrt{2})$. 9. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{2a\ln a}\right)$. 10. $\frac{\pi}{a}\ln(1+\sqrt{2})$.

11. $\frac{\pi}{4}\ln a+\pi\ln(1+\sqrt{2})$. 12. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{\sqrt{e^{2a}+1}+1}{\sqrt{e^{2a}+1}-1}$. 13. $\frac{\pi^2}{2a}$. 14. $\frac{\pi^2}{2a}$.

15. $\frac{\pi}{b}\exp(-ab^{-1/4}\sqrt{2})$. 16. $\frac{\pi}{4a^4}e^{-a\sqrt{2}}$. 17. $\frac{\pi}{4}e^{-a\sqrt{2}}$.

§ 30. Sommation des séries

30.01. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points $a_1, \ldots, a_m$ parmi lesquels il n'y a pas de nombres entiers, et supposons que $f(z)=O(z^{-2})$ $(z\to\infty)$. Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}[f(z)\operatorname{ctg}\pi z].$$

Indication. Calculer au moyen des résidus l'intégrale

$$\int\limits_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz,$$

où N est un entier assez grand, ensuite passer à la limite pour $N\to+\infty$.

30.02. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan fini des z, sauf en un nombre fini de pôles $a_1, a_2, \dots, a_m$ parmi lesquels il n'y a pas de nombres entiers. Notons G_ϱ le plan entier privé des disques $|z-a_k|\leq\varrho$, $k=1, 2, \dots, m$. Supposons que la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$|f(z)|\leq e^{a|\operatorname{Im}z|}\varepsilon(|z|),\ 0\leq a<\pi\ (z\in G_\varrho),$$

où $\varepsilon(t)\to0$ pour $t\to+\infty$. Montrer que sous ces conditions la formule ci-dessous est vraie :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\frac{f(z)}{\sin\pi z}.$$

Indication. Calculer au moyen des résidus l'intégrale

$$\int\limits_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\frac{dz}{\sin\pi z},$$

où N est un entier assez grand, ensuite passer à la limite pour $N\to+\infty$. En estimant l'intégrale, utiliser le lemme de Jordan (voir le problème 5.39).

30.03. Trouver les sommes des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-\zeta)^2}$. 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\zeta^2}$. 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+\zeta^2)^2}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-\zeta^4}$. 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+\zeta^2}$. 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n^2+\zeta^2)^2}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. 9. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{i\alpha n}}{n^2+\zeta^2}$, $-\pi<\alpha<\pi$.

10. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{i\alpha n}}{(n-\zeta)^2}$, $-\pi<\alpha<\pi$.

11. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha n}}{(n-\zeta)^2}$, $0<\alpha<2\pi$. 12. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha n}}{(n-\zeta)^2}$, $-2\pi<\alpha<0$.

13. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\alpha(n-\zeta)}{n-\zeta}$, $-\pi<\alpha<\pi$.

14. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha(n-\zeta)}{(n-\zeta)^2}$, $0\leq\alpha<\pi$.

30.04. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de $\cos z$ et $\sin z$ n'ayant de pôles ni sur l'axe réel, ni sur l'axe imaginaire et tendant vers zéro pour $\operatorname{Im}z\to\pm\infty$. Notons $a_1, a_2, \dots, a_m$ les pôles de la fonction $f(z)$ situés dans la bande $0<\operatorname{Re}z<2\pi$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=-\frac{n}{2}\sum_{s=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_s}\left[f(z)\operatorname{ctg}\frac{nz}{2}\right].$$

Indication. Calculer au moyen des résidus l'intégrale de la fonction $f(z)\operatorname{ctg}\frac{nz}{2}$ prise le long de la frontière de la bande $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$.

30.05. Trouver les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-2r\cos\frac{2k\pi}{n}+r^2}$, $0<r<1$. 2. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a^2+\cos^2\frac{k\pi}{n}}$, $a>0$.

3. $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}$. 4. $\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n}$. 5. $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^4\frac{k\pi}{n}}$. 6. $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos^2\frac{k\pi}{n}}{\sin^4\frac{k\pi}{n}}$.

30.06. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{im\frac{2k\pi}{n}} = \begin{cases} 0 & (m=\pm 1, \pm 2, \ldots), \\ n & (m=0). \end{cases}$$

30.07. Trouver les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{n}}{a^2+\cos^2\frac{k\pi}{n}}$, $a>0$. 2. $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos^4\frac{k\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}$.

3. $\sum_{k=0}^{n-1}\cos^{2n}\frac{k\pi}{n}$. 4. $\sum_{k=0}^{n-1}\cos^{2p}\frac{k\pi}{n}\sin^{2q}\frac{k\pi}{n}$

(p et q sont des entiers positifs).

5. $\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)$, $0<x<\frac{\pi}{4}$. 6. $\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)$, $0<x<\frac{\pi}{n}$.

30.08. Soit $F(z)$ une fonction méromorphe jouissant des propriétés suivantes :

a) La série

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-\lambda_k}$$

converge uniformément en chaque partie bornée du plan.

b) Il y a des nombres positifs $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ tels que les disques $|z-\lambda_k| \leq \varrho_k$, $k=1, 2, \ldots$, n'aient pas de points deux à deux communs et que

$$|F(z)| = o(|z|^m) \quad (z\to\infty,\ z\in G)$$

(par le symbole G on désigne le domaine obtenu en enlevant du plan complexe tous les disques $|z-\lambda_k| \leq \varrho_k$, $k=1, 2, \ldots$).

Montrer que pour toute fonction $R(z)$ ayant des pôles aux points a_1, $a_2, \ldots, a_s$ (ces pôles sont distincts de ceux de la fonetion $F(z)$) et vérifiant la condition

$$|R(z)| = o(|z|^{-m-1}) \quad (z\to\infty),$$

la formule ci-dessous est vraie :

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kR(\lambda_k) = -\sum_{\varrho=1}^{s}\operatorname*{Res}_{z=a_\varrho}\{R(z)F(z)\}.$$

30.09. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ toutes les racines différentes de zéro de l'équation $\operatorname{tg} z = z$. Trouver les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(\varrho-\lambda_k)^{-2}$. 2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2+\zeta^2}$.

30.10. Trouver les sommes suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\zeta)}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\zeta)(n+2\zeta)}$.

Indication. Utiliser la formule

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n}\right)$$

(voir le problème 27.18).

30.11. Soit $\varphi(t)$ une fonction représentable par la série $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n$ qui converge sur le segment [0, 1]. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{z+n}=\int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)dt \qquad (\operatorname{Re} z>0).$$

30.12. Démontrer la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\alpha}\frac{(-1)^n}{z+n}=\frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(z+\alpha+1)},\ \operatorname{Re}\alpha>-1,\ z\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

Ici, comme d'habitude,

$$C_n^{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\ (n=1,\ 2,\ \ldots),\ C_0^{\alpha}=1.$$

30.13. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle ayant des pôles aux points a_1, $a_2, \ldots, a_m$ ($a_k\neq 0, 1, 2, \ldots$) et supposons que $f(z)=O(z^p)$ ($z\to\infty$). Montrer que, pour $\operatorname{Re}\alpha>p$, l'égalité ci-dessous est valable :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}f(n)=-\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\left[f(z)\,\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(\alpha+1-z)}\right].$$

* * *

Dans certains cas, il est utile d'exprimer la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)$ par une intégrale. Parfois, il est possible de calculer l'intégrale obtenue au moyen des résidus.

30.14. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans tout le plan, sauf en un nombre fini de pôles situés aux points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ en dehors de l'axe réel, satisfaisant, pour des $|z|$ assez grands, à l'inégalité

$$|f(z)|\leq e^{\alpha|\operatorname{Im} z|}\cdot\varphi(\operatorname{Re} z),$$

où $-2\pi < \alpha < 2\pi$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx < \infty$. Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= -\pi \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i) + \pi \sum_{\operatorname{Im} a_k < 0} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i).$$

30.15. Trouver les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{in\alpha}}{n^2+\zeta^2}$, $-2\pi < \alpha < 2\pi$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{(n^2+a^2)(n^2+b^2)}$, $-2\pi < \alpha < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin n\alpha}{(n^2+a^2)(n^2+b^2)}$, $-2\pi < \alpha < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \dfrac{\cos n\alpha \cdot \sin n\beta}{(n^2+a^2)}$, $-\pi < \alpha < \pi$, $-\pi < \beta < \pi$, $a > 0$.

Remarque. La formule du problème 30.14 n'est applicable qu'à une classe très restreinte de fonctions. Le domaine d'application de la formule du problème suivant est beaucoup plus vaste, mais au lieu d'une seule intégrale elle en contient trois.

30.16. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ vérifiant l'inégalité

$$|f(x+iy)| < \varphi(x)e^{a|y|} \quad (x > 0, \ -\infty < y < \infty),$$

où $-2\pi < a < 2\pi$, tandis que l'intégrale $\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ converge. Montrer que, pour tout $0 < \theta < 1$, la formule d'Abel-Plan

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int\limits_{\theta}^{\infty} f(x)\, dx = -\frac{1}{2i} \int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i)dz + \frac{1}{2i} \int\limits_{\theta}^{\theta-i\infty} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i)dz$$

reste vraie.

La formule suivante contient encore plus d'intégrales, mais elles sont un peu plus simples.

30.17. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la bande $|\operatorname{Im} z| \leq \eta$ vérifiant la condition $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \max\limits_{-\eta \leq y \leq \eta} |f(x+iy)|dx < \infty$. Montrer que la formule de sommation de Poisson donnée ci-dessous est vraie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2n\pi ix}dx.$$

Indication. Utiliser les développements en séries de la fonction $\operatorname{ctg} \pi z$:

$$\operatorname{ctg} \pi z = -i - 2i \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k\pi i z} \qquad (\operatorname{Im} z > 0),$$

$$\operatorname{ctg} \pi z = i + 2i \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k\pi i z} \qquad (\operatorname{Im} z < 0).$$

30.18. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la demi-bande $|\operatorname{Im} z| \leq \eta$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, satisfaisant à la condition

$$\int_0^{\infty} \max_{-\eta \leq y \leq \eta} |f(x+iy)| dx < \infty.$$

Montrer que

$$\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) e^{2k\pi i x} dx.$$

Indication. Considérer l'intégrale de la fonction $f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ le long de la frontière du domaine défini par les inégalités $-\eta < \operatorname{Im} z < \eta$, $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| > \varrho$. Sur les segments rectilignes de la frontière de ce domaine utiliser les développements de la fonction $\operatorname{ctg} \pi z$ donnés comme indication au problème 30.17, ensuite poser $\varrho \to 0$.

30.19. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans l'angle $|\arg z| \leq \delta$, $\delta > 0$, satisfaisant à la condition

$$|f(z)| e^{-a|\operatorname{Im} z|} \to 0 \qquad (z \to \infty, \ |\arg z| \leq \delta),$$

avec $a < 2\pi$. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{2k\pi i x} dx, \qquad k = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

convergent et que

$$\lim_{N \to +\infty} \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_0^{N} f(x) dx \right\} = \sum_{k \neq 0} \int_0^{\infty} f(x) e^{2k\pi i x} dx.$$

30.20. Déduire de la formule de Poisson la formule d'Abel-Plan.

Nota. Dans les problèmes 30.18 et 30.17 l'hypothèse concernant la régularité de la fonction n'est pas essentielle, car la formule de Poisson est vraie pour toute fonction absolument intégrable sur tout l'axe réel. Dans le problème 30.19, la régularité de la fonction est essentielle.

Les formules de sommation de Poisson et d'Abel-Plan sont très commodes pour le prolongement analytique des fonctions, données par des séries entières, à travers les frontières des disques de convergence de ces séries.

30.21. Montrer que les séries entières ci-dessous peuvent être prolongées analytiquement dans tout le plan complexe muni d'une coupure suivant la

demi-droite $(1, +\infty)$:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)^{\alpha}z^n$. 2. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{n^{\alpha}}z^n$, $0 \leq \alpha < 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}[\ln (n+1)]^{\alpha}z^n$. 4. $\sum_{n=2}^{\infty}n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}z^n$.
5. $\sum_{n=2}^{\infty}[\ln (1+\ln n)]^{\alpha}z^n$. 6. $\sum_{n=2}^{\infty}e^{(\ln n)^{\alpha}}z^n$.

30.22. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq a$ (elle est définie pour $z=0, 1, 2, \ldots$) satisfaisant à la condition

$$\ln |f(z)| < |z| \cdot \varepsilon(|z|) \quad (z \to \infty,\ \operatorname{Re} z \geq a),\ \varepsilon(t) \to 0\ (t \to +\infty).$$

Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$ converge dans le disque $|z| < 1$ et qu'elle peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe muni d'une coupure suivant la demi-droite $(1, +\infty)$.

30.23. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans l'angle $|\arg(z-a)| \leq \delta$, $a \geq 0$, $0 < \delta < \pi/2$ (elle est définie pour $z=0, 1, 2, \ldots$) satisfaisant à la condition

$$\ln |f(z)| < |z| \cdot \varepsilon(|z|)\ (z \to \infty,\ |\arg(z-a)| \leq \delta),\ \varepsilon(t) \to 0\ (t \to +\infty).$$

Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$ converge dans le disque $|z| < 1$ ét qu'elle peut être prolongée analytiquement dans le domaine

$$|z| < e^{|\arg z| \operatorname{tg} \delta} \quad (|\arg z| \leq \pi).$$

30.24. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} z^n$ $(|z| < 1)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin contenu dans le disque $|z-1| < 1$ et ne passant pas par le point $z=1$.

30.25. La fonction $\zeta(s)$ (fonction zêta de Riemann) est définie par l'égalité $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ $(\operatorname{Re} s > 1)$. Montrer que la fonction $\zeta(s)$ se prolonge analytiquement dans tout le plan complexe privé du point $s=1$, en lequel elle a un pôle, et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \cdot \zeta(1-s)$.

Indication. Appliquer le résultat du problème 30.18 à la fonction $f(z) = z^{-s} e^{\pi i z}$ et utiliser l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

30.26. Soit $\psi(x)$ une fonction définie par l'égalité

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \quad (\operatorname{Re} x > 0).$$

Montrer que la fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

* * *

Certaines séries entières peuvent être sommées à l'aide de la méthode qui constitue le contenu du problème suivant.

30.27. Soient $p(\zeta)$ et $\varphi(\zeta)$ deux fonctions régulières dans un domaine simplement connexe D et supposons que la fonction $\varphi(\zeta)$ ne s'annule pas dans ce domaine. Définissons les fonctions $Q_n(\zeta)$ par l'égalité

$$Q_n(\zeta)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\{p(\zeta)[\varphi(\zeta)]^n\},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Montrer que, pour chaque partie fermée B du domaine D, on peut citer un $\delta=\delta(B)$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(\zeta)z^n$ converge uniformément pour $\zeta\in B$, $|z|<\delta(B)$ et que sa somme soit égale à $\frac{p[w(z,\zeta)]}{1-z\varphi'[w(z,\zeta)]}$, où $w(z,\zeta)$ est la solution de l'équation

$$z=\frac{w-\zeta}{\varphi(w)},\ w\,(0,\zeta)=\zeta.$$

Indication. Mettre les fonctions $Q_n(\zeta)$ sous la forme

$$Q_n(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-\zeta|=\varrho}p(w)[\varphi(w)]^n(w-\zeta)^{-n-1}dw.$$

30.28. Trouver les sommes des séries suivantes:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^ne^{-nz}$. 2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\alpha)^n}{n!}z^ne^{-nz}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{\alpha n}z^n(1+z)^{-\alpha n}$.

30.29. Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont définis par l'égalité

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ \ -1<x<1.$$

Trouver la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n$ $(|z|<1)$.

30.30. Les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ sont définis par l'égalité

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\ \ -\infty<x<\infty.$$

Trouver la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n$.

30.31. Les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ sont définis par l'égalité

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),\qquad 0<x<\infty.$$

Trouver la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)z^n$.

RÉPONSES

30.03.

1. $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi\zeta}$. 2. $\dfrac{\pi^2}{6}$. 3. $\dfrac{1}{2\zeta^2}(\pi\zeta \operatorname{cth} \pi\zeta - 1)$. 4. $\dfrac{1}{4\zeta^4}\left(\dfrac{\pi^2\zeta^2}{\operatorname{sh}^2 \pi\zeta} + \pi\zeta \operatorname{cth} \pi\zeta - 2\right)$.

5. $\dfrac{1}{2\zeta^4} - \dfrac{\pi}{4\zeta^3}(\operatorname{ctg} \pi\zeta + \operatorname{cth} \pi\zeta)$. 6. $\dfrac{1}{2\zeta^2}\left(\dfrac{\pi\zeta}{\operatorname{sh} \pi\zeta} - 1\right)$.

7. $\dfrac{1}{4\zeta^4}\left(\dfrac{\pi^2\zeta^2 \operatorname{ch} \pi\zeta}{\operatorname{sh}^2 \pi\zeta} + \dfrac{\pi\zeta}{\operatorname{sh} \pi\zeta} - 2\right)$. 8. $\dfrac{7\pi^4}{720}$. 9. $\dfrac{\pi \operatorname{ch} \alpha\zeta}{\zeta \operatorname{sh} \pi\zeta}$.

10. $\pi \dfrac{e^{i\alpha\zeta}}{\sin \pi\zeta}(\pi \operatorname{ctg} \pi\zeta - i\alpha)$. 11. $\pi \dfrac{e^{i(\alpha-\pi)\zeta}}{\sin \pi\zeta}(\pi \operatorname{ctg} \pi\zeta - i\alpha + \pi i)$.

12. $\pi \dfrac{e^{i(\alpha+\pi)\zeta}}{\sin \pi\zeta}(\pi \operatorname{ctg} \pi\zeta - i\alpha - \pi i)$. 13. 0. 14. $\pi\alpha$.

30.05.

1. $\dfrac{n(1+r^n)}{(1-r^2)(1-r^n)}$. 2. $\dfrac{n}{a\sqrt{1+a^2}} \dfrac{(a+\sqrt{a^2+1})^{2n}+(-1)^n}{(a+\sqrt{a^2+1})^{2n}-(-1)^n}$. 3. $\dfrac{n^2-1}{3}$.

4. $\dfrac{n^2-4}{6}$. 5. $\dfrac{n^4+10n^2-11}{45}$. 6. $\dfrac{n^4-5n^2+4}{45}$.

30.07.

1. $n\left\{\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a} \cdot \dfrac{(a+\sqrt{a^2+1})^{2n}+(-1)^n}{(a+\sqrt{a^2+1})^{2n}-(-1)^n} - 1\right\}$. 2. $\dfrac{2n^2-9n+10}{6}$.

3. $n2^{-2n}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. 4. $n2^{-2(p+q)}\dfrac{(2p)!(2q)!}{p!q!(p+q)!}$.

5. $n \operatorname{ctg} x$. 6. $\dfrac{2n^2}{\sin^2 x}$.

30.09.

1. $\dfrac{\zeta^2 - \sin^2\zeta}{(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta)^2} - \dfrac{3}{\zeta^2}$. 2. $\dfrac{\operatorname{sh}\zeta}{\zeta \operatorname{ch}\zeta - \operatorname{sh}\zeta} - \dfrac{3}{\zeta^2}$.

30.10.

1. $-\dfrac{1}{2}\Gamma'''(1) + \dfrac{3}{2}\Gamma'(1)\Gamma''(1) - [\Gamma'(1)]^3$.

2. $\dfrac{1}{\zeta}\left(\dfrac{\Gamma'(\zeta+1)}{\Gamma(\zeta+1)} - \Gamma'(1)\right)$.

3. $\dfrac{1}{2\zeta^2}\left[2\,\dfrac{\Gamma'(\zeta+1)}{\Gamma(\zeta+1)} - \dfrac{\Gamma'(2\zeta+1)}{\Gamma(2\zeta+1)} - \Gamma'(1)\right]$.

30.15.

1. $\dfrac{\pi}{\zeta}\left(e^{-\zeta|\alpha|} + \dfrac{2 \operatorname{ch} \alpha\zeta}{e^{2\pi\zeta}-1}\right)$.

2. $\dfrac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left\{\dfrac{1}{a}\left(e^{-a|\alpha|} + \dfrac{2 \operatorname{ch} \alpha a}{e^{2\pi a}-1}\right) - \dfrac{1}{b}\left(e^{-b|\alpha|} + \dfrac{2 \operatorname{ch} \alpha b}{e^{2\pi b}-1}\right)\right\} - \dfrac{1}{2a^2b^2}$.

3. $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left\{e^{-a|\alpha|}+\frac{2\,\mathrm{sh}\,a|\alpha|}{e^{2\pi a}-1}-e^{-b|\alpha|}-\frac{2\,\mathrm{sh}\,b|\alpha|}{e^{2\pi b}-1}\right\}$.

4. $\frac{\pi}{8}\left\{e^{-a|\alpha+\beta|}-e^{-a|\alpha-\beta|}+2\,\frac{\mathrm{sh}\,(a|\alpha+\beta|)-\mathrm{sh}\,(a|\alpha-\beta|)}{e^{2\pi a}-1}\right\}$.

30.28.

1. $\frac{1}{1-z}$. 2. $\frac{e^{\alpha z}}{1-z}$. 3. $\frac{1+z}{1+(1-\alpha)z}$.

30.29.

$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$.

30.30.

e^{-z^2+2xz}.

30.31.

$\frac{1}{1-z}\,e^{-\frac{xz}{1-z}}$.

§ 31. Intégrales réductibles à la fonction gamma

La *fonction gamma* d'Euler $\Gamma(z)$ est définie par l'égalité

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (\mathrm{Re}\, z>0). \tag{1}$$

En intégrant par parties cette égalité, on obtient facilement l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{2}$$

A l'aide de l'équation fonctionnelle ci-dessus, la fonction gamma peut être prolongée analytiquement sans aucune difficulté depuis le demi-plan $\mathrm{Re}\, z>0$, où converge l'intégrale (1), dans tout le plan complexe privé des points $z=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, en lesquels $\Gamma(z)$ a des pôles simples avec des résidus $\frac{(-1)^n}{n!}$.

31.01. Démontrer les formules suivantes:

1. $\Gamma(n+z+1)=(n+z)(n+z-1)\ldots z\Gamma(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

2. $\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}$.

Outre la fonction gamma, on examine souvent la *fonction bêta* d'Euler $\mathrm{B}(z, \zeta)$ qui est définie par l'égalité

$$\mathrm{B}(z, \zeta)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}dt \quad (\mathrm{Re}\, z>0,\ \mathrm{Re}\, \zeta>0). \tag{3}$$

En fait, le symbole $\mathrm{B}(z, \zeta)$ n'est qu'une abréviation d'écriture, car

$$\mathrm{B}(z, \zeta)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \tag{4}$$

(voir le problème 13.37).

31.02. Démontrer les formules suivantes:

1. $\mathrm{B}(z, \zeta)=\mathrm{B}(\zeta, z)$. 2. $\mathrm{B}(m, n)=\frac{1}{m+n-1} C_n^m$, $m, n=1, 2, \ldots$, $m<n$.

3. $\mathrm{B}(z+1, \zeta)=\frac{z}{z+\zeta} \mathrm{B}(z, \zeta)$.

31.03. Démontrer la formule $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Indication. Calculer l'intégrale pour $B(z, 1-z)$ au moyen de l'intégration de contour (voir le problème 28.25 (18)) et comparer le résultat obtenu avec le résultat donné par la formule (4).

31.04. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

31.05. Démontrer les formules suivantes :

1. $\int\limits_0^\infty x^z e^{-x^2} dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \quad (\mathrm{Re}\, z>-1)$.

2. $\int\limits_0^\infty x^z e^{-x^p} dx=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right) \quad (p>0,\ \mathrm{Re}\, z>-1)$.

3. $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt=\Gamma(z) \quad (\mathrm{Re}\, z>0)$.

4. $\int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-\zeta t} dt=\zeta^{-z}\Gamma(z) \quad \left(\mathrm{Re}\, z>0,\ |\arg \zeta|<\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $\int\limits_0^\infty t^{z-1} \cos t\, dt=\Gamma(z) \cos\frac{\pi z}{2} \quad (0<\mathrm{Re}\, z<1)$.

6. $\int\limits_0^\infty t^{z-1} \sin t\, dt=\begin{cases} \Gamma(z) \sin\frac{\pi z}{2}, & z\neq 0\ (-1<\mathrm{Re}\, z<1), \\ \frac{\pi}{2}, & z=0. \end{cases}$

7. $\int\limits_0^\infty \sin x^p\, dx=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \sin\frac{\pi}{2p} \quad (p>1)$.

8. $\int\limits_0^\infty \cos x^p\, dx=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos\frac{\pi}{2p} \quad (p>1)$.

9. $\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p} \quad \left(p>\frac{1}{2}\right).$

10. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x^p}{x^{2p}}\,dx = \frac{p}{(p-1)(2p-1)}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p} \quad \left(p>\frac{1}{2}\right).$

11. $\int_0^\infty e^{-x^p\cos p\lambda}\cos(x^p\sin p\lambda)dx = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\lambda \quad \left(p>0,\ -\frac{\pi}{2p}<\lambda<\frac{\pi}{2p}\right).$

12. $\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x^p\cos\lambda}\sin(x^p\sin\lambda)dx = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\sin\frac{\lambda z}{p}$

$$\left(\operatorname{Re} z>0,\ p>1,\ -\frac{\pi}{2}<\lambda<\frac{\pi}{2}\right).$$

31.06. Démontrer les formules suivantes :

1. $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right) \quad (\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0).$

2. $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t^p)^{\beta-1}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p},\beta\right) \quad (p>0,\ \operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0).$

3. $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \mathrm{B}(\alpha,\beta) \quad (\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0).$

4. $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t^2)^\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\beta-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \left(\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)>0\right).$

5. $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t^p)^\beta} = \frac{1}{p}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p},\beta-\frac{\alpha}{p}\right) \quad \left(p>0,\ \operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\left(\beta-\frac{\alpha}{p}\right)>0\right).$

6. $\int_{-1}^1 (1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = 2^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha,\beta) \quad (\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0).$

31.07. Soient $a>0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{(t+a)^{\alpha+\beta}}\,dt = a^{-\beta}(a+1)^{-\alpha}\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

Indication. Effectuer un remplacement homographique de la variable d'intégration, remplacement qui transforme respectivement les points $0, 1, -a$ en $0, 1, \infty$.

31.08. Montrer que la formule du problème 31.07 reste vraie également dans le cas où le point a est contenu dans le plan des z muni d'une coupure

suivant le demi-axe réel négatif, tandis que les expressions $(a+1)^{-\alpha}$ et $a^{-\beta}$ ont le sens suivant:

$$(a+1)^{-\alpha}=e^{-\alpha\ln(a+1)}, \qquad -\pi<\operatorname{Im}\ln(a+1)<\pi;$$
$$a^{-\beta}=e^{-\beta\ln a}, \qquad -\pi<\operatorname{Im}\ln a<\pi.$$

31.09. Démontrer les formules suivantes:

1. $$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}+\beta}}\,dt=2^{-\frac{\alpha}{2}-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \beta\right) \quad (\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0).$$

2. $$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t^p)^{\beta-1}}{(1+t^p)^{\frac{\alpha}{p}+\beta}}\,dt=\frac{1}{p}\,2^{-\frac{\alpha}{p}}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p},\ \beta\right)$$

(ici, $p>0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$).

3. $$\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{(t+a)^{\alpha+\beta}}\,dt=2^{\alpha+\beta-1}(a+1)^{-\alpha}(a-1)^{-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$$

(ici, $a>1$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$).

31.10. Soient $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2\alpha-1}(1-x)^{2\beta-1}}{(1+x^2)^{\alpha+\beta}}\,dx=2^{\alpha+\beta-2}\,\mathrm{B}(\alpha,\ \beta).$$

Indication. Effectuer le changement de la variable d'intégration $\xi=\frac{2x}{1+x^2}$.

31.11. Démontrer les formules suivantes:

1. $$\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{\alpha-1}\,d\varphi=\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{\alpha-1}\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{1}{2}\right) \quad (\operatorname{Re}\alpha>0).$$

2. $$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}\varphi)^{\alpha-1}\,d\varphi=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \quad (0<\operatorname{Re}\alpha<2).$$

3. Pour $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$,

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{\alpha-1}(\sin\varphi)^{\beta-1}d\varphi=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}\right).$$

4. Pour $a>0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\varphi)^{2\alpha-1}(\cos\varphi)^{2\beta-1}}{(a+\sin^2\varphi)^{\alpha+\beta}}\,d\varphi=\frac{1}{2}\,(a+1)^{-\alpha}a^{-\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\ \beta).$$

5. Pour $\operatorname{Re}\alpha| < |\operatorname{Re}\beta|$.

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x}(\operatorname{ch} x)^{-\beta}\,dx = 2^{\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\beta+\alpha}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

6. Pour $|\operatorname{Re}\alpha| < |\operatorname{Re}\beta|$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\alpha x}{(\operatorname{ch} x)^{\beta}}\,dx = 2^{\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\beta+\alpha}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

7. Pour $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 0$,

$$\int_0^{\infty} (\operatorname{sh} x)^{2\alpha-1}(\operatorname{ch} x)^{2\beta+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(\alpha,\ -\alpha-\beta).$$

31.12. Soit C un contour rectifiable arbitraire allant du point $z=-\pi/2$ au point $z=\pi/2$ tout en restant dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$. Par $(\sin z)^{\alpha}$ sur le contour C nous allons entendre la branche de cette fonction dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ qui devient égale à 1 au point $z=-\pi/2$. Montrer que, pour toutes les valeurs complexes de α, la formule ci-dessous est valable :

$$\int_C (\sin z)^{\alpha}\,dz = \frac{1+e^{\pi i\alpha}}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

31.13. Soit C un contour rectifiable arbitraire allant du point $z=-i$ au point $z=i$ tout en restant dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$. Par $z^{\alpha-1}$ et $(z^2+1)^{\beta-1}$ sur le contour C nous allons entendre les branches de ces fonctions dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ qui deviennent égales à 1 respectivement aux points $z=1$ et $z=0$. Montrer que, pour $\operatorname{Re}\beta > 0$ et pour toute valeur complexe de α, la formule ci-dessous est valable :

$$\int_C z^{\alpha-1}(z^2+1)^{\beta-1}\,dz = i\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \beta\right).$$

31.14. Montrer que :

1. Pour tout α et pour $\operatorname{Re}\beta > 0$,

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{\beta-1}\cos\alpha\varphi\,d\varphi = 2^{-\beta}\sin\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha-\beta+1}{2},\ \beta\right).$$

2. Pour tout α et pour $\operatorname{Re}\beta > -1/2$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\beta}\cos^2\alpha\varphi\,d\varphi = 2^{-2\beta-2}\cos\pi(\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(\alpha-\beta,\ 2\beta) + \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

3. Pour $\operatorname{Re}\beta<1$ et $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{(\operatorname{sh} x)^\beta}\,dx=2^{\beta-1}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 1-\beta\right).$$

4. Pour $\operatorname{Re}\beta>-1$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<0$, $\operatorname{Re}(\alpha-\beta)>0$,

$$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^\beta \operatorname{sh}\alpha x\,dx=2^{-\beta-2}\left[\mathrm{B}\left(\beta+1,\ -\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\mathrm{B}\left(\beta+1,\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right].$$

31.15. Montrer que pour $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos\varphi-\sin\varphi)^{2\alpha-1}(\cos\varphi+\sin\varphi)^{2\beta-1}\,d\varphi=2^{\alpha+\beta-2}\,\mathrm{B}\,(\alpha,\ \beta).$$

Indication. Utiliser la formule du problème 31.10.

31.16. Montrer que, pour $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, la formule ci-dessous est valable

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}\right)^{2\alpha-1}d\varphi=\frac{\pi}{2\sin\pi\alpha}.$$

31.17. Démontrer la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^t\cdot t^{-z}\,dt=\frac{1}{\Gamma(z)},$$

où C est la frontière du domaine $|t|>\varrho$, $|\arg t|<\pi-\eta$ $(0\le\eta<\pi/2)$.

Indication. Pour $\operatorname{Re} z<1$, poser $\varrho=0$, $\eta=0$, ensuite utiliser la formule $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ (voir le problème 31.03).

31.18. Notons $D_{\sigma,\varrho}$ le demi-plan $\operatorname{Re} z<\sigma$ duquel on a enlevé les disques $|z+n|<\varrho$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Montrer que, pour toutes valeurs fixées des constantes $\varrho>0$, σ et m, l'inégalité $|\Gamma(z)|\le M(1+|z|)^{-m}$ $(z\in D_{\sigma,\varrho})$ est valable, M étant une certaine constante dépendant du choix des nombres ϱ, σ et m.

Indication. A l'aide de la formule initiale (1) pour la fonction gamma, montrer que la grandeur $|\Gamma(z)|$ est limitée sur toute droite verticale $\operatorname{Re} z=$ $=\sigma>0$, ensuite utiliser l'équation fonctionnelle (2).

31.19. Montrer que

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\xi}},\quad -\infty<\xi<\infty.$$

31.20. Montrer que, pour toutes valeurs de s situées dans l'angle $|\arg s|<$ $<\pi/2$, la formule ci-dessous est valable :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\Gamma(z)s^{-z}\,dz=e^{-s}.$$

On peut obtenir beaucoup de formules en différentiant par rapport au paramètre les formules ci-dessus.

31.21. Démontrer les formules suivantes :

1. $\int_0^\infty (\ln t)^m t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma^{(m)}(z), \quad m=1, 2, \ldots \text{ (Re } z>0).$

2. $\int_0^\infty (\ln t)^m e^{-t^2} dt = 2^{-m-1}\Gamma^{(m)}\left(\frac{1}{2}\right), \quad m=1, 2, \ldots$

3. $\int_0^1 \left(\ln \ln \frac{1}{t}\right)^m dt = \Gamma^{(m)}(1), \quad m=1, 2, \ldots$

4. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \ln t \, dt = \frac{\pi}{2}\Gamma'(1).$ 5. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \ln^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}\Gamma''(1) - \frac{\pi^3}{24}.$

6. $\int_0^\infty \sin x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} + \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right).$

31.22. Montrer que :

1. $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{(1+x)^\beta} dx = \frac{1}{\Gamma(\beta)}[\Gamma'(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha) - \Gamma(\alpha)\Gamma'(\beta-\alpha)]$

(ici, $\text{Re}\,\alpha > 0$, $\text{Re}(\beta-\alpha) > 0$).

2. $\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^\alpha \ln \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma'\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\right]^2}$

(ici, $\text{Re}\,\alpha > -1$).

On peut obtenir une série d'intégrales tout à fait différentes, exprimées par la fonction gamma et ses dérivées, en utilisant la formule

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{C}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{5}$$

(voir le problème 27.17). La constante C qui figure dans la formule (5) est appelée constante d'Euler. Elle est définie par l'égalité

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

31.23. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \frac{te^{-tz}}{1-e^{-t}} dt \text{ (Re } z>0).$

2. $\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} t^{z-1} dt \text{ (Re } z>0).$

31.24. Démontrer la formule ci-dessous pour la constante d'Euler :

$$C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)e^{-t}\,dt.$$

31.25. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)dt$ (Re $z>0$).

2. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\int_0^1\left(\frac{1}{\ln t}+\frac{t^{z-1}}{1-t}\right)dt$ (Re $z>0$).

3. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\ln z-\frac{1}{2z}-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-tz}\,dt$ (Re $z>0$).

31.26. Montrer que, pour $z\to\infty$, $|\arg z|\leq\pi-\eta<\pi$, les formules asymptotiques ci-dessous ont lieu :

1. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\ln z-\frac{1}{2z}+O(z^{-2})$; 2. $\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+O(z^{-3})$.

31.27. Notons D_ϱ tout le plan des z duquel on a enlevé les disques $|z+n|\leq\varrho$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Montrer que, pour tout $\varrho>0$, il existe une constante M telle que

1. $\left|\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right|\leq\ln|z|+M$; 2. $\left|\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right|\leq M|z|^{-1}$.

31.28. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}t^{-z}d\,\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{\ln t}{1-t}$ $(0<t<1)$.

2. $\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}e^{xz}d\,\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{x}{1-e^{-x}}$ $(x>0)$.

31.29. Démontrer les formules suivantes :

1. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+C=\int_0^1\frac{x^{z-1}-1}{x-1}\,dx$ (Re $z>0$).

2. $\frac{\Gamma'(z+\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^1\frac{x^{z-1}(1-x^\zeta)}{1-x}\,dx$ (Re $z>0$, Re $(z+\zeta$.

3. $\int_0^1\frac{t^{2\alpha-1}-t^{2\beta-1}}{(1+t)\ln t}\,dt=\ln\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}$ (Re $\alpha>0$, Re $\beta>0$).

31.30. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de e^z n'ayant pas de pôles sur l'axe réel, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans la bande $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$. En supposant que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$, démontrer les formules suivantes :

1. Si $\operatorname{Re} \alpha > 0$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x+2\pi i\alpha} = -\sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} \left\{ f(z) \frac{\Gamma'\left(\frac{z}{2\pi i}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2\pi i}+\alpha\right)} \right\}.$$

2. Si $\operatorname{Re} \alpha < 0$ et le point $z = -2\pi i\alpha$ n'est pas un pôle de $f(z)$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x+2\pi i\alpha} = -2\pi i f(-2\pi i\alpha) - \sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} \left\{ f(z) \frac{\Gamma'\left(\frac{z}{2\pi i}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2\pi i}+\alpha\right)} \right\}.$$

31.31. Démontrer les formules suivantes :

1. Pour $\alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4\pi^2\alpha^2)(e^x+1)} = \frac{1}{4\alpha}.$$

2. Pour $\alpha > 0$ et pour toute valeur réelle de a,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4\pi^2\alpha^2)(e^x+e^{2\pi a})} = \frac{1}{4\alpha} e^{-2\pi a} + \frac{e^{-2\pi a}}{4\pi i\alpha} \left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\alpha+ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+ia\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\alpha-ia\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha-ia\right)} \right].$$

3. Pour $\alpha > 0$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(\ln^2 x+4\pi^2\alpha^2)} = \frac{1}{4\alpha}.$$

4. Pour $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+4\pi^2\alpha^2)\operatorname{sh} x} = \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} - \frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{2\alpha}.$$

31.32. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle de e^z réelle pour les valeurs réelles de z satisfaisant à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

et soient $a_1, \ldots, a_n$ les pôles de cette fonction situés dans la bande $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$. Démontrer la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln\left(\frac{x^2}{4\pi^2} + \alpha^2\right) dx = 4\pi \operatorname{Im} \sum_{s=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_s} \left\{ f(z) \ln \Gamma\left(\frac{z}{2\pi i} + \alpha\right) \right\}$$

(ici, $\alpha > 0$, tandis que pour $\ln \zeta$ et $\ln \Gamma(\zeta)$, on choisit dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 0$ des branches régulières réelles pour les valeurs réelles de ζ).

CHAPITRE VI

REPRÉSENTATIONS CONFORMES

§ 32. Fonctions univalentes

Une fonction $f(z)$ définie sur un ensemble E du plan complexe élargi (on admet la valeur ∞) est appelée *univalente sur l'ensemble E* si $f(z_1) \neq f(z_2)$ pour n'importe quel couple de points distincts z_1 et z_2 appartenant à cet ensemble.

Une application réalisée par une fonction univalente est appelée *application biunivoque*.

On appelle *représentation conforme* d'un domaine D du plan complexe élargi une application réalisée par une fonction méromorphe et univalente dans le domaine D.

32.01. Dire si les fonctions $f(z)$ ci-dessous sont univalentes dans les domaines D indiqués entre parenthèses :

1. $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(D: \ |z| < \infty)$, $ad - bc \neq 0$.
2. $f(z) = z^2$ $(D: \ \{1 < |z| < 2, \ 0 < \arg z < 3\pi/2\})$.
3. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ $(D: \ |z| < 1)$.
4. $f(z) = e^z$ $(D: \ |z| < 4)$.
5. $f(z) = z^2$ $(D: \ \{3 < |z+2| < 4, \ 0 < \arg(z+2) < 3\pi/2\})$.
6. $f(z) = e^z$ $(D: \ |\mathrm{Re}\,[(1+i)z]| < \pi)$..
7. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ $(D: \ |z - i| < \sqrt{2})$.

L'image d'un ensemble E par une application $w = f(z)$ est d'habitude désignée par le symbole $f(E)$. Par exemple, par le symbole E on désigne un ensemble constitué par les points $-z$, où z est un point arbitraire de l'ensemble E ; par le symbole $E + a$ (ici, a est un nombre complexe arbitraire) on désigne un ensemble constitué par les points $z + a$, où z est un point arbitraire de l'ensemble E, etc.

32.02. Démontrer les assertions suivantes :

1. La fonction z^2 est univalente dans un domaine D si, et seulement si, les domaines D et $-D$ n'ont pas de points communs.

2. La fonction $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ est univalente dans un domaine D si, et seulement si, les domaines D et $\dfrac{1}{D}$ n'ont pas de points communs.

3. La fonction e^z est univalente dans un domaine D si, et seulement si, les domaines D et $D + 2\pi i$ n'ont pas de points communs.

4. La fonction $\operatorname{tg} z$ est univalente dans un domaine D si, et seulement si, les domaines D et $D+\pi$ n'ont pas de points communs.

5. La fonction $\cos z$ est univalente dans un domaine D si, et seulement si, les domaines

$$D, \ -D, \ D+2\pi, \quad -D+2\pi$$

n'ont pas de points deux à deux communs.

32.03. Soient $n \geq 2$ un entier et α un nombre réel arbitraire. Montrer que la fonction $z^n + ne^{i\alpha}z$ est univalente dans le disque $|z| < 1$.

32.04. Montrer que la fonction $z^2 + az$ est univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ si, et seulement si, l'inégalité $\operatorname{Im} a \geq 0$ est vérifiée.

32.05. Montrer qu'il n'y a aucune branche de la fonction $\sqrt{z^5}$ régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ qui soit univalente dans ce demi-plan.

32.06. Montrer que, si la fonction $\ln z$ admet la séparation d'une branche régulière dans un domaine D, cette branche régulière est univalente dans le domaine D.

32.07. Soit n un entier positif. Montrer que, si la fonction $\sqrt[n]{z}$ admet la séparation d'une branche régulière dans un domaine D, cette branche régulière est univalente dans le domaine D.

32.08. Soit $f(z)$ une fonction univalente sur un ensemble E, et soit $g(\zeta)$ une fonction définie sur l'ensemble E' des valeurs de la fonction $f(z)$. Montrer que la fonction $g(f(z))$ est univalente sur l'ensemble E si, et seulement si, la fonction $g(\zeta)$ est univalente sur l'ensemble E'.

32.09. Soit $f(z)$ une fonction régulière et univalente dans le disque $|z| < 1$, et supposons que $f(0) = 0$. Montrer que l'expression multiforme $\sqrt[n]{f(z^n)}$ se décompose dans le disque $|z| < 1$ en n fonctions régulières et univalentes dans ce disque.

* * *

Une fonction $f(z)$ est appelée *univalente en un point* z_0 si elle est définie et univalente dans un certain voisinage de ce point.

Pour les fonctions régulières, le critère d'univalence en un point cité ci-dessous est valable :

Une fonction $f(z)$ régulière en un point $z_0 \neq \infty$ est univalente en ce point si, et seulement si, $f'(z_0) \neq 0$.

32.10. Se convaincre que les fonctions ci-dessous ne sont pas univalentes dans les domaines D indiqués entre parenthèses, bien qu'elles soient univalentes en chaque point de ces domaines :

1. z^2 (D : $1 < |z| < 2$). 2. z^3 (D : $\operatorname{Im} z > 0$). 3. e^z (D : $|z| < 4$).

32.11. Montrer qu'une fonction $f(z)$ régulière au point ∞ est univalente en ce point si, et seulement si,

$$\lim_{z \to \infty} [z(f(z) - f(\infty))] \neq 0.$$

32.12. Montrer qu'une fonction $f(z)$ qui admet un pôle en un point z_0 est univalente en ce point si, et seulement si, ce pôle est d'ordre 1.

32.13. Soit $f(z)=a_n z^n+\ldots+a_2 z^2+z$ une fonction univalente dans le disque $|z|<1$. Montrer que les inégalités ci-dessous sont valables :

1. $n|a_n|\leq 1$. 2. $k|a_k|\leq C_{n-1}^{k-1}$ $(k=2, \ldots, n-1)$.

Indication. Utiliser les formules de Viète.

32.14. Montrer que, pour que le trinôme de second degré az^2+bz+c soit univalent dans un domaine convexe D, il faut et il suffit que ce trinôme soit univalent en chaque point du domaine D.

Indication. Utiliser le fait que le point milieu d'un segment joignant deux points quelconques dans le domaine D est également contenu dans ce domaine.

32.15. Soient a, b et z_0 des nombres complexes donnés. Trouver la valeur maximale de R pour laquelle la fonction z^2+az+b est univalente dans le disque $|z-z_0|<R$.

32.16. Montrer que la fonction z^2+az+b est univalente en chaque domaine D situé d'un côté d'une droite quelconque passant par le point $z=-a/2$.

* * *

32.17. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine convexe D. Montrer que, s'il existe une constante réelle α telle que la grandeur $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}f'(z)\}$ soit différente de zéro dans le domaine D, alors la fonction $f(z)$ est univalente dans le domaine D.

Indication. Voir le problème 10.05.

32.18. Montrer que la fonction z^3-3z est univalente dans le domaine $\{(\operatorname{Re} z)^2>1+(\operatorname{Im} z)^2, \operatorname{Re} z>0\}$.

32.19. Montrer que la fonction $z+e^z$ est univalente dans le demi-plan $\operatorname{Re} z<0$.

* * *

32.20. Soit $f(z)$ une fonction régulière en un point $z_0\neq\infty$, et supposons que sa dérivée admette un zéro d'ordre $m\geq 1$ en ce point. Montrer que :

1. Pour tout nombre réel φ_0 et pour tout nombre positif $\alpha<\frac{1}{m+1}$, il existe un nombre $\varrho>0$ tel que la fonction $f(z)$ soit univalente dans le secteur

$$|z-z_0|<\varrho,\ \varphi_0<\arg(z-z_0)<\varphi_0+\pi\alpha.$$

2. Si $\alpha>\frac{1}{m+1}$, la fonction $f(z)$ ne peut pas être univalente dans le secteur

$$|z-z_0|<\varrho,\ \varphi_0<\arg(z-z_0)<\varphi_0+\pi\alpha$$

quels que soient les nombres φ_0 et $\varrho>0$.

Indication. Voir le problème 26.12.

32.21. Montrer que le polynôme $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ peut être une fonction univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ si, et seulement si, son degré n'est pas supérieur à 2.

* * *

32.22. Montrer que, si une fonction non identiquement constante $f(z)$ est régulière dans un domaine D, alors l'ensemble des valeurs, que prend cette fonction dans le domaine D, forme un domaine. *(Principe de conservation du domaine.)*

Indication. Voir le problème 23.15.

32.23. Soit $f(z)$ une fonction non identiquement constante régulière dans un domaine D. Notons E_m l'ensemble des valeurs w pour lesquelles l'équation $f(z) = w$ admet au moins m solutions dans le domaine D. Montrer que chaque ensemble E_m est vide ou bien ouvert.

Indication. Voir le problème 23.15.

32.24. Déduire le principe du maximum du module d'une fonction régulière et le principe de conservation du domaine.



32.25. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D, borné par une courbe simple fermée C, et continue dans la fermeture de ce domaine. Montrer que, si l'image de la courbe C par l'application $w = f(z)$ est une courbe simple fermée, alors la fonction $f(z)$ est univalente dans le domaine D.

32.26. Est-ce que l'assertion du problème 32.25 reste vraie si, toutes les autres conditions étant égales d'ailleurs, on admet que la fonction $f(z)$ devienne infinie sur la frontière du domaine D et si on la considère continue dans la métrique sphérique ?

32.27. Soient $-\infty < a_1 < \ldots < a_n < +\infty$. Montrer que toute branche régulière de la fonction analytique $f(z) = \sqrt[n]{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}$ dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ est univalente dans ce demi-plan.

32.28. Soient

$$0 < \alpha_k < 1 \quad (k = 1,\ 2,\ 3), \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Montrer que toute branche de la fonction

$$\int_0^z (\zeta - 1)^{\alpha_1 - 1}(\zeta + 1)^{\alpha_2 - 1}(\zeta - i)^{\alpha_3 - 1} d\zeta$$

régulière dans le disque $|z| < 1$ est univalente dans ce disque.

32.29. Soient

$$-\infty < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < +\infty, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Montrer que toute branche de la fonction analytique

$$\int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha - 1}(\zeta - a_2)^{-\alpha}(\zeta - a_3)^{\alpha - 1}(\zeta - a_4)^{-\alpha} d\zeta$$

régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ est univalente dans ce demi-plan.

32.30. Soit $f(z)$ une fonction non identiquement constante régulière dans un domaine D, et supposons que son module conserve inchangée sa valeur sur toute la frontière du domaine D. Montrer que la fonction $f(z)$ est univalente dans le domaine D si elle est univalente en chacun des points de ce dernier.

Indication. Voir les problèmes 23.07 et 26.33.

32.31. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et en chaque point à distance finie de la frontière de ce domaine, et supposons que la fonction $\operatorname{Re} f(z)$ soit égale à zéro en chaque point à distance finie de la frontière du domaine D et différente de zéro dans ce domaine. Montrer que la fonction $f(z)$ est univalente dans le domaine D si elle est univalente en chaque point de ce domaine.

Indication. Voir le problème 26.29.

* * *

32.32. Soit $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$ une fonction régulière et univalente pour $1<|z|<\infty$. Montrer l'inégalité ci-dessous :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1.$$

Indication. Utiliser le résultat du problème 9.19 et le fait que la grandeur $\lim_{R\to\infty} [S(r, R)-\pi R^2]=\sigma(r)$, où $S(r, R)$ représente l'aire de l'image de la couronne $r<|z|<R$ par l'application $w=f(z)$, est égale à l'aire de la partie du plan des w qui ne fait pas partie de l'image du domaine $|z|>r$ (pour cette raison, elle est positive).

32.33. Soit $f(z)$ la fonction du problème 32.32. Montrer que pour tout $n=1, 2, 3, \ldots$ l'inégalité $|c_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ est vérifiée et que l'égalité $|c_m| = \frac{1}{\sqrt{m}}$ n'est possible que si

$$f(z)=z+\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{m}\cdot z^m},$$

où α est une constante réelle.

32.34. Soit $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ une fonction régulière et univalente dans le disque $|z|<1$. Montrer que $|a_2| \leq 2$ et que l'égalité n'est possible que si

$$g(z)=z(1+ze^{i\alpha})^{-2},$$

où α est une constante réelle.

Indication. Appliquer le résultat du problème 32.33 à la fonction

$$f(z)=\sqrt{\frac{1}{g(z^{-2})}}$$

(voir également le problème 32.09).

* * *

32.35. Soient $f_n(z)$ des fonctions régulières et univalentes dans un domaine D, et supposons que la suite $\{f_n(z)\}$ converge uniformément vers une fonction $f(z) \not\equiv \text{const}$ en chaque partie fermée du domaine D. Montrer que la fonction $f(z)$ est univalente dans le domaine D.

32.36. Soient

$$f_m(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(m)} z^{-n}$$

des fonctions régulières et univalentes dans le domaine $1 < |z| < \infty$. Montrer que de la suite $\{f_m(z)\}$ on peut tirer une sous-suite, qui converge pour $1 < |z| < \infty$, et que la limite de cette sous-suite est une fonction univalente dans le domaine $|z| > 1$.

Indication. Voir les problèmes 12.12 et 32.32.

32.37. Soient

$$g_m(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} d_n^{(m)} z^n$$

des fonctions régulières et univalentes dans le disque $|z| < 1$. Montrer que de la suite $\{g_m(z)\}$ on peut tirer une sous-suite, qui converge uniformément en chaque disque $|z| \leq r < 1$, et que la limite de cette sous-suite est une fonction univalente dans le disque $|z| < 1$.

RÉPONSES

32.01.
1. Oui. 2. Non. 3. Oui. 4. Non. 5. Oui. 6. Oui. 7. Oui.

32.15.
$R = \left| z_0 + \frac{a}{2} \right|$.

32.26.
Non. Exemple : $f(z) = z^2$ $(D : \operatorname{Im} z > -1)$.

§ 33. Fonction homographique

La fonction

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où a, b, c, d sont des constantes vérifiant la condition

$$ad - bc \neq 0,$$

est appelée *fonction homographique*, tandis que l'application qu'elle réalise est nommée *application homographique*.

33.01. Soit $w(z)$ une fonction homographique arbitraire, et soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points deux à deux distincts du plan complexe élargi. Notons

$$w_k = w(z_k), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Montrer que

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

33.02. Montrer que chaque fonction homographique $w(z)$ vérifie l'équation différentielle $2w'w''' = 3(w'')^2$.

33.03. Montrer que les lignes de niveau du module d'une fonction homographique sont des circonférences ou des droites.

33.04. Montrer que les lignes de niveau de la partie réelle d'une fonction homographique sont des circonférences ou des droites.

33.05. Montrer que l'image d'une circonférence par une application homographique est une circonférence ou une droite.

33.06. Montrer que l'image d'une droite par une application homographique est une circonférence ou une droite.

33.07. Montrer que l'image anticipée d'une droite par l'application $w = \frac{az+b}{cz+d}$ est une circonférence (ou une droite) passant par le point $z = -\frac{d}{c}$.

Deux points z_1 et z_2 sont dits *symétriques par rapport à une droite* C s'ils se trouvent sur une perpendiculaire à la droite C, de côtés opposés, et si leurs distances à cette droite sont égales.

Deux points z_1 et z_2 sont dits *symétriques par rapport à une circonférence* C s'ils se trouvent sur une demi-droite sortant du centre de la circonférence C, de côtés opposés, et si le produit de leurs distances au centre de la circonférence C est égal au carré du rayon de cette circonférence (le point $z = \infty$ est le symétrique du centre de la circonférence).

33.08. Trouver le point a^* symétrique du point a par rapport à la droite $\operatorname{Re}(e^{-i\varphi}(z - z_0)) = 0$.

33.09. Trouver le point a^* symétrique du point a par rapport à la circonférence $|z - z_0| = R$.

33.10. Soient z_1 et z_2 deux points distincts et symétriques par rapport à une droite C. Montrer que chaque circonférence passant par les points z_1 et z_2 coupe la droite C à angle droit.

33.11. Soient z_1 et z_2 deux points distincts et symétriques par rapport à une circonférence C. Montrer que chaque circonférence passant par les points z_1 et z_2 coupe la circonférence C à angle droit.

33.12. Soient $w(z)$ une fonction homographique arbitraire, C une circonférence (ou une droite) arbitraire et z_1, z_2 deux points symétriques par rapport à la circonférence (ou à la droite) C. Montrer que les points $w(z_1)$ et $w(z_2)$ sont symétriques par rapport à l'image de la circonférence (ou de la droite) C par l'application $w = w(z)$.

33.13. Montrer que l'équation d'une circonférence de rayon R, jouissant de la propriété que deux points donnés z_1 et z_2 sont symétriques par rapport à elle, peut être écrite sous la forme

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \frac{\sqrt{4R^2 + |z_2 - z_1|^2} \pm |z_2 - z_1|}{2R}.$$

33.14. Trouver la condition qui doit être vérifiée par les points z_1, z_1^*, z_2, z_2^* afin qu'il existe une circonférence (ou une droite) par rapport à laquelle les points z_k soient les symétriques des points z_k^* $(k = 1, 2)$.

* * *

33.15. Soient z_1, z_2, z_3 trois points deux à deux distincts de même que les points w_1, w_2, w_3. Montrer qu'il y a une fonction homographique unique $w = w(z)$ pour laquelle $w(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, 3)$, et que cette fonction $w(z)$ vérifie l'équation

$$\frac{w(z)-w_1}{w(z)-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \,.$$

33.16. Montrer que la forme générale d'une application homographique du disque $|z| < 1$ sur le disque $|w| < 1$ est donnée par la formule $w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-z\bar{a}}$, où a est un point arbitraire du disque $|z| < 1$, α étant une constante réelle arbitraire.

33.17. Montrer que la forme générale d'une application homographique du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le disque $|w| < 1$ est donnée par la formule

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-\bar{a}} \,,$$

où a est un point arbitraire du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, α étant une constante réelle arbitraire.

33.18. Montrer que la forme générale d'une application homographique du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$ est donnée par la formule $w = \frac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d sont des constantes arbitraires vérifiant la condition $ad - bc = 1$.

33.19. Trouver la forme générale des applications homographiques des domaines ci-dessous :

1. Du disque $|z - z_0| < R$ sur le disque $|w| < 1$.
2. Du disque $|z| < R$ sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.
3. Du demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ sur le disque $|w| < 1$.
4. Du demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ sur le demi-plan $\operatorname{Re} w > 0$.



33.20. Montrer que toute représentation conforme de tout le plan complexe sur tout le plan complexe est une application linéaire.

33.21. Montrer que toute représentation conforme de tout le plan complexe élargi sur tout le plan complexe élargi est une application homographique.

33.22. Soit $w(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine D. Démontrer les assertions suivantes :

1. Si l'image de tout segment de droite (situé dans le domaine D) par l'application $w = w(z)$ est un segment de droite, alors $w(z)$ est une fonction linéaire.

2. Si l'image de tout segment de droite (situé dans le domaine D) par l'application $w = w(z)$ est un arc de circonférence ou un segment de droite, alors $w(z)$ est une fonction homographique.

33.23. Montrer que la grandeur $\frac{|dz|}{R^2-|z|^2}$ est invariante par rapport aux applications homographiques du disque $|z|<R$ sur lui-même, c'est-à-dire que pour toute application $w=w(z)$, l'égalité ci-dessous a lieu :

$$\frac{|dw|}{R^2-|w|^2}=\frac{|dz|}{R^2-|z|^2} \quad (w=w(z)).$$

33.24. Montrer que la grandeur $\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ est invariante par rapport aux applications homographiques du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur lui-même.

33.25. Montrer que la grandeur $\frac{|dz|}{1+|z|^2}$ est invariante par rapport aux applications homographiques du type $w=\frac{Az-B}{\bar{B}z-\bar{A}}$, où A, B sont des nombres complexes arbitraires qui ne s'annulent pas simultanément (par rapport à la rotation de la sphère de Riemann).

33.26. La grandeur $\lambda(C)=\int\limits_C \frac{|dz|}{1-|z|^2}$ est appelée longueur non-euclidienne d'une courbe C, située dans le disque $|z|<1$, par rapport à ce disque. Montrer que la longueur non-euclidienne de la courbe est conservée pour toutes les applications homographiques du disque $|z|<1$ sur lui-même, c'est-à-dire que la longueur non-euclidienne de la courbe C est égale à la longueur non-euclidienne de son image par ces applications.

33.27. La grandeur

$$\sigma(D)=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1-|z|^2} \quad (x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z),$$

est appelée aire non-euclidienne d'un domaine D par rapport au disque $|z|<1$. Montrer que l'aire non-euclidienne par rapport au disque $|z|<1$ est invariante pour toute application homographique de ce disque sur lui-même (c'est-à-dire que l'aire non-euclidienne de chaque domaine situé dans le disque $|z|<1$ est égale à l'aire non-euclidienne de son image par ces applications).

33.28. Soit $w(z)$ une fonction méromorphe dans le disque $|z|<1$, et supposons que l'aire non-euclidienne par rapport au disque $|z|<1$ de chaque domaine situé dans ce disque soit égale à l'aire non-euclidienne (par rapport au même disque) de son image par l'application $w=w(z)$. Montrer que $w(z)$ est une fonction homographique qui applique le disque $|z|<1$ sur lui-même.

Indication. Voir les problèmes 8.55 et 9.24.

* * *

Pour traiter certaines questions, il est commode de représenter les valeurs d'une fonction homographique $w(z)$ par les points du même plan des z. Dans ces cas, on a affaire à une *transformation homographique* du plan complexe élargi, et les symboles utilisés sont un peu différents.

La transformation homographique proprement dite est désignée par une lettre quelconque, par exemple T (sans indiquer l'argument). Par le symbole Tz on désigne le résultat obtenu en appliquant la transformation homographique T au point z.

Pour les transformations homographiques, la multiplication est définie comme suit :

On appelle *produit* T_1T_2 de la transformation homographique T_1 par la transformation homographique T_2 une transformation obtenue en réalisant successivement d'abord la transformation T_2, ensuite la transformation T_1.

33.29. Montrer que le produit T_1T_2 de la transformation homographique T_1 par la transformation homographique T_2 est aussi une transformation homographique.

33.30. Dire si la multiplication des transformations homographiques est commutative, c'est-à-dire si l'égalité $T_1T_2=T_2T_1$ est toujours vérifiée.

33.31. Montrer que la multiplication des transformations homographiques est associative, c'est-à-dire que l'égalité $T_1(T_2T_3)=(T_1T_2)T_3$ a lieu quelles que soient les trois transformations homographiques T_1, T_2, T_3.

33.32. Soit E une transformation homographique identique (correspondant à une fonction $w(z)\equiv z$). Montrer que les égalités $TE=ET=T$ sont vérifiées pour toute transformation homographique T.

33.33. Montrer que, pour toute transformation homographique T, il existe une transformation homographique inverse T^{-1} jouissant de la propriété $TT^{-1}=T^{-1}T=E$, où E est une transformation identique (c'est-à-dire $Ez=z$ pour tous les z).

Pour tout n entier, le symbole T^n est défini par les égalités suivantes :

$$T^n=\begin{cases}\underbrace{T\ldots T}_{n\text{ fois}} & (n>0);\\ E & (n=0);\\ \underbrace{T^{-1}\ldots T^{-1}}_{-n\text{ fois}} & (n<0)\end{cases}$$

(ici, E est une transformation identique, T^{-1} étant la transformation inverse de la transformation T).

33.34. Trouver la transformation T^n si les transformations T sont définies par les formules suivantes :

1. $Tz=z+A$. 2. $Tz=Kz+(1-K)z_0$.

3. $\dfrac{1}{Tz-z_0}=\dfrac{1}{z-z_0}+A$. 4. $\dfrac{Tz-z_1}{Tz-z_2}=K\,\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$

(ici, A, K, z_0, z_1, z_2 sont des constantes complexes arbitraires, mais $z_1\neq z_2$).

33.35. Trouver les points limites des suites $\{a_n\}$:

1. $a_1=0, \quad a_{n+1}=\dfrac{a_n+i}{a_n-i} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$.

2. $a_1=0, \quad a_{n+1}=2\,\dfrac{(2-i)a_n-2i}{a_n+2-4i} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$.

3. $a_1=0, \quad a_{n+1}=\dfrac{2(2+i)a_n+1-2i}{(1-2i)a_n+2(2+i)} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$.

Le point a est appelé *point fixe d'une transformation homographique* T si $Ta=a$.

33.36. Démontrer les assertions suivantes :

1. Chaque transformation homographique a au moins un point fixe (à distance finie ou à l'infini).

2. Chaque transformation homographique non identique a au plus deux points fixes (à distances finies ou à l'infini).

33.37. Montrer qu'une transformation homographique T qui a un point fixe unique a vérifie l'équation

$$\frac{1}{Tz-a}=\frac{1}{z-a}+A$$

pour $a\neq\infty$, tandis que pour $a=\infty$, elle est de la forme

$$Tz=z+A$$

(dans les deux cas, A est une certaine constante complexe).

33.38. Montrer qu'une transformation homographique T, qui a deux points fixes distincts et à distances finies a et b, vérifie l'équation $\frac{Tz-a}{Tz-b}=$ $=K\,\frac{z-a}{z-b}$, où K est une certaine constante complexe.

33.39. Soient $K>1$, $-\infty<\alpha<\infty$, a et b étant deux nombres complexes distincts arbitraires. Définissons la famille de transformations homographiques $\{T^\alpha\}$ par l'égalité $\frac{T^\alpha z-a}{T^\alpha z-b}=K^\alpha\,\frac{z-a}{z-b}$. Montrer que, pour toute valeur réelle de α, le point $T^\alpha z_0$ se trouve sur la circonférence passant par les points a, b et z_0.

33.40. Montrer que toute transformation homographique vérifiant l'équation $T^m=E$ (ici, E est une transformation identique, $m>1$ étant un entier) vérifie la relation $\frac{Tz-a}{Tz-b}=K\,\frac{z-a}{z-b}$, où a, b, K sont des constantes complexes et $K^m=1$.

RÉPONSES

33.08.

$$a^*=z_0-e^{2i\varphi}(\bar{a}-\bar{z}_0).$$

33.09.

$$a^*=z_0+\frac{R^2}{\bar{a}-\bar{z}_0}.$$

33.14.

$$\frac{z_2-z_1}{z_2-z_1^*}\cdot\frac{z_2^*-z_1^*}{z_2^*-z_1}>0.$$

33.19.

1. $w=Re^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2-(z-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)}$, $\quad |a-z_0|<R$, $-\infty<\alpha<\infty$.

2. $w=\dfrac{a\,Re^{i\alpha}-\bar{a}z}{Re^{i\alpha}-z}$, $\quad \operatorname{Im} a>0$, $-\infty<\alpha<\infty$.

3. $w = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{z+a}$, $\quad \operatorname{Re} a > 0, \; -\infty < \alpha < \infty$.

4. $w = \dfrac{az+ib}{icz+d}$, $\quad \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b = \operatorname{Im} c = \operatorname{Im} d = 0, \; ad+bc = 1$.

33.30.

Non. Exemple : $T_1 z = z+1, \quad T_2 = -1/z$.

33.34.

1. $T^n z = z + nA$. 2. $T^n z = K^n z + (1-K^n) z_0$.

3. La transformation T^n est définie par la formule

$$\frac{1}{T^n z - z_0} = \frac{1}{z-z_0} + nA.$$

4. La transformation T^n est définie par la formule

$$\frac{T^n z - z_1}{T^n z - z_2} = K^n \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

33.35.

1. Trois points : $0, -1, -i$. 2. Un seul point : 2. 3. Tous les points de l'axe imaginaire.

§ 34. Principe de symétrie

La résolution des problèmes qui suivent implique l'utilisation du principe de symétrie dont la formulation simplifiée dit:

I. Soit D un certain domaine dont la frontière contient l'intervalle γ de l'axe réel. Désignons par D^* le domaine symétrique du domaine D par rapport à l'axe réel. On suppose qu'une fonction $f(z)$ vérifie les conditions :

a) $f(z)$ est régulière dans le domaine D et continue dans sa fermeture ;

b) $\operatorname{Im} f(z) = 0 \; (z \in \gamma)$.

Alors, la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement, à travers l'intervalle γ, du domaine D dans le domaine D^*, et la formule $f_1(z) = \overline{f(\bar{z})}$ $(z \in D^*)$ est vraie pour la fonction $f_1(z)$ qui réalise ce prolongement analytique.

Beaucoup de notations du théorème I seront utilisées dans les problèmes ci-après.

34.01. Supposons que la condition b) du théorème I soit remplacée par l'une des conditions suivantes:

1. $\operatorname{Re} f(z) = 0 \quad (z \in \gamma)$. 2. $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z) \quad (z \in \gamma)$.

3. $\operatorname{Im} f(z) = 1 \quad (z \in \gamma)$. 4. $\arg f(z) = \alpha \quad (z \in \gamma)$.

Montrer que la fonction $f(z)$ peut également être prolongée analytiquement dans le domaine D^* à travers l'intervalle γ et trouver la formule pour la fonction $f_1(z)$ qui réalise ce prolongement analytique.

34.02. Soit D un domaine qui ne contient pas de points situés sur l'axe réel, et supposons qu'une fonction $f(z)$ vérifie les conditions du théorème I. Montrer que la fonction $F(z)$ définie par les égalités

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in D + \gamma), \\ \overline{f(\bar{z})} & (z \in D^*) \end{cases}$$

réalise le prolongement analytique de la fonction $f(z)$ dans le domaine obtenu par réunion des domaines D et D^* et de l'intervalle γ.

Mais si la fonction $f(z)$ est univalente dans le domaine D et n'y prend pas de valeurs réelles, montrer que la fonction $F(z)$ est univalente dans le domaine $D+D^*+\gamma$.

Nota. Au début du paragraphe 32 on donne la définition de l'univalence dans un domaine et en un point.

34.03. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $\operatorname{Im} z>0$, continue pour $\operatorname{Im} z\geq 0$ et qui prend des valeurs réelles sur l'axe réel. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe.

34.04. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $0<\operatorname{Re} z<1$, continue pour $0\leq\operatorname{Re} z\leq 1$ et qui prend des valeurs réelles sur les droites $\operatorname{Re} z=0$ et $\operatorname{Re} z=1$. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe et que la fonction $F(z)$ qui réalise ce prolongement analytique vérifie la condition $F(z+2)=F(z)$.

34.05. Soit $f(z)$ une fonction régulière pour $0<\operatorname{Im} z<1$, continue pour $0\leq\operatorname{Im} z\leq 1$ satisfaisant aux conditions

$$\operatorname{Re} f(z)=0 \quad (\operatorname{Im} z=0)\ ; \quad \operatorname{Im} f(z)=0 \quad (\operatorname{Im} z=1).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan et que la fonction $F(z)$ qui réalise ce prolongement analytique vérifie la condition $F(z+2i)=-F(z)$.

34.06. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le rectangle

$$|\operatorname{Im} z|<h,\ 0<\operatorname{Re} z<1,$$

continue dans la fermeture de ce rectangle, satisfaisant aux conditions

$$\operatorname{Im} f(z)=0 \ (\operatorname{Re} z=0,\ |\operatorname{Im} z|<h);$$
$$\operatorname{Im} f(z)=1 \ (\operatorname{Re} z=1,\ |\operatorname{Im} z|<h).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans la bande $|\operatorname{Im} z|<h$ et que la fonction $F(z)$ qui réalise ce prolongement est de la forme $iz+F_1(z)$, où la fonction $F_1(z)$ est régulière dans la bande $|\operatorname{Im} z|<$ $<h$ et périodique de période 2.

34.07. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la demi-couronne

$$\varrho<|z|<R, \quad \operatorname{Im} z>0,$$

continue dans la fermeture de cette dernière et qui prend des valeurs réelles sur les segments $(-R,\ -\varrho)$ et $(\varrho,\ R)$. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans la couronne $\varrho<|z|<R$ en une fonction régulière dans cette couronne.

34.08. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la demi-couronne

$$\varrho<|z|<R, \quad \operatorname{Im} z>0,$$

continue dans la fermeture de cette dernière, satisfaisant aux conditions

$$\operatorname{Im} f(z)=0 \ (-R<z<-\varrho)\ ; \quad \operatorname{Re} f(z)=0 \ (\varrho<z<R).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin situé dans la couronne $\varrho<|z|<R$ et qu'à la suite

de ce prolongement on obtient une fonction analytique dans cette couronne du type $g(z)\sqrt{z}$, où la fonction $g(z)$ est régulière dans la couronne $\varrho < |z| < R$.

34.09. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la demi-couronne

$$\varrho < |z| < R, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

continue dans sa fermeture, et qui satisfait aux conditions

$$\operatorname{Re} f(z) = 0 \quad (\varrho < z < R) \ ; \ \operatorname{Re} f(z) = -h \quad (-R < z < -\varrho).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin contenu dans la couronne $\varrho < |z| < R$ et qu'à la suite de ce prolongement on obtient une fonction analytique dans cette couronne du type $g(z) + \frac{ih}{\pi} \ln z$, où $g(z)$ est une fonction régulière dans la couronne $\varrho < |z| < R$.

34.10. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le secteur de couronne

$$\varrho < |z| < R, \quad 0 < \arg z < \alpha \ (0 < \alpha < 2\pi),$$

continue dans sa fermeture, satisfaisant aux conditions

$$\operatorname{Im} f(z) = 0, \ (\arg z = \alpha, \ \varrho < |z| < R \ ; \quad \operatorname{Im} f(z) = 0 \ (\varrho < z < R).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin contenu dans la couronne $\varrho < |z| < R$ et qu'à la suite de ce prolongement on obtient une fonction analytique dans cette couronne du type $g(z^{\alpha/n})$, où $g(\zeta)$ est une fonction régulière dans la couronne $\varrho^{\pi/\alpha} < |\zeta| < R^{\pi/\alpha}$.

34.11. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le secteur de couronne

$$\varrho < |z| < R, \ 0 < \arg z < \pi/n \ (n \geq 1 \ \text{entier}),$$

continue dans sa fermeture, satisfaisant aux conditions

$$\operatorname{Re} f(z) = 0 \ (\varrho < |z| < R, \ \arg z = 0) \ ;$$
$$\operatorname{Re} \{e^{-\pi i/n} f(z)\} = 0 \ (\varrho < |z| < R, \ \arg z = \pi/n).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans la couronne $\varrho < |z| < R$ en une fonction régulière dans cette couronne.

* * *

34.12. Supposons satisfaites toutes les conditions du théorème I (voir le début du présent paragraphe), sauf la condition b) qui est remplacée par une autre que voici :

$$|f(z)| = 1 \quad (z \in \gamma).$$

Notons $a_1, \ldots, a_m$ les zéros de la fonction $f(z)$ dans le domaine D. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement à travers l'intervalle γ du domaine D dans le domaine D^* privé des points $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$, et que la formule $f_1(z) = 1/\overline{f(\bar{z})}$ $(z \in D^*)$ est valable pour la fonction $f_1(z)$ qui réalise ce prolongement.

Indication. Appliquer le théorème I à la fonction

$$g(z)=i\,\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\,.$$

34.13. Supposons satisfaites toutes les conditions du théorème I, sauf la condition b) qui est remplacée par une autre que voici:

$$|f(z)-b|=R\quad(z\in\gamma).$$

Notons $a_1, \ldots, a_m$ les zéros de la fonction $f(z)-b$ dans le domaine D. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement à travers l'intervalle γ du domaine D dans le domaine D^* privé de points $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$, et que la formule

$$f_1(z)=b+\frac{R^2}{\overline{f(\bar{z})}-\bar{b}}\quad(z\in D^*)$$

est valable pour la fonction $f_1(z)$ qui réalise ce prolongement.

34.14. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un domaine D et continue jusqu'à sa frontière, qui contient l'arc γ de la circonférence $|z|=1$, prenant des valeurs réelles sur cet arc. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement à travers l'arc γ, du domaine D dans le domaine D^* (le symétrique de D par rapport à la circonférence $|z|=1$). Montrer que la formule

$$f_1(z)=\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\quad(z\in D^*)$$

est valable pour la fonction $f_1(z)$ qui réalise ce prolongement.

34.15. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le secteur de couronne

$$1<|z|<R,\qquad \alpha<\arg z<\beta,$$

continue dans sa fermeture, satisfaisant aux conditions:

$$\operatorname{Im} f(z)=0\quad(|z|=1,\ \alpha<\arg z<\beta);$$
$$\operatorname{Re} f(z)=0\quad(|z|=R,\ \alpha<\arg z<\beta).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans l'angle $\alpha<\arg z<\beta$ et que la fonction $F(z)$ qui réalise ce prolongement vérifie la relation $F(R^2z)=-F(z)$.

34.16. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans la demi-couronne

$$\varrho<|z|<R,\qquad \operatorname{Im} z>0,$$

continue dans sa fermeture, satisfaisant aux conditions:

$$\operatorname{Im} f(z)>0\quad(\varrho<|z|<R,\ \operatorname{Im} z>0);$$
$$|f(z)|=1\quad(-R<z<-\varrho);$$
$$|f(z)|=r\quad(\varrho<z<R).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin contenu dans la couronne $\varrho<|z|<R$ et qu'à la suite

de ce prolongement on obtient une fonction analytique dans cette couronne du type $z^{\frac{i}{\pi}\ln z}g(z)$, où $g(z)$ est une fonction régulière dans la couronne $\varrho<|z|<R$.

34.17. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-disque $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, continue dans sa fermeture, satisfaisant aux conditions :

$$0<\operatorname{Im} f(z)<1 \quad (|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0);$$
$$\operatorname{Im} f(z)=0 \quad (0<z<1);$$
$$|f(z)-i|=1 \quad (-1<z<0).$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin contenu dans le domaine $0<|z|<1$ et qu'à la suite de ce prolongement on obtient une fonction analytique dans ce domaine du type $\frac{2\pi}{g(z)-\ln z}$, où $g(z)$ est une fonction méromorphe dans le disque $|z|<1$.

34.18. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le demi-disque $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, continue dans sa fermeture, et supposons qu'elle vérifie les conditions:

$$0<\operatorname{Im} f(z)<\cos\alpha \ (|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0);$$
$$\operatorname{Im} f(z)=0 \ (0<z<1);$$
$$|f(z)-ie^{i\alpha}|=1 \ (-1<z<0);$$
$$-\pi/2<\alpha<\pi/2,\ \alpha\neq 0.$$

Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin contenu dans le domaine $0<|z|<1$ et qu'à la suite de ce prolongement on obtient une fonction analytique dans ce domaine du type $\frac{2g(z)\sin\alpha}{z^{-\alpha/\pi}-g(z)}$, où $g(z)$ est une fonction méromorphe dans le disque $|z|<1$.

* * *

Dans les problèmes où la fonction prolongée à l'aide du principe de symétrie est donnée comme une certaine représentation conforme, les formulations sont plus simples. En partie, cela s'explique par le fait que la continuité de la fonction prolongée jusqu'à la frontière du domaine résulte directement du théorème de correspondance des frontières lors d'une représentation conforme :

Si une fonction $f(z)$ établit une représentation conforme d'un domaine D sur un domaine D_1, ces deux domaines étant finis et bornés par des courbes simples fermées, la fonction $f(z)$ est uniformément continue dans le domaine D et elle peut être prolongée en continuité dans la fermeture de ce domaine.

34.19. Soit $f(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du rectangle $|\operatorname{Re} z|<h$, $|\operatorname{Im} z|<h'$ sur un disque quelconque (ou sur un demi-plan). Montrer que le prolongement analytique de la fonction $f(z)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan et périodique de périodes $4h$ et $4ih'$.

34.20. Soit $f(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du secteur

$$|z|<1, \quad 0<\arg z<\pi/n$$

sur un triangle ayant les mêmes sommets 0, 1, $e^{\pi i/n}$ de façon que ces sommets restent fixes. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans le disque $|z|<1$ et que la fonction $F(z)$ qui réalise ce prolongement analytique établit une représentation conforme du disque $|z|<1$ sur un $2n$-gone régulier (de centre 0 et ayant au point 1 un de ses sommets).

34.21. Montrer que toute représentation conforme d'un disque sur un disque (ou sur un demi-plan) est une application homographique.

34.22. Montrer qu'il n'y a pas de fonction qui réalise une représentation conforme de la couronne $1<|z|<R_1$ sur la couronne $1<|z|<R_2$ si seulement $R_1 \neq R_2$.

34.23. Soit $f(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur un domaine défini par les inégalités suivantes:

$$\operatorname{Im} w>0, \quad 0<\operatorname{Re} w<1, \quad \left|w-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}.$$

Montrer que le prolongement analytique de la fonction $f(z)$ aboutit à une fonction $F(z)$ qui est analytique dans tout le plan complexe élargi privé de trois points (images anticipées des points 0, 1 et ∞).

34.24. Montrer que, pour tout élément de la fonction analytique $F(z)$ citée au problème 34.23, l'inégalité $\operatorname{Im} F(z)>0$ est vérifiée.

34.25. Montrer qu'une fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme d'un domaine défini par les inégalités

$$\operatorname{Im} z>0, \quad 0<\operatorname{Re} z<1, \quad \left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$$

sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$ peut être prolongée analytiquement dans tout le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ et que la fonction qui réalise ce prolongement analytique vérifie la relation

$$W(z+2)=W(z), \quad W\left(\frac{z}{2z+1}\right)=W(z).$$

34.26. Soit $w=f(z)$ une fonction quelconque qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur un domaine défini par les inégalités :

$$\operatorname{Im} w>0, \quad 0<\operatorname{Re} w<1, \quad \left|w-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2},$$

de façon que $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\infty)=\infty$. Montrer que la fonction $f(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$2\frac{f'''(z)}{f'(z)}-3\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2=\frac{z^2-z+1}{z^2(z-1)^2}.$$

Indication. Voir les problèmes 34.23 et 33.02.

* * *

Une courbe C est appelée *courbe analytique* (parfois on l'appelle courbe analytique régulière) si elle a au moins une équation paramétrique de la forme $z=\varphi(t)$, $a \leq t \leq b$, possédant les propriétés suivantes:

1. La fonction $\varphi(t)$ est régulière dans un certain domaine contenant l'intervalle (a, b) et continue sur le segment $[a, b]$.

2. La fonction $\varphi'(t)$ n'est pas nulle dans l'intervalle (a, b).

Une courbe C est appelée *courbe analytique fermée* si elle a au moins une équation paramétrique de la forme $z=\varphi(t)$, $a \leq t \leq b$, possédant les propriétés suivantes:

1*. La fonction $\varphi(t)$ est régulière dans une certaine bande $|\operatorname{Im} t| < \eta$ et périodique de période $b-a$.

2*. La fonction $\varphi'(t)$ est différente de zéro pour des t réels.

34.27. Montrer qu'une courbe C, qui a pour équation naturelle $z=\Phi(s)$, $0 \leq s \leq l$ (voir la définition qui précède le problème 3.29), est une courbe analytique si, et seulement si, la fonction $\Phi(s)$ est régulière et univalente dans un certain domaine D contenant l'intervalle $(0, l)$.

34.28. Montrer qu'une courbe fermée C, qui a pour équation naturelle $z=\Phi(s)$, $0 \leq s \leq l$, est une courbe analytique fermée si, et seulement si, la fonction

$$\Phi\left(\frac{l}{2\pi i}\ln \zeta\right)$$

est régulière et univalente dans une certaine couronne

$$1-\varepsilon < |\zeta| < 1+\varepsilon.$$

Deux points a et a^* sont appelés *symétriques par rapport à une courbe analytique* C, qui a pour équation naturelle $z=\Phi(s)$, $0 \leq s \leq l$, si leurs images anticipées par l'application $z=\Phi(s)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Etant donné que la fonction analytique $\Phi(s)$ et sa fonction inverse peuvent ne pas être uniformes, la détermination des points symétriques par rapport à la courbe analytique ne peut pas être correctement effectuée que si l'on indique un domaine déterminé D de régularité et d'univalence de la fonction $\Phi(s)$. En outre, ce domaine doit être symétrique par rapport à l'axe réel.

34.29. Soient C une courbe analytique dont l'équation naturelle est $z=\Phi(s)$, $0 \leq s \leq l$, D un domaine symétrique par rapport à l'axe réel contenant l'intervalle $(0, l)$ qui est domaine de régularité et d'univalence de la fonction $\Phi(s)$, et G l'image du domaine D par l'application $z=\Phi(s)$. Introduisons les notations suivantes:

D^-: la partie du domaine D située au-dessous de l'axe réel;
D^+: la partie du domaine D située au-dessus de l'axe réel;
G^-: l'image du domaine D^- par l'application $z=\Phi(s)$;
G^+: l'image du domaine D^+ par l'applioation $z=\Phi(s)$.

Démontrer les assertions suivantes:

1. Si une fonction $f(z)$ est régulière dans le domaine G^+, continue dans sa fermeture et prend des valeurs réelles sur la courbe C, elle peut être

prolongée analytiquement dans tout le domaine G, la fonction $F(z)$ qui réalise ce prolongement étant donnée par la formule

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & (z\in G^{+}+C),\\ \overline{f(z^{*})} & (z\in G^{-}).\end{cases}$$

2. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans le domaine G^{+}, continue dans sa fermeture, satisfaisant sur la courbe C à la condition

$$|f(z)|=1 \quad (z\in C).$$

Alors, la fonction

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & (z\in G^{+}+C),\\ 1/\overline{f(z^{*})} & (z\in G^{-})\end{cases}$$

est méromorphe dans le domaine G (et de cette façon elle réalise le prolongement analytique de la fonction $f(z)$ dans ce domaine).

3. Soit $f(z)$ une fonction régulière dans un certain domaine B et continue jusqu'à sa frontière qui contient l'intervalle γ de l'axe réel. Si la fonction $f(z)$ prend dans le domaine B des valeurs appartenant au domaine G, et si dans l'intervalle γ elle prend des valeurs appartenant à la courbe C, alors elle peut être prolongée analytiquement à travers l'intervalle γ du domaine B dans le domaine B^{*} qui est le symétrique de B par rapport à l'axe réel. Dans ce cas, la fonction $f_1(z)$ qui réalise le prolongement est donnée par la formule

$$f_1(z)=(f(\bar{z}))^{*} \quad (z\in B^{*})$$

(ici, $(f(\bar{z}))^{*}$ désigne un point symétrique du point $f(z)$ par rapport à la courbe C).

34.30. Soit $P(x, y)$ un polynôme à ses indéterminées, et soit C une courbe analytique telle que, pour chaque point $z\in C$, l'égalité $P(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)=0$ ait lieu. Montrer que n'importe quel couple de points z et z^{*} symétriques par rapport à la courbe C vérifient l'équation

$$P\left(\frac{\bar{z}+z^{*}}{2}, \frac{z^{*}-\bar{z}}{2i}\right)=0.$$

34.31. En s'appuyant sur le résultat du problème 34.30, trouver l'expression du point z^{*} par son symétrique z par rapport aux courbes:

1. $C: \ |z-z_0|=R$. 2. $C: \ y^2=2px$.

3. $C: \ |z^2+1|=R, \ R>1$. 4. $C: \ |z^2+1|=R, \ R<1$.

5. $C: \ \left|z+\frac{1}{z}\right|=R, \ R>2$. 6. $C: \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ a>b>0$.

34.32. Soit C la lemniscate $\left|z+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{2}$ (la courbe supérieure). Montrer que le domaine G (voir le problème 34.29) peut être représenté par le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence $|z|=1$,

$\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$, et qu'en choisissant de cette façon le domaine G, la formule ci-dessous pour le point z^*, qui est le symétrique du point z par rapport à la courbe C, est valable:

$$z^* = \frac{\bar{z} + \sqrt{\bar{z}^2 - (\bar{z}^2 + 1)^2}}{\bar{z}^2 + 1}$$

(pour le radical, on choisit la branche égale à i pour $z = 0$).

34.33. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme de l'extérieur de la courbe supérieure de la lemniscate $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$ sur le domaine $|w| > 1$ de façon que le point ∞ reste fixe. Montrer que:

1. La fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan des z muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence $|z| = 1$. $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$.

2. Aux points $z_1 = e^{\pi i/3}$ et $z_2 = e^{2\pi i/3}$ la fonction $w(z)$ présente des points de ramification d'ordre 2.

34.34. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du domaine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \quad (x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z,\ a > b > 0)$$

sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$. Montrer que la fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement dans le domaine

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} < 1 \quad (x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z),$$

où

$$a_1 = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},\quad b_1 = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

RÉPONSES

34.01.

1. $f_1(z) = -\overline{f(\bar{z})}$. 2. $f_1(z) = i\overline{f(\bar{z})}$.
3. $f_1(z) = 2i + \overline{f(\bar{z})}$. 4. $f_1(z) = e^{2i\alpha}\overline{f(\bar{z})}$.

34.31.

1. $z^* = z_0 + \dfrac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}$. 2. $z^* = \bar{z} - 2p + 2\sqrt{p^2 - 2p\bar{z}}$.

3. $z^* = \sqrt{\dfrac{R^2}{1 + \bar{z}^2} - 1}$. 4. $z^* = \sqrt{\dfrac{R^2}{1 + z^2} - 1}$.

5. $z^* = \dfrac{R^2\bar{z} + \sqrt{R^4\bar{z}^2 - 4(1 + \bar{z}^2)^2}}{2(1 + \bar{z}^2)}$.

6. $z^* = \dfrac{\bar{z}(a^2 + b^2) + 2ab\sqrt{\bar{z}^2 + b^2 - a^2}}{a^2 - b^2}$.

§ 35. Recherche des applications réalisées par des fonctions élémentaires

Dans les problèmes du présent paragraphe on rencontre un grand nombre de domaines dont la configuration est parfois assez compliquée. Certains de ces domaines sont donnés par des figures, d'autres à l'aide des inégalités. Compte tenu de ce fait, convenons sur certaines désignations destinées à abréger l'écriture.

Par le symbole $[a, b]$, où a et b sont des nombres complexes finis, on désigne le segment de droite joignant les points a et b.

Par le symbole $[a, +\infty]$, où a est un nombre réel, on désigne la demi-droite $a \leq z < +\infty$, et par le symbole $[-\infty, a]$ la demi-droite $-\infty < z \leq a$.

C'est pour cela que l'écriture

$$D: \left\{|z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin \left[\frac{i}{2}, i\right]\right\}$$

signifie que le domaine D représente la moitié supérieure du disque $|z| < 1$ muni d'une coupure suivant le segment de droite $[i/2, i]$, tandis que l'écriture

$$D: \{z \notin [-\infty, 0]\}$$

veut dire que D représente le plan complexe entier muni d'une coupure suivant le demi-axe réel négatif.

35.01. Soient $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ et C une constante positive. Trouver les images de chaque ligne des familles indiquées ci-dessous par l'application $w = 1/z$:

1. La famille de circonférences $x^2 + y^2 = Cx$.
2. La famille de droites $y = x + C$.
3. La famille de droites $y = Cx$.

35.02. Soient $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Trouver les images de chaque domaine des familles indiquées par l'application $w = 1/z$:

1. La famille de disques $x^2 + y^2 < Cx$ (ici, C est une constante positive).
2. La famille de disques $x^2 + y^2 < Cx$ (ici, C est une constante négative).
3. La famille de disques $x^2 + y^2 < Cy$ (ici, C est une constante positive).
4. La famille de demi-plans $y > Cx$ (ici, C est une constante positive).
5. La famille de disques $|z - a| < R$, où a est un point fixé, tandis que la constante positive R vérifie la condition $R < |a|$.
6. La famille de disques $|z - a| < R$, où a est un point fixé, tandis que la constante R vérifie la condition $R > |a|$.

35.03. Trouver l'image du disque $|z - 1| < 2$ par les applications suivantes:

1. $w = 1 - 2iz$. 2. $w = \dfrac{2iz}{z+3}$. 3. $w = \dfrac{z+1}{z-2}$. 4. $w = \dfrac{z-1}{2z-6}$.

35.04. Trouver l'image du demi-plan $\operatorname{Re} z < 1$ par les applications suivantes:

1. $w = (1+i)z + 1$. 2. $w = \dfrac{z}{z-1+i}$. 3. $w = \dfrac{z}{z-2}$.

4. $w = \dfrac{4z}{z+1}$. 5. $w = \dfrac{z-3+i}{z+1+i}$.

35.05. Trouver les images des domaines D donnés ci-dessous par les applications indiquées :

1. D : $\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

2. D : $\{z \notin [-2, 1]\}$, $w=\dfrac{z+2}{1-z}$.

3. D : $\{|z-i|>1, \quad \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

4. D : $\{1<|z|<2\}$, $w=\dfrac{2}{z-1}$.

35.06. Rechercher les fonctions homographiques $w(z)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $w(0)=4, \quad w(1+i)=2+2i, \quad w(2i)=0.$
2. $w(0)=0, \quad w(1+i)=2+2i, \quad w(2i)=4.$
3. $w(0)=0, \quad w(1+i)=\infty, \quad w(2i)=2i.$

Trouver l'image du disque $|z-i|<1$ par les applications réalisées par ces fonctions.

35.07. Rechercher les fonctions homographiques $w(z)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $w(i)=2, \quad w(\infty)=1+i, \quad w(-i)=0.$
2. $w(i)=0, \quad w(\infty)=1, \quad w(-i)=\infty.$
3. $w(i)=-2, \quad w(\infty)=2i, \quad w(-i)=2.$

Trouver l'image du demi-plan $\operatorname{Re} z>0$ par les applications réalisées par ces fonctions.

35.08. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du domaine D sur le domaine D_1 en vérifiant les conditions indiquées :

1. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\alpha (|z_0|<1)$.
2. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(|z_0|<1, |w_0|<1)$.
3. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(\operatorname{Im} z_0>0)$.
4. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(\operatorname{Im} z_0>0, |w_0|<1)$.
5. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(z_0)=w_0$, $\arg w'(z_0)=\alpha$ $(\operatorname{Im} z_0>0, \operatorname{Im} w_0>0)$.
6. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(1)=1$, $w(i)=\dfrac{3i-4}{5}$, $w(-1)=-1$.
7. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(i)=i$, $w\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{4i}{5}$.
8. D : $\{|z|<1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
9. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(0)=i$, $w(-1)=1$, $w(\infty)=-1$.

10. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(0)=-i$, $w(2i)=\frac{i}{3}$.

11. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(1+i)=0$, $\arg w'(1+i)=\pi$.

12. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-1)=0$, $w(0)=2$, $w(1)=\infty$.

13. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(-1)=-2$, $w(-2+i)=1+3i$.

14. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, D_1 : $\{\operatorname{Im} w>0\}$, $w(1+i)=i$, $\arg w'(1+i)=\frac{\pi}{2}$.

15. D : $\{|z-1-i|<2\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(i)=0$, $\arg w'(i)=\frac{\pi}{2}$.

16. D : $\{\operatorname{Re} z>-1\}$, D_1 : $\{|w|<1\}$, $w(0)=0$, $\arg w'(0)=\pi$.

35.09. Trouver la forme générale de la représentation conforme des domaines ci-dessous sur la couronne $1<|w|<R$:

1. $|z-3|>9$, $|z-8|<16$. 2. $|z-5|>4$, $\operatorname{Re} z>0$.

35.10. Trouver les images des lignes ci-dessous par l'application $w=z^2$:

1. $\arg z=\alpha$ $(-\pi<\alpha\leq\pi)$. 2. $\operatorname{Re} z=a$ $(a>0)$.

3. $\operatorname{Im} z=a$ $(a>0)$. 4. $|z|=\varrho$, $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$.

35.11. Trouver les images des domaines ci-dessous par l'application $w=z^2$:

1. $\operatorname{Im} z>0$. 2. $\operatorname{Re} z>0$. 3. $\pi<\arg z<\frac{3\pi}{2}$.

4. $|z|<1$, $\frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$. 5. $\operatorname{Im} z<-1$.

6. $\operatorname{Re} z>1$. 7. $|z|<2$, $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

8. $|z|>\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} z>0$.

35.12. Trouver les images des domaines D donnés ci-dessous par l'application de la branche régulière de la fonction $w=\sqrt{z}$ séparée par la valeur de cette dernière au point indiqué :

1. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. D : $\{\operatorname{Re} z>0\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=1}=1$.

3. D : $\{z\notin[0,+\infty]\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=-1}=-i$.

4. D : $\{z\notin[-\infty,+1]\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=4}=2$.

5. D : $\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{1+i}{2}$.

6. D : $\left\{|z|>1,\ \frac{3\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}\right\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=-1}=i$.

7. D : $\{(\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=-1}=-i$.

8. D : $\{\operatorname{Im} z>0,\ (\operatorname{Im} z)^2>4\operatorname{Re} z+4\}$, $\sqrt{z}\big|_{z=-1}=i$.

35.13. Trouver les images des ensembles E indiqués par les applications correspondantes :

1. E : $\left\{\arg z=\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=z^3$.

2. E : $\left\{|z|=1,\ \frac{\pi}{8}<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$, $w=z^4$.

3. E : $\{|z|<1,\quad \operatorname{Im} z>0\}$, $w=z^{3/2}$, $w\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{1-i}{4}$.

4. E : $\{|z|>4,\quad \operatorname{Re} z>0\}$, $w=z^{-3/2}$, $w(9)=-\frac{1}{27}$.

5. E : $\left\{|\arg z|<\frac{\pi}{8},\quad z\notin[0,\ 1]\right\}$, $w=z^8$.

35.14. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 37 à 51 sur le demi-plan dm $w>0$.

I **35.15.** Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme u domaine

$$y^2>4(x+1)\qquad (x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z)$$

sur le disque $|w|<1$ et qui satisfait aux conditions :

$$w(-4)=0,\qquad \arg w'(-4)=0.$$

35.16. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de l'angle $|\arg z|<\pi/4$ sur le disque $|w|<1$ et satisfait aux conditions :

$$w(1)=0,\qquad \arg w'(1)=\pi.$$

35.17. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ muni d'une coupure suivant le segment $[0,\ i]$ sur le disque $|w|<1$ et qui satisfait aux conditions :

$$w\left(\frac{5i}{4}\right)=0,\qquad w(i)=-i.$$

* * *

35.18. Trouver les images des lignes ci-dessous par l'application réalisée par la fonction $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$:

1. $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$. 2. $|z|=1$, $-\frac{3\pi}{4}<\arg z<-\frac{\pi}{4}$.

3. $|z|=2$. 4. $|z|=\frac{1}{2}$. 5. $\arg z=\frac{\pi}{4}$.

6. $\arg z=\frac{3\pi}{4}$.

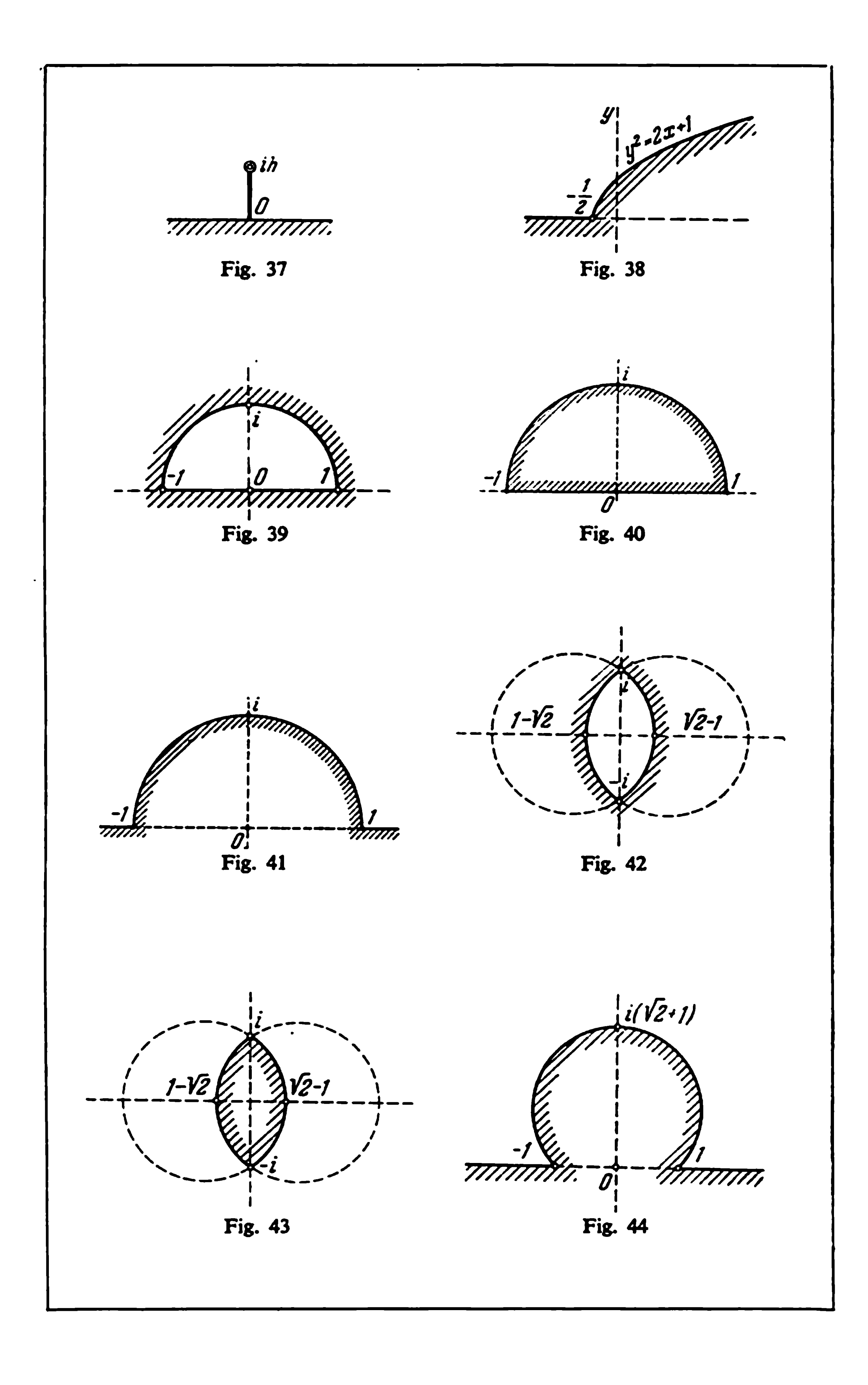


Fig. 37

Fig. 38

Fig. 39

Fig. 40

Fig. 41

Fig. 42

Fig. 43

Fig. 44

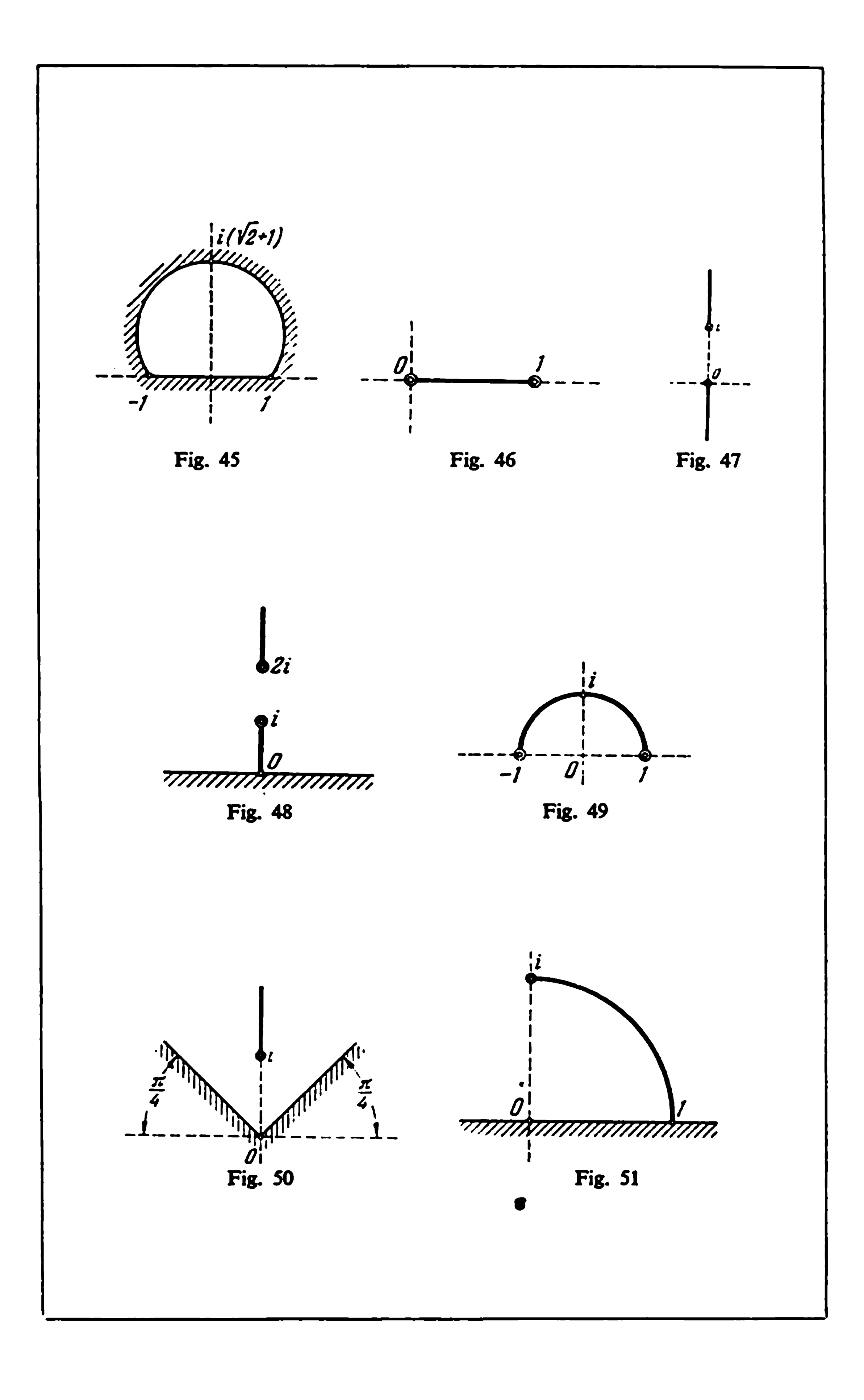


Fig. 45

Fig. 46

Fig. 47

Fig. 48

Fig. 49

Fig. 50

Fig. 51

35.19. Trouver les images des domaines ci-dessous par l'application réalisée par la fonction $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$:

1. $|z|>2$. 2. $|z|<\frac{1}{2}$. 3. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$.

4. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, $z\notin[0, i]$. 5. $|z|<1$, $z\notin[0, 1]$.

6. $|z|>1$, $z\notin[-2, -1]$, $z\notin[1, +\infty]$.

7. $\operatorname{Im} z>0$, $z\notin\left\{|z|=1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$.

8. $|z|<1$, $\operatorname{Im} z<0$, $z\notin\left[-i, -\frac{i}{2}\right]$.

9. $|z|<1$, $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

10. $|z|<1$, $-\frac{3\pi}{4}<\arg z<-\frac{\pi}{4}$.

35.20. Trouver les images des domaines D ci-dessous par l'application réalisée par la branche régulière de la fonction $w=z+\sqrt{z^2-1}$ séparée par la valeur de cette dernière au point indiqué (dans les égalités qui définissent le domaine, on pose $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$, a, b et α étant des constantes réelles) :

1. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}>1\right\}$ $(a>1)$, $w(\infty)=0$.
2. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1-a^2}<1\right\}$ $(0<a<1)$, $w(0)=i$.
3. D : $\{z\notin[-\infty, -1],\ z\notin[1, +\infty]\}$, $w(0)=i$.
4. D : $\{z\notin[-1, 1]\}$, $w(\infty)=\infty$.
5. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $w(+i\infty)=0$.
6. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}<1,\ y>0\right\}$, $(a>1)$, $w(+i0)=i$.
7. D : $\left\{\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}>1,\ x>0,\ y>0\right\}$, $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ $w(+\infty)=0$.
8. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}<1,\ z\notin[-1, 1]\right\}$, $(a>1)$, $w(+i0)=-i$.
9. D : $\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}<1,\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-1}>1\right\}$ $(a>b>1)$, $w(z)>1$ pour $b<z<a$.

35.21. Montrer que l'image du domaine $|z-ih|>\sqrt{1+h^2}$ par l'application $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ est représentée par tout le plan des w muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence dont les extrémités se situent aux points $w=\pm 1$ et qui passe par le point $w=ih$.

35.22. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 52 à 67 sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

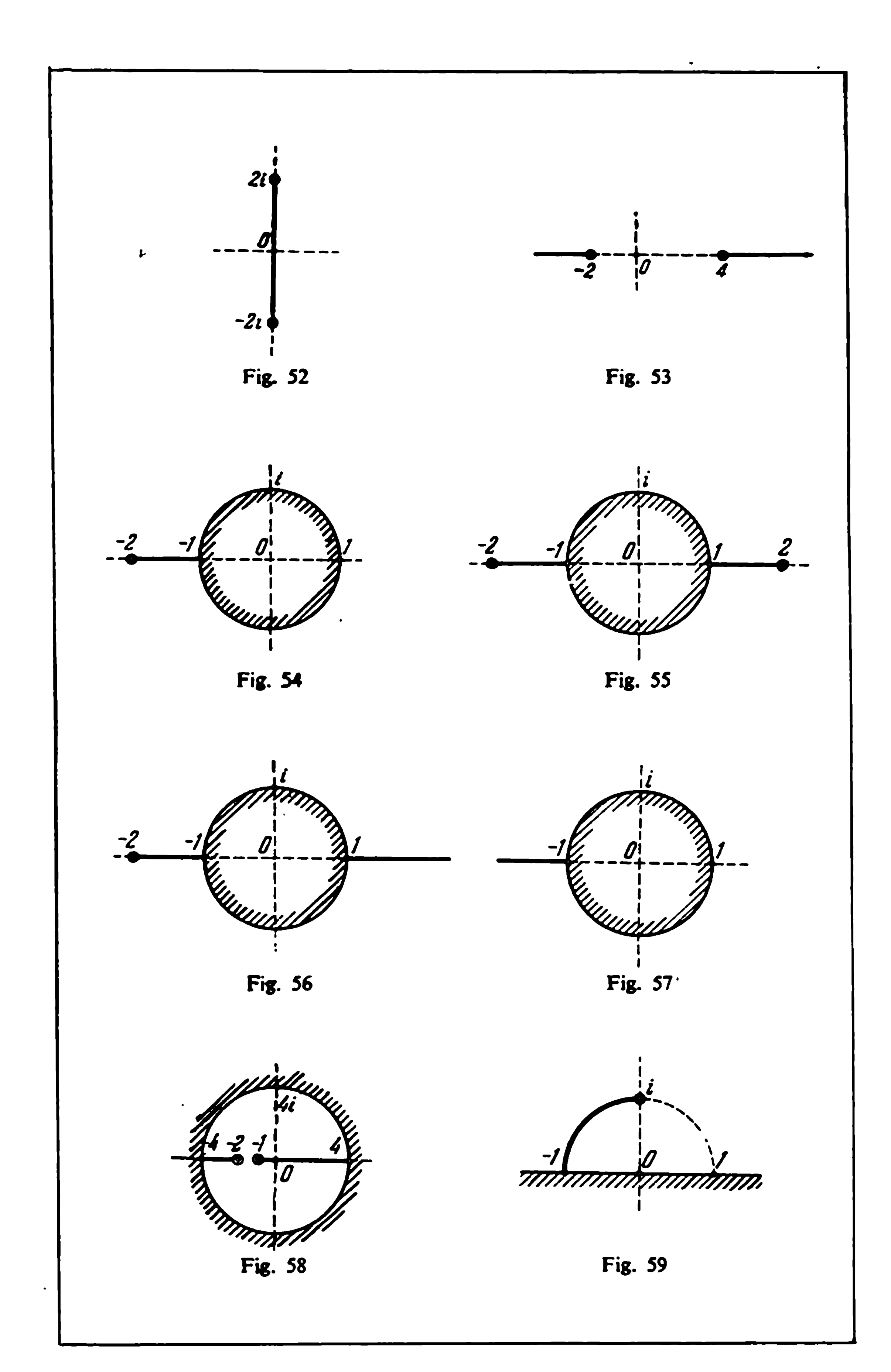


Fig. 52

Fig. 53

Fig. 54

Fig. 55

Fig. 56

Fig. 57

Fig. 58

Fig. 59

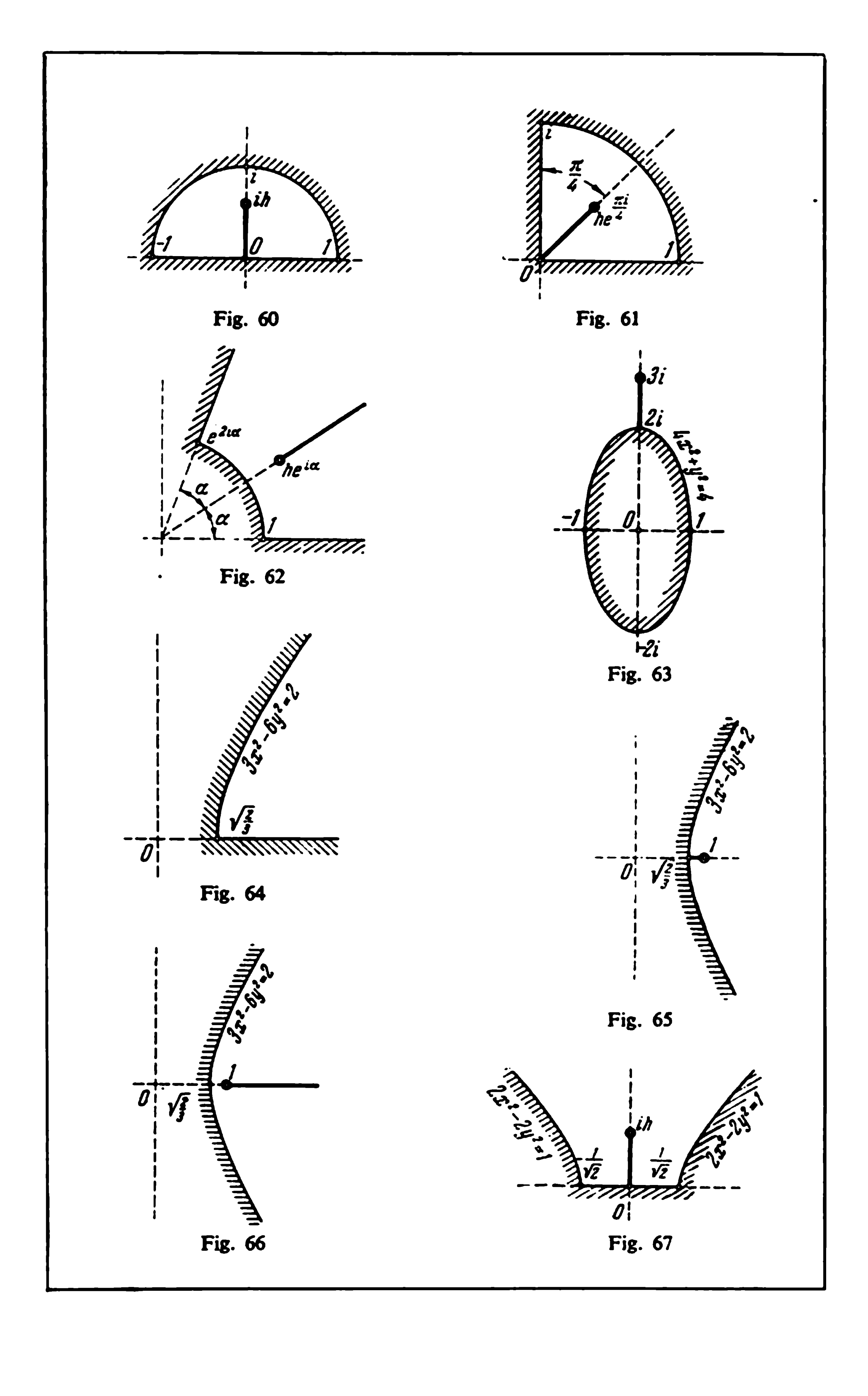


Fig. 60

Fig. 61

Fig. 62

Fig. 63

Fig. 64

Fig. 65

Fig. 66

Fig. 67

35.23. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 68 à 75 sur le disque $|w| < 1$.

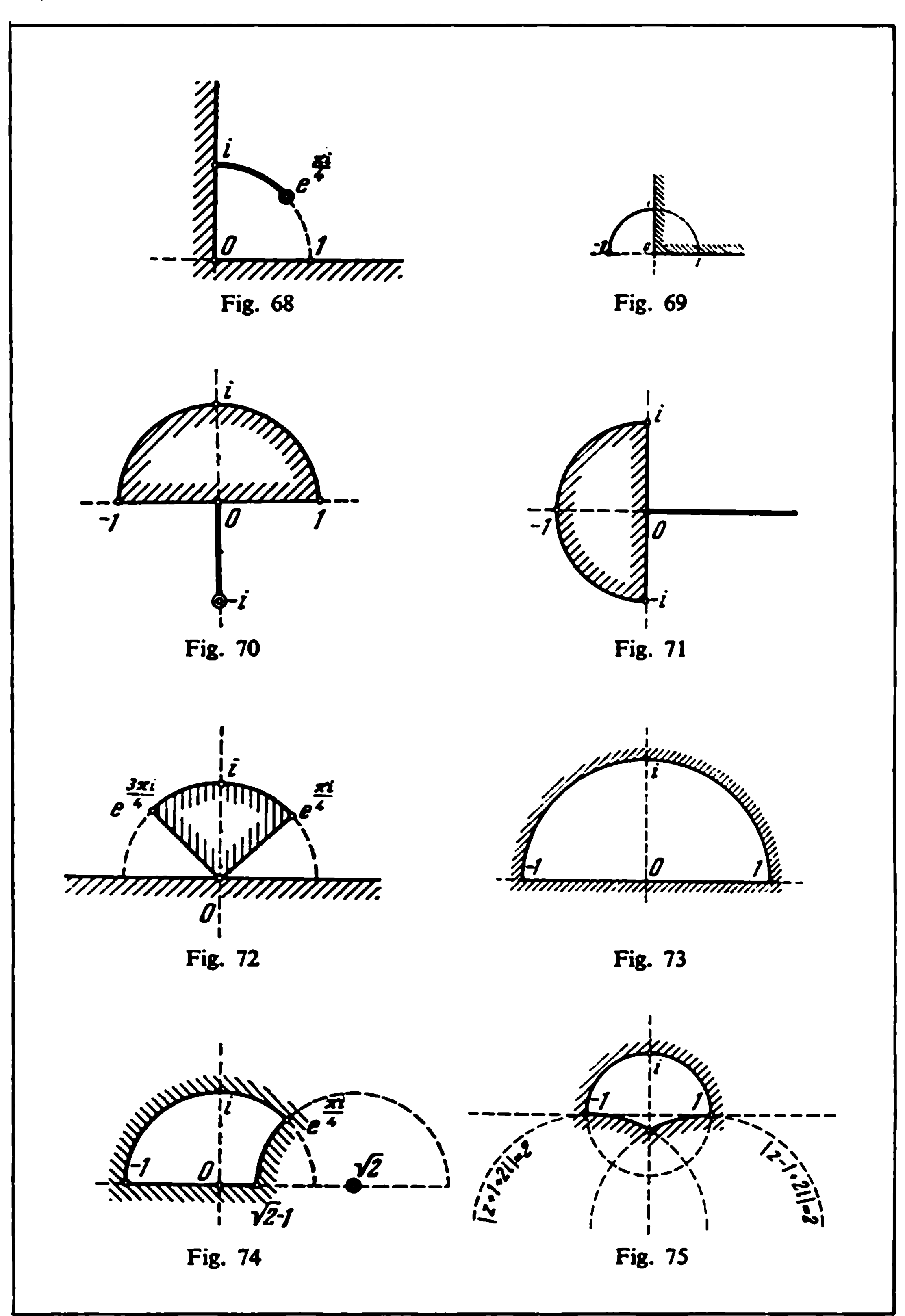


Fig. 68 Fig. 69 Fig. 70 Fig. 71 Fig. 72 Fig. 73 Fig. 74 Fig. 75

35.24. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du demi-disque $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, sur le disque $|w|<1$ et qui vérifie les conditions

$$w\left(\frac{i}{2}\right)=0, \ \arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=0.$$

35.25. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du domaine

$$x^2-y^2<1 (x=\operatorname{Re} z, \ y=\operatorname{Im} z)$$

sur le disque $|w|<1$ et qui vérifie les conditions $w(0)=0$, $w(1)=1$.

35.26. Trouver la fonct on $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du disque $|z|<1$ muni d'une coupure suivant le rayon $[-1, 0]$ sur le disque $|w|<1$ et qui vérifie les conditions

$$w(1)=-1, \ w(-1+i0)=\frac{7-4i\sqrt{2}}{9},$$

$$w(-1-i0)=\frac{7+4i\sqrt{2}}{9}.$$

35.27. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de tout le plan des z muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$, sur tout le plan des w présentant une coupure suivant le segment $[-1, 1]$ et qui satisfait aux conditions $w(1)=1$, $w(\infty)=\infty$.

* * *

35.28. Trouver les images des domaines D ci-dessous par les applications réalisées par les fonctions indiquées :

1. D : $\{-\pi<\operatorname{Im} z<0\}$, $w=e^z$.
2. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi\}$, $w=e^z$.
3. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi/2\}$, $w=e^z$.
4. D : $\{0<\operatorname{Im} z<2\pi, \operatorname{Re} z>0\}$, $w=e^z$.
5. D : $\{0<\operatorname{Im} z<\pi/2, \operatorname{Re} z>0\}$, $w=e^{2z}$.
6. D : $\{0<\operatorname{Re} z<\pi, \operatorname{Im} z>0\}$, $w=e^{iz}$.
7. D : $\{z\notin[0, +\infty]\}$, $w=\ln z$, $w(-1)=-\pi i$.
8. D : $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $w=\ln z$, $w(i)=\pi i/2$.
9. D : $\{z\notin[-\infty, 0], z\notin[1, +\infty]\}$, $w=\ln z$, $w(i)=\pi i/2$.
10. D : $\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$, $w=\ln z$, $w(i-i0)=-3\pi i/2$.
11. D : $\{|z|<1, z\notin[0, 1]\}$, $w=\ln z$, $w(-1+0)=-\pi i$.
12. D : $\{|\operatorname{Im} z|<\pi/4\}$, $w=\operatorname{th} z$.
13. D : $\{0<\operatorname{Re} z<\pi\}$, $w=\operatorname{tg} z$.
14. D : $\{0<\operatorname{Re} z<\pi/4\}$, $w=\operatorname{ctg} z$.

15. D : $\{0 < \operatorname{Re} z < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad w = \operatorname{tg} \pi z$.

16. D : $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $\quad w = \operatorname{ch} z$.

17. D : $\{\operatorname{Re} z > 0, \ -1 < \operatorname{Im} z < 0\}$, $\quad w = \operatorname{ch} \pi z$.

18. D : $\left\{\operatorname{Re} z > 0, \ 0 < \operatorname{Im} z < 1, \ z \notin \left[\frac{i}{2}, \ \frac{1+i}{2}\right]\right\}$, $\quad w = \operatorname{ch} \pi z$.

19. D : $\{|\operatorname{Im} z| < \pi, \ \operatorname{Re} z > 0\}$, $\quad w = \operatorname{sh} z$.

20. D : $\{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad w = \sin z$.

21. D : $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$, $\quad w(+0) = \pi i$.

22. D : $\{\operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$, $\quad w(2) > 0$.

23. D : $\left\{(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 < \frac{1}{2}\right\}$, $w = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$, $\quad w(0) = 2\pi i$.

24. D : $\{z \notin [-\infty, \ -1], \ z \notin [1, \ +\infty]\}$, $w = \arcsin z$, $w(0) = 0$.

35.29. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 76 à 91 sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.

35.30. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques réalisant les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 92 à 97 sur la bande $0 < \operatorname{Im} w < 1$.

35.31. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de la bande $|\operatorname{Im} z| < \pi$ sur la bande $|\operatorname{Im} w| < \pi$ et qui satisfait aux conditions :

$$w(\pi i) = +\infty, \quad w(+\infty) = -\pi i, \quad w(-\pi i) = -\infty.$$

35.32. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes des domaines D donnés ci-dessous sur le rectangle

$$0 < \operatorname{Re} w < 1, \ 0 < \operatorname{Im} w < a,$$

les valeurs de $a > 0$ étant telles que les points z_1, z_2, z_3, z_4 indiqués soient respectivement transformés en les points

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 1 + ai, \quad w_4 = ai,$$

et déterminer la constante a :

1. D : $\{1 < |z| < 2, \ \operatorname{Im} z > 0\}$,
$z_1 = 1, \ z_2 = 2, \ z_3 = -2, \ z_4 = -1$.

2. D : $\{|z - 8| < 16, \quad |z - 3| > 9, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
$z_1 = -6, \ z_2 = 12, \ z_3 = 24, \ z_4 = -8$.

3. D : $\{3x^2 + 4y^2 < 12, \quad z \notin [-2, \ 1]\}$ $\quad (x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z)$,
$z_1 = -2 + 0i, \ z_2 = -1 + 0i, \ z_3 = -1 - 0i, \ z_4 = -2 - 0i$.

4. D : $\{3x^2 + 4y^2 < 12, \ z \notin [-2, \ -1], \ z \notin [1, \ 2]\}$ $\quad (x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z)$,
$z_1 = -2 + 0i, \ z_2 = -2 - 0i, \ z_3 = 2 - 0i, \ z_4 = 2 + 0i$.

* * *

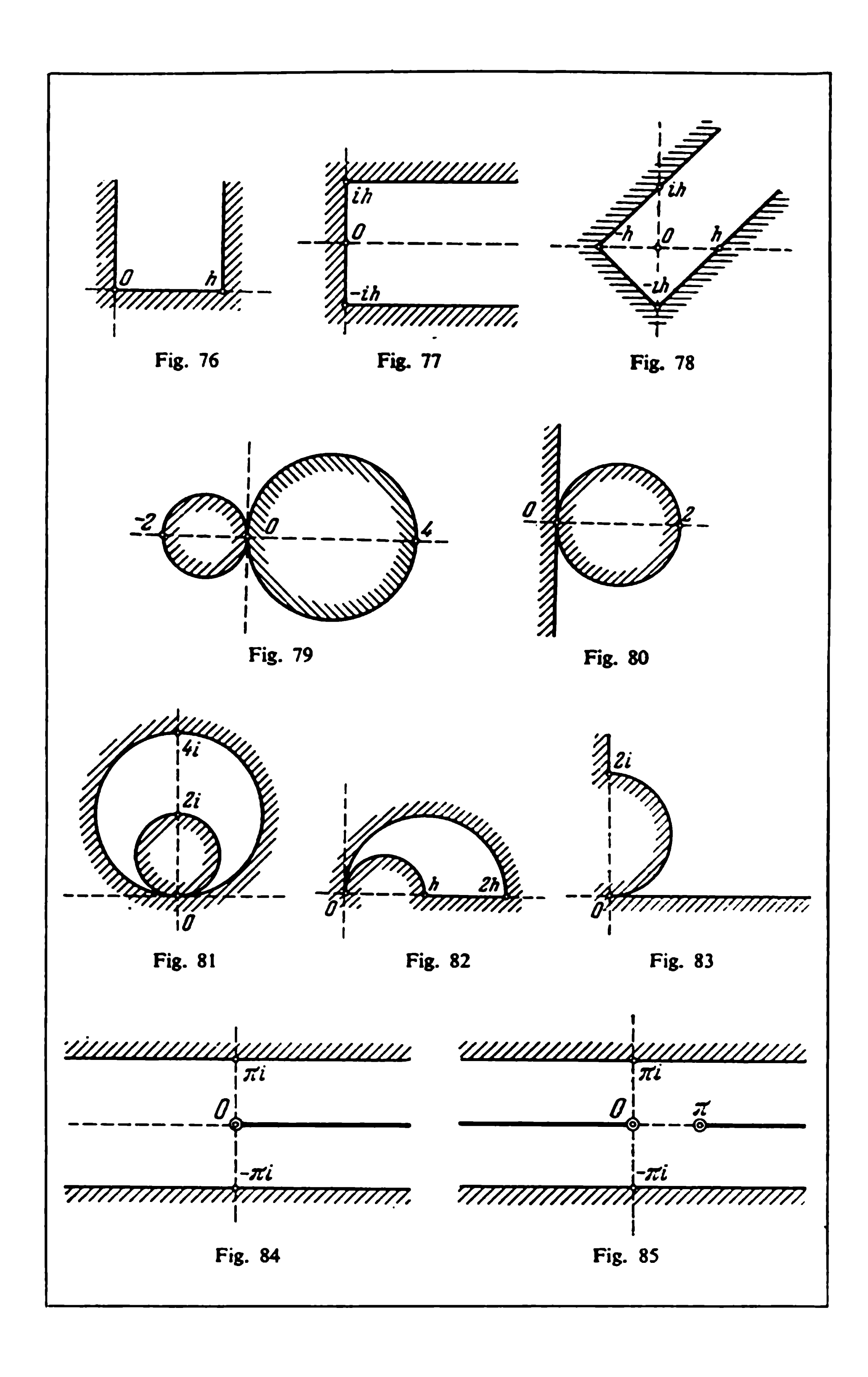


Fig. 76

Fig. 77

Fig. 78

Fig. 79

Fig. 80

Fig. 81

Fig. 82

Fig. 83

Fig. 84

Fig. 85

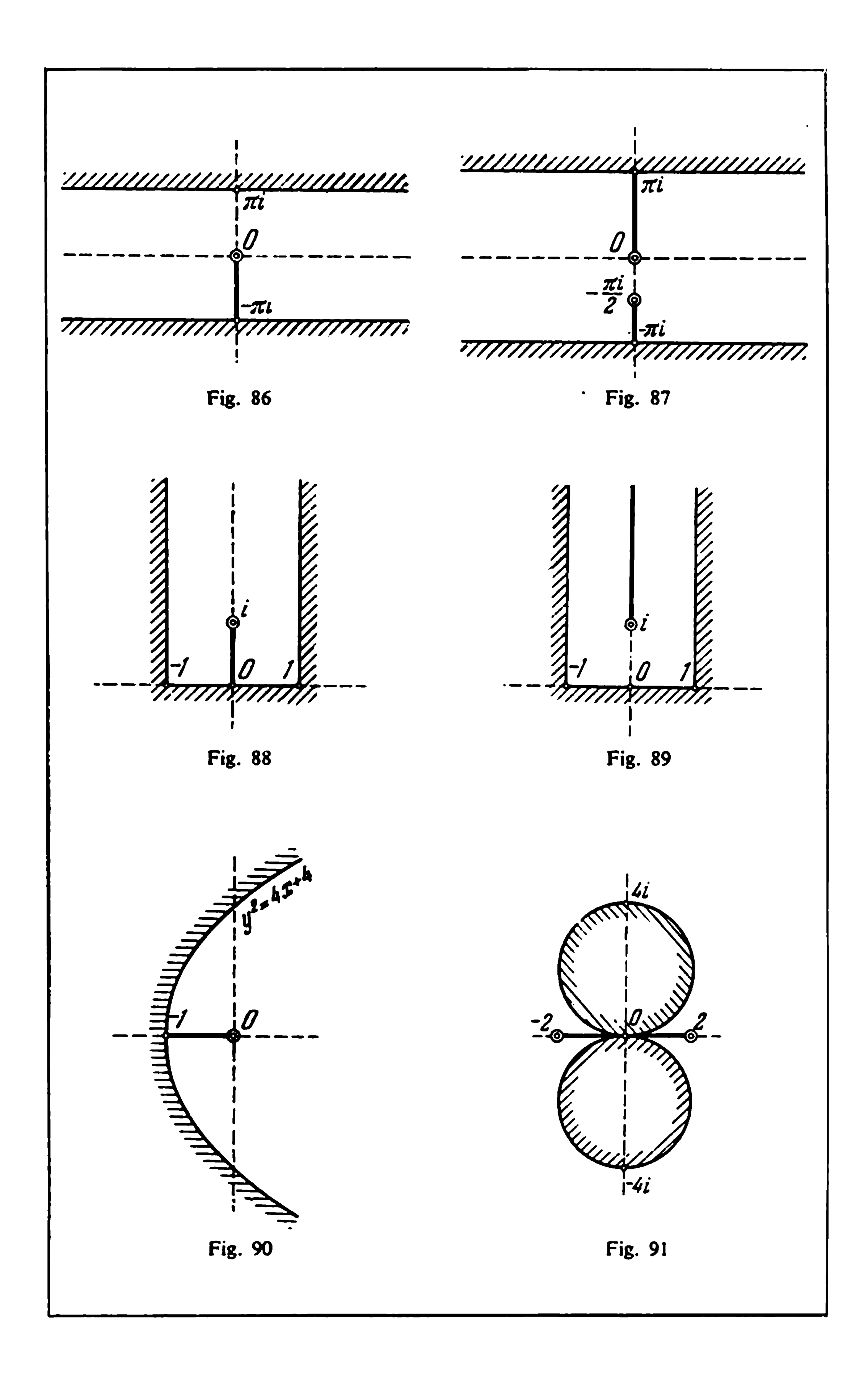


Fig. 86

Fig. 87

Fig. 88

Fig. 89

Fig. 90

Fig. 91

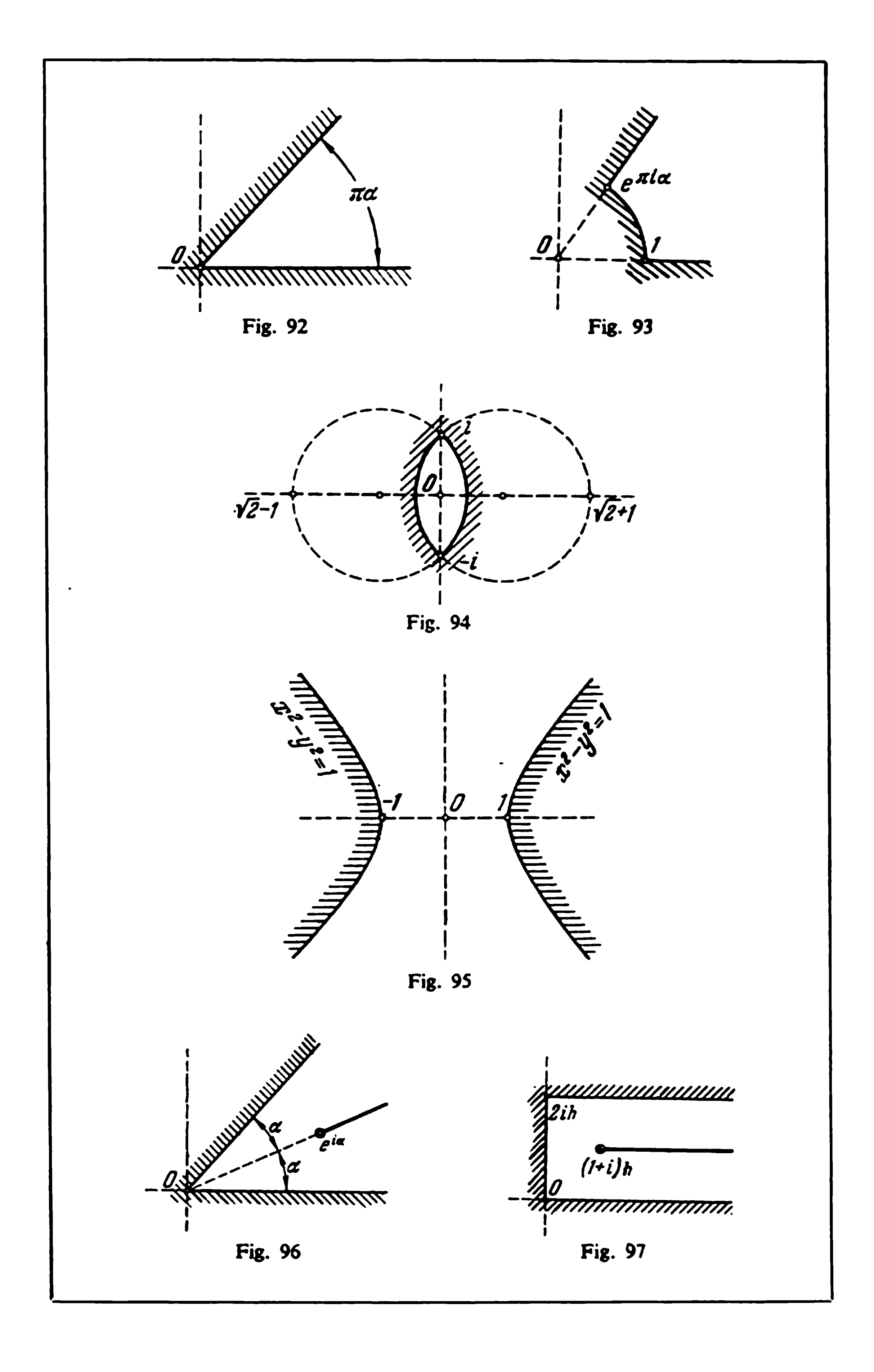


Fig. 92

Fig. 93

Fig. 94

Fig. 95

Fig. 96

Fig. 97

35.33. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes des domaines D ci-dessous sur le domaine $|w| < 1$ et qui vérifient les conditions $w(\infty) = \infty$, $w'(\infty) > 0$:

1. Domaine D : le plan des z muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence $|z + i \operatorname{ctg} \alpha| = \frac{1}{\sin \alpha}$ situé dans le demi-plan supérieur $(0 < \alpha < \pi)$.

2. Domaine D : $|z + i \operatorname{ctg} \alpha| < \frac{1}{\sin \alpha}$, $|z - i \operatorname{ctg} \alpha| < \frac{1}{\sin \alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$.

3. Domaine D : $|z + i \operatorname{ctg} \alpha| < \frac{1}{\sin \alpha}$, $\operatorname{Im} z > 0$ $(0 < \alpha < \pi)$.

4. Domaine D : $|z + i \operatorname{ctg} 2\alpha| < \frac{1}{\sin 2\alpha}$, $|z + i \operatorname{ctg} \alpha| > \frac{1}{\sin \alpha}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$.

35.34. Trouver $w'(\infty)$ pour les fonctions $w(z)$ du problème 35.33.

On appelle *rayon conforme* d'un domaine D par rapport à un point $z_0 \in D$ le rayon du disque $|w| < R$ sur lequel on peut réaliser une représentation conforme du domaine D par une fonction $w(z)$ vérifiant les conditions $w(z_0) = 0$, $w'(z_0) = 1$ si $z_0 \neq \infty$, et la condition $w(z) \sim 1/z$ $(z \to \infty)$ pour $z_0 = \infty$.

35.35. Trouver les rayons conformes des domaines D ci-dessous par rapport aux points z_0 indiqués:

1. D : $|z| < R$; $|z_0| < R$. 2. D : $\operatorname{Im} z > 0$; $\operatorname{Im} z_0 = 0$.

3. D : le disque $|z| < R$ muni de coupures suivant les segments de droite

$$[re^{i\alpha}, Re^{i\alpha}],\ [-re^{i\alpha},\ -Re^{i\alpha}] \quad (0 < r < R);\quad z_0 = 0.$$

4. D : l'extérieur du segment de droite $[a, b]$; $z_0 = \infty$.

5. D : l'extérieur d'un arc de circonférence correspondant à l'angle au centre 2α et ayant pour extrémités les points $z = a$ et $z = b$; $z_0 = \infty$.

RÉPONSES

35.01.

1. La famille de droites $\operatorname{Re} w = 1/C$.
2. La famille de circonférences

$$\left|w + \frac{1+i}{2C}\right| = \frac{1}{C\sqrt{2}}.$$

3. La famille de droites $\operatorname{Im} w = -C \operatorname{Re} w$.

35.02.

1. La famille de demi-plans $\operatorname{Re} w > 1/C$.
2. La famille de demi-plans $\operatorname{Re} w < 1/C$.
3. La famille de demi-plans $\operatorname{Im} w < -1/C$.
4. La famille de demi-plans $\operatorname{Im} w < -C \operatorname{Re} w$.
5. La famille de disques

$$\left|w - \frac{|a|^2}{a(|a|^2 - R^2)}\right| < \frac{R}{|a|^2 - R^2}.$$

6. La famille de disques

$$\left|w - \frac{|a|^2}{a(|a|^2 - R^2)}\right| > \frac{R}{R^2 - |a|^2}.$$

35.03.

1. $|w-1+2i|<4$. 2. $|w|<1$. 3. $|w-2|>4$. 4. $\operatorname{Re} w<1/4$.

35.04.

1. $\operatorname{Re} w+\operatorname{Im} w<3$. 2. $\operatorname{Re} w-\operatorname{Im} w<1$.
3. $|w|<1$. 4. $|w-3|>1$. 5. $|w|>1$.

35.05.

1. $-\frac{\pi}{2}<\arg w<0$. 2. $w\notin[0,+\infty]$.
3. $-1/2<\operatorname{Im} w<0$. 4. $\operatorname{Re} w>-1$, $|w-2/3|>4/3$.

35.06.

1. $w=2iz+4$, $|w-2|<2$. 2. $w=\frac{2z}{z-1}$, $|w-2|>2$.
3. $w=\frac{(1-i)z}{z-1-i}$, $\operatorname{Re} w>0$.

35.07.

1. $w=(1+i)\frac{z+i}{z-i}$, $|w-1|>1$. 2. $w=\frac{z-i}{z+i}$, $\operatorname{Im} w>0$.
3. $w=2i\frac{z-1}{z+1}$, $|w|<2$.

35.08.

1. $w=\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}e^{i\alpha}$. 2. $w=\frac{(e^{i\alpha}-w_0z_0)z+w_0-z_0e^{i\alpha}}{(w_0e^{i\alpha}-\bar{z}_0)z+1-\bar{w}_0z_0e^{i\alpha}}$.
3. $w=i\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}e^{i\alpha}$. 4. $w=\frac{(w_0+ie^{i\alpha})z-\bar{z}_0w_0-iz_0e^{i\alpha}}{(1+i\bar{w}_0e^{i\alpha})z-\bar{z}_0-iz_0\bar{w}_0e^{i\alpha}}$.
5. $w=\frac{(w_0-\bar{w}_0e^{i\alpha})z+z_0\bar{w}_0e^{i\alpha}-w_0\bar{z}_0}{(1-e^{i\alpha})z+z_0e^{i\alpha}-\bar{z}_0}$. 6. $w=\frac{2z-1}{2-z}$.
7. $w=\frac{2z+i}{2-iz}$. 8. $w=\frac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$. 9. $w=\frac{i-1-z}{z+1+i}$.
10. $w=\frac{iz+1}{z+i}$. 11. $w=\frac{i-1-iz}{z-1+i}$. 12. $w=\frac{2z+2}{1-z}$.
13. $w=\frac{z-1}{z+2}$. 14. $w=\frac{z}{2-z}$. 15. $w=\frac{2iz+2}{z+3-i}$.
16. $w=-\frac{z}{z+2}$.

35.09.

1. $w=e^{i\alpha}\cdot\frac{3z}{z+24}$, $\operatorname{Im}\alpha=0$. 2. $w=2e^{i\alpha}\cdot\frac{z-3}{z+3}$, $\operatorname{Im}\alpha=0$.

35.10.

1. $\arg w=2\alpha$. 2. $\operatorname{Re} w=a^2-\frac{1}{4a^2}(\operatorname{Im} w)^2$.
3. $\operatorname{Re} w=-a^2+\frac{1}{4a^2}(\operatorname{Im} w)^2$. 4. $|w|=\varrho^2$, $\operatorname{Re} w>0$.

35.11.

1. $w \notin [0, +\infty]$. 2. $w \in [-\infty, 0]$.

3. $\operatorname{Im} w > 0$. 4. $|w| < 1$, $\frac{\pi}{2} < \arg w < \pi$.

5. $\operatorname{Re} w < -1 + \frac{1}{4} (\operatorname{Im} w)^2$. 6. $\operatorname{Re} w > 1 - \frac{1}{4} (\operatorname{Im} w)^2$.

7. $|w| < 4$, $\operatorname{Im} w > 0$. 8. $|w| > \frac{1}{4}$, $w \notin \left[-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

35.12.

1. $-\pi < \arg w < -\pi/2$. 2. $|\arg w| < \pi/4$.

3. $\operatorname{Im} w < 0$. 4. $\operatorname{Re} w > 0$, $w \notin [0, 1]$.

5. $|w| < 1$, $0 < \arg w < \pi/2$. 6. $|w| > 1$, $|\pi/2 - \arg w| < \pi/8$.

7. $\operatorname{Im} w < -\sqrt{2}/2$. 8. $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 1$.

35.13.

1. $\arg w = 3\pi/4$. 2. $|w| = 1$, $\pi/2 < \arg w < \pi$.

3. $|w| < 1$, $-\pi < \arg w < \pi/2$. 4. $|w| < 1/8$, $|\pi - \arg w| < 3\pi/4$.

5. $w \notin [-\infty, 1]$.

35.14.

1. Fig. 37 : $w = \sqrt{z^2 + h^2}$. 2. Fig. 38 : $w = \left(\sqrt{z} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$.

3. Fig. 39 : $w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 4. Fig. 40 : $w = \left(i\frac{1+z}{1-z}\right)^{2/3}$.

5. Fig. 41 : $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. 6. Fig. 42 : $w = i\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2$.

7. Fig. 43 : $w = i\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2/3}$. 8. Fig. 44 : $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4$.

9. Fig. 45 : $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{4/5}$. 10. Fig. 46 : $w = \sqrt{\frac{z}{1-z}}$.

11. Fig. 47 : $w = \sqrt{\frac{z}{z-i}}$. 12. Fig. 48 : $w = \sqrt{\frac{z^2+4}{z^2+1}}$.

13. Fig. 49 : $w = e^{\pi i/4}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$. 14. Fig. 50 : $w = \frac{z^2}{\sqrt{z^4 - 1}}$.

15. Fig. 51 : $w = \frac{\sqrt{z^2+1}}{z+1}$.

35.15.

$$w = \frac{2i - \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

35.16.

$$w = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

35.17.

$$w=\frac{3+4i\sqrt{z^2+1}}{3i+4\sqrt{z^2+1}}.$$

35.18.

1. $\operatorname{Im} w=0,\ -1<\operatorname{Re} w<1.$
2. $\operatorname{Im} w=0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\sqrt{2}}{2}.$
3. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1 \quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w).$
4. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1 \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} v).$
5. $u^2-v^2=1/2,\ u>0 \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} v).$
6. $u^2-v^2=1/2,\ u<0 \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} w).$

35.19.

1. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1 \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} w).$
2. $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1 \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} w).$
3. $u^2-v^2<1/2(u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} w).$
4. $u^2-v^2<1/2, \quad w\notin[-i\infty,\ 0] \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} w).$
5. $w\notin[-1,\ +\infty].$ 6. $w\notin\left[-\frac{5}{4},\ +\infty\right].$
7. $w\notin\left[-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad w\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right].$
8. $\operatorname{Im} w>0, \quad w\notin\left[0,\ \frac{3i}{4}\right].$ 9. $-\frac{\pi}{2}<\arg w<0.$
10. $u^2-v^2<\frac{1}{2}, \quad v>0 \quad (u=\operatorname{Re} w, \quad v=\operatorname{Im} w).$

35.20.

1. $|w|<a-\sqrt{a^2-1},$ 2. $\alpha<\arg w<\pi-\alpha,\ \alpha=\arcsin\sqrt{1-a^2}.$
3. $\operatorname{Im} w>0.$ 4. $|w|>1.$
5. $|w|<1, \quad \operatorname{Im} w<0.$ 6. $1<|w|<a+\sqrt{a^2-1},\ \operatorname{Im} w>0.$
7. $|w|<1,\ -\alpha<\arg w<0.$ 8. $a-\sqrt{a^2-1}<|w|<1.$
9. $b+\sqrt{1+b^2}<|w|<a+\sqrt{1+a^2}.$

35.22.

1. Fig. 52 : $w=i\,\frac{2+\sqrt{z^2+4}}{z}.$ 2. Fig. 53 : $w=z-1+\sqrt{z^2-2z-8}.$
3. Fig. 54 : $w=\sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{-z^2+2z-1}}.$
4. Fig. 55 : $w=\sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{-2z^2+5z-2}}.$ 5. Fig. 56 : $w=\sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{z}}.$

6. Fig. 57 : $w=i\dfrac{z-1}{\sqrt{z}}$. 7. Fig. 58 : $w=\sqrt{\dfrac{z^2+10z+16}{z^2+17z+16}}$.

8. Fig. 59 : $w=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{z-1}$. 9. Fig. 60 : $w=\sqrt{1+\dfrac{z^2(1-h^2)^2}{h^2(1+z^2)^2}}$.

10. Fig. 61 : $w=\sqrt{1+\dfrac{z^4(1-h^4)^2}{h^4(1+z^4)^2}}$.

11. Fig. 62 : $w=\sqrt{1+\dfrac{z^{\pi/\alpha}(1-h^{\pi/\alpha})^2}{h^{\pi/\alpha}(1+z^{\pi/\alpha})^2}}$.

12. Fig. 63 : $w=\dfrac{1}{\zeta-1}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}\zeta}{\sqrt{3}}-\zeta^2-4\zeta-1}$, $\zeta=\dfrac{i}{3}(z+\sqrt{z^2+3})$.

13. Fig. 64 : $w=(z+\sqrt{z^2-1})^{\pi/\alpha}+(z-\sqrt{z^2-1})^{\pi/\alpha}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Fig. 65 : $w=i\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\pi/2\alpha}-(z-\sqrt{z^2-1})^{\pi/2\alpha}\right]$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15. Fig. 66 : $w=(z+\sqrt{z^2-1})^{\pi/\alpha}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16. Fig. 67 : $w=\sqrt{h^2(1+h^2)-z^2(z^2-1)}$.

35.23.

1. Fig. 68 : $w=\dfrac{z^2+i(z^2-1)\sqrt{z^4-1}}{z^4-z^2+1}$.

2. Fig. 69 : $w=\dfrac{3\zeta-2i(\zeta+1)\sqrt{\zeta^2-\zeta+1}}{2\zeta^2+\zeta+2}$, $\zeta=(-iz)^{2/3}$.

3. Fig. 70 : $w=\dfrac{3\zeta-2i(1-\zeta)\sqrt{\zeta^2+\zeta+1}}{2\zeta^2-\zeta+2}$, $\zeta=\left(i\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{2/3}$.

4. Fig. 71 : $w=\dfrac{\zeta-2i(\zeta-1)\sqrt{\zeta^2-\zeta+1}}{2\zeta^2-3\zeta+2}$, $\zeta=\left(\dfrac{1-iz}{z-i}\right)^{2/3}$.

5. Fig. 72 : $w=\dfrac{\zeta-2i(\zeta-1)\sqrt{\zeta^2-\zeta+1}}{2\zeta^2-3\zeta+2}$, $\zeta=\left(\dfrac{1-iz^2}{z^2-i}\right)^{2/3}$.

6. Fig. 73 : $w=\dfrac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1}$.

7. Fig. 74 : $w=\dfrac{\zeta^2+2i\zeta+1}{\zeta^2-2i\zeta+1}$, $\zeta=(3-2\sqrt{2})\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

8. Fig. 75 : $w=\dfrac{\zeta^3-2\zeta^{3/2}-1}{\zeta^3+2\zeta^{3/2}-1}$, $\zeta=\dfrac{(2-\sqrt{3})z+i}{z+(2-\sqrt{3})i}$.

35.24.

$w=\dfrac{2i(1+z^2)-3z}{3iz-2(1+z^2)}$.

35.25.

$$w=\frac{2-i2+(z+\sqrt{z^2-2})^2}{2+i2-(z+\sqrt{z^2-2})^2}.$$

35.26.

$$w=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{z-z\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{z-z\sqrt{2}}}.$$

35.27.

$$w=\frac{1+i}{4z}[(z+1)(z-i)+(z-1)\sqrt{z^2-1}].$$

35.28.

1. $\operatorname{Im} w<0$. 2. $w\notin[-\infty, 0]$.
3. $\operatorname{Re} w>0$. 4. $|w|>1$, $w\notin[1, +\infty]$.
5. $|w|>1$, $\operatorname{Im} w>0$. 6. $|w|<1$, $\operatorname{Im} w>0$.
7. $-2\pi<\operatorname{Im} w<0$. 8. $0<\operatorname{Im} w<\pi$.
9. $|\operatorname{Im} w|<\pi$, $w\notin[0, +\infty]$. 10. $|3\pi/2+\operatorname{Im} w|<\pi/2$, $\operatorname{Re} w<0$.
11. $-2\pi<\operatorname{Im} w<0$, $\operatorname{Re} w<0$. 12. $|w|<1$.
13. $w\notin[-i, i]$. 14. $|w|>1$, $\operatorname{Re} w>0$.
15. $\operatorname{Im} w>0$, $w\notin[0, i]$. 16. $w\notin[-\infty, -1]$, $w\notin[1, +\infty]$.
17. $\operatorname{Im} w<0$. 18. $\operatorname{Im} w>0$, $w\notin[0, \operatorname{sh}\pi/2]$.
19. $w\notin[-\infty, 0]$, $w\notin[-i, i]$. 20. $w\notin[-1, 1]$, $w\notin[0, +i\infty]$.
21. $\pi/2<\operatorname{Im} w<3\pi/2$, $\operatorname{Re} w<0$. 22. $0<\operatorname{Im} w<\pi/2$, $\operatorname{Re} w>0$.
23. $7\pi/4<\operatorname{Im} w<9\pi/4$, $\operatorname{Re} w>0$. 24. $|\operatorname{Re} w|<\pi/2$.

35.29.

1. Fig. 76 : $w=-\cos\frac{\pi z}{h}$. 2. Fig. 77 : $w=i\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}$.
3. Fig. 78 : $w=i\operatorname{sh}\frac{\pi(z-iz+h)}{2h}$. 4. Fig. 79 : $w=\exp\left(\frac{4\pi i}{3z}+\frac{2\pi i}{3}\right)$.
5. Fig. 80 : $w=\exp(2\pi i/z)$. 6. Fig. 81 : $w=\exp(4\pi/z)$.
7. Fig. 82 : $w=-\cos\frac{2\pi h}{z}$. 8. Fig. 83 : $w=-\operatorname{ch}2\pi/z$.
9. Fig. 84 : $w=\sqrt{1-e^{-z}}$. 10. Fig. 85 : $w=\sqrt{\frac{e^z-e^\pi}{e^z-1}}$.
11. Fig. 86 : $w=\sqrt{1-\frac{i}{\operatorname{sh}\frac{z}{2}}}$. 12. Fig. 87 : $w=\sqrt{1+\frac{i}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{z}{2}}}$.
13. Fig. 88 : $w=\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}}$.
14. Fig. 89 : $w=\sqrt{1+\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi z}{2}}}$. 15. Fig. 90 : $w=i\operatorname{sh}\frac{\pi\sqrt{z}}{2}$.

16. Fig. 91 : $w=\sqrt{\dfrac{e^{2\pi}-\exp\dfrac{4\pi}{z}}{e^{-2\pi}-\exp\dfrac{4\pi}{z}}}.$

35.30.

1. Fig. 92 : $w=\dfrac{1}{\pi\alpha}\ln z.$ 2. Fig. 93 : $w=\dfrac{1}{\pi}\ln(z^{1/\alpha}+z^{-1/\alpha}).$

3. Fig. 94 : $w=\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{z+i}{i-z}+\dfrac{i}{2}.$

4. Fig. 95 : $w=\dfrac{2}{\pi}\ln\left(z+\sqrt{z^2-2}\right)-\dfrac{i}{2}.$

5. Fig. 96 : $w=-\dfrac{1}{2\pi}\ln(1+z^{-\pi/\alpha}).$

6. Fig. 97 : $w=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{sh}^2\,\pi/2}{\mathrm{ch}^2\,\pi z/2h}\right).$

35.31.

$$w=2\ln\frac{i+e^{z/2}}{1+ie^{z/2}}.$$

35.32.

1. $a=\dfrac{\pi}{\ln 2},\quad w=\dfrac{\ln z}{\ln 2}.$ 2. $a=\dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{3}{2},\quad w=\dfrac{i}{\pi}\ln\dfrac{-3z}{z+24}.$

3. $a=\dfrac{2\pi}{\ln(2+\sqrt{3})},\quad w=-\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\ln\dfrac{\sqrt{z^2-1}-z}{2+\sqrt{3}}.$

4. $a=\dfrac{\pi}{\ln(2+\sqrt{3})},\quad w=\dfrac{1}{2\ln(2-\sqrt{3})}\ln\dfrac{\sqrt{z^2-1}-z}{2+\sqrt{3}}.$

35.33.

1. $w=\dfrac{\sqrt{z+1}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}+\sqrt{z-1}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}}.$

2. $w=\dfrac{(z+1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}+(z+1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}}{(z+1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}-(z-1)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}}.$

3. $w=-i\dfrac{(z+1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}e^{\frac{2\pi^2 i}{3\pi+2\alpha}}-(z-1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}e^{-\frac{2\pi^2 i}{3\pi+2\alpha}}}{(z+1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}-(z-1)^{\frac{2\pi}{3\pi+2\alpha}}}.$

4. $w=-i\dfrac{(z+1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}e^{\frac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}i}-(z-1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}e^{-\frac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}i}}{(z+1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}-(z-1)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}.$

35.34.

1. $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. 2. $2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)$.

3. $\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{\pi}\right)\sin\frac{2\pi^2}{3\pi+2\alpha}$. 4. $\left(2-\frac{\alpha}{\pi}\right)\sin\frac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}$.

35.35.

1. $\frac{R^2-|z_0|^2}{R}$. 2. $2\,\mathrm{Im}\,z_0$. 3. $\frac{R^2+r^2}{2r}$.

4. $\frac{|b-a|}{4}$. 5. $\frac{|b-a|}{4\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.

§ 36. Recherche des représentations conformes à l'aide du principe de symétrie

Dans le cas où le domaine à appliquer est symétrique par rapport à une droite quelconque ou à une circonférence, le problème de la représentation conforme de ce domaine sur un disque ou sur un demi-plan peut être ramené au problème de la représentation conforme de l'une de ses moitiés. La démonstration de ce qui vient d'être dit est basée sur le principe de symétrie dont la formulation est donnée au paragraphe 34.

36.01. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du domaine $\{\mathrm{Im}\,z>0,\ z\notin[0, 3i]\}$ sur le demi-plan $\mathrm{Im}\,w>0$ et qui transforme la demi-droite $[-\infty, -4]$ en la demi-droite $[-\infty, 0]$. Ayant trouvé la fonction $w(z)$, s'assurer qu'elle établit une représentation conforme du domaine $\{z\notin[-4, +\infty],\ z\notin[-3i, 3i]\}$ donné sur la fig. 98 sur tout le plan des w muni d'une coupure suivant la demi-droite $[0, +\infty]$.

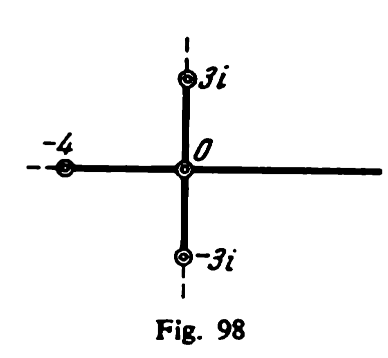


Fig. 98

Remarque. Strictement parlant, la dernière application n'est pas réalisée par la fonction $w(z)$ mais par un certain prolongement analytique de celle-ci. Quand même, la fonction $w(z)$ est recherchée sous la forme d'une formule élémentaire contenant tous les prolongements analytiques nécessaires.

36.02. Notons $w(z)$ la fonction qui réalise une représentation conforme de l'angle $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ sur le secteur $|w|>1$, $0<\arg w<\frac{\pi}{2}$ et qui vérifie les conditions $w(1)=1$, $w(i)=i$, $w(\infty)=\infty$. Ayant trouvé la fonction $w(z)$, se convaincre que:

1) elle établit une représentation conforme du domaine donné sur la fig. 99 sur le domaine $\mathrm{Im}\,w>0$, $|w|>1$;

2) elle établit une représentation conforme du domaine donné sur la fig. 100 sur le domaine $|w|>1$.

36.03. Notons $w(z)=w(z;\ z_1,\ z_2,\ z_3)$ la fonction qui réalise une représentation conforme du demi-disque $|z|<1$, $\mathrm{Im}\,z>0$ sur le même demi-

disque dans le plan des w et qui vérifie les conditions:

$$w(z_1)=1, \quad w(z_2)=i, \quad w(z_3)=-1$$

(les points z_1, z_2, z_3 se trouvent sur la frontière du demi-disque $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$). Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les points z_1, z_2, z_3 pour que la fonction $w(z)$ réalise une représentation conforme du disque $|z|<1$ sur :

1. Le disque $|w|<1$.
2. Le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.
3. Le domaine représenté sur la fig. 101.
4. Le domaine représenté sur la fig. 102.
5. Le domaine représenté sur la fig. 103.
6. Le domaine représenté sur la fig. 104.

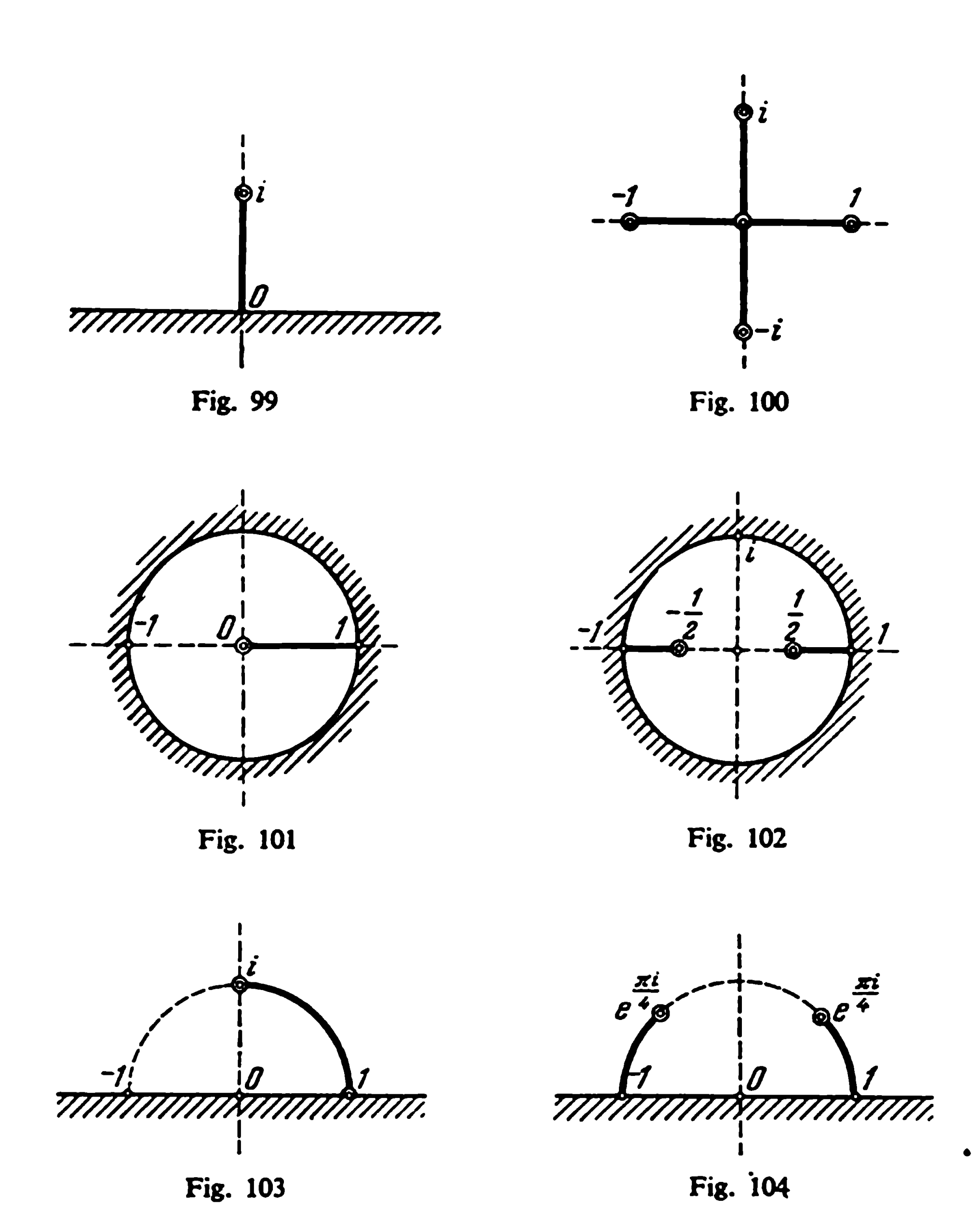


Fig. 99
Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104

36.04. Désignons par $w(z;\, z_1,\, z_2,\, z_3)$ la fonction qui réalise une représentation conforme du secteur

$$|z| < 1, \quad 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \quad (n > 1 \text{ entier})$$

sur le même secteur dans le plan des w et qui vérifie les conditions:

$$w(z_1;\, z_1,\, z_2,\, z_3) = 1, \quad w(z_2;\, z_1,\, z_2,\, z_3) = e^{2\pi i/n},\; w(z_3;\, z_1,\, z_2,\, z_3) = 0$$

(z_1, z_2, z_3 sont des points situés sur la frontière du secteur $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$). Dire à quelles conditions doivent satisfaire les points z_1, z_2, z_3 pour que la fonction $w(z;\, z_1,\, z_2,\, z_3)$ réalise une représentation conforme du disque $|z| < 1$ muni de coupures suivant les segments

$$\left[\frac{1}{2}\, e^{2\pi ik/n},\; e^{2\pi ik/n}\right], \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1,$$

sur le disque $|w| < 1$.

36.05. Soit D un domaine fini simplement connexe symétrique par rapport à l'axe réel, et soit D^+ la moitié supérieure de ce domaine. Notons $[a, b]$ le segment suivant lequel l'axe réel coupe le domaine D, et $\psi(z)$ la fonction qui réalise une représentation conforme du domaine D sur le demi-plan $\operatorname{Im} \psi > 0$, et supposons que les valeurs de $\psi(z)$ sur le segment $[a, b]$ soient finies. Montrer que :

1. La fonction

$$w(z) = \sqrt{\frac{\psi(z) - \psi(b)}{\psi(z) - \psi(a)}}$$

réalise une représentation conforme du domaine D sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.

2. La fonction

$$w(z) = \frac{\sqrt{[\psi(z) - \psi(a)]\,[\psi(b) - \psi(z)]} - \frac{1}{2}\,[\psi(b) - \psi(a)]}{\psi(z) - \frac{1}{2}\,[\psi(b) + \psi(a)]}$$

réalise une représentation conforme du domaine D sur le disque $|w| < 1$.

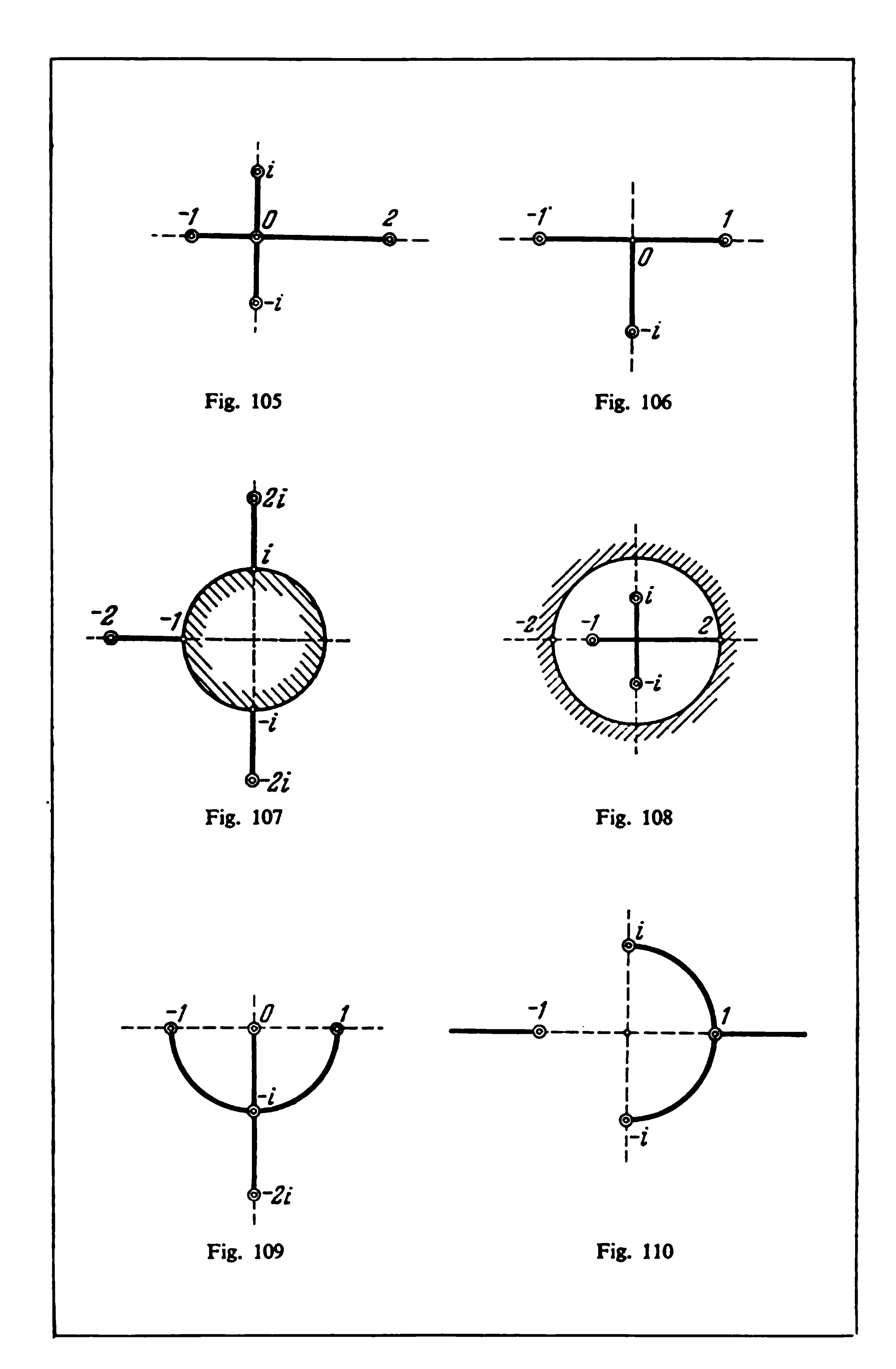
Remarque. Rigoureusement parlant, la fonction $\psi(z)$ n'est définie que dans le domaine D^+, car il s'agit du prolongement analytique de cette fonction à travers le segment $[a, b]$ dans le domaine D. L'existence d'un tel prolongement analytique découle du principe de symétrie.

36.06. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques qui réalisent les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 105 à 116 sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.

36.07. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du domaine

$$y^2 < 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \quad (x = \operatorname{Re} z,\; y = \operatorname{Im} z)$$

(p est une constante réelle) sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.


i
-1
0
2
-i
Fig. 105
-1
1
0
-i
Fig. 106
2i
i
-2
-1
-i
-2i
Fig. 107
i
-2
-1
2
-i
Fig. 108
-1
0
1
-i
-2i
Fig. 109
i
-1
1
-i
Fig. 110

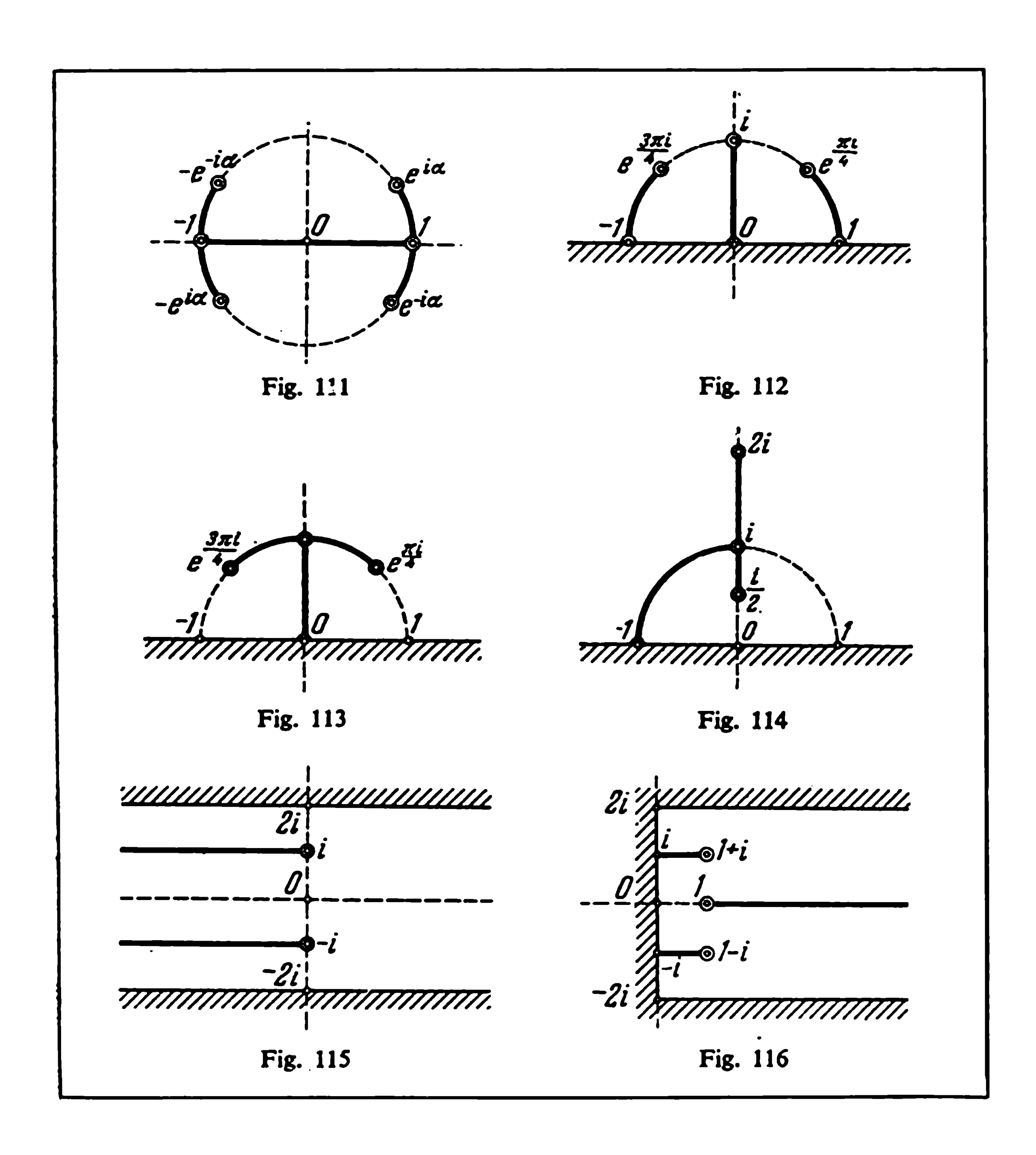


Fig. 111 Fig. 112

Fig. 113 Fig. 114

Fig. 115 Fig. 116

36.08. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du domaine

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}>1,\ x>0 \qquad (x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z)$$

$\left(\alpha \text{ constant, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

Si le domaine à appliquer peut être séparé en plus de deux parties symétriques (mais en un nombre fini de pareilles parties), il est rationnel d'appliquer ce domaine sur un disque au lieu de l'appliquer sur un demi-plan. Dans ce cas, chaque partie symétrique est appliquée sur un secteur de ce disque (voir les problèmes 36.02 et 36.04).

36.09. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques qui réalisent les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 117 à 120 sur le disque $|w|<1$.

Dans le cas où le domaine à appliquer peut être séparé en une infinité de parties symétriques, chacune de ces parties est appliquée sur une bande, le domaine entier étant appliqué sur un demi-plan.

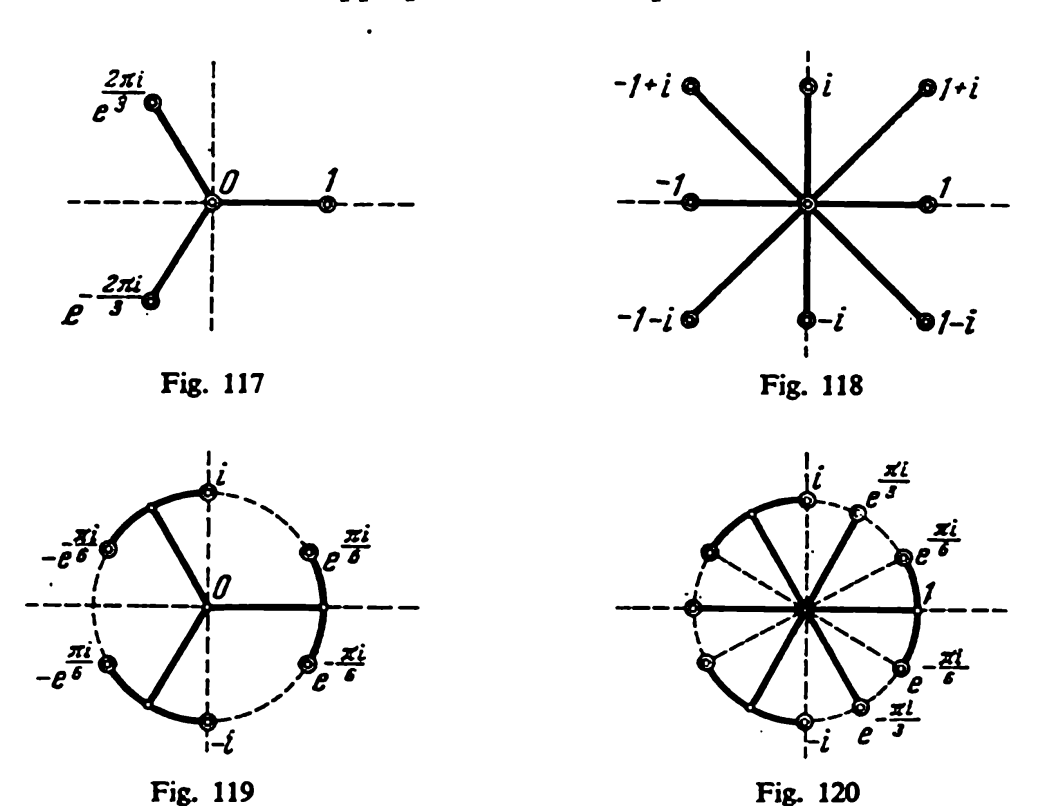


Fig. 117

Fig. 118

Fig. 119

Fig. 120

36.10. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du domaine

$$\{z \notin [k\pi i,\ k\pi i+\infty] \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)\}$$

sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

36.11. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du domaine

$$\{\operatorname{Im} z>0,\ z \notin [k\pi,\ k\pi+\pi i] \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)\}$$

sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

36.12. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du domaine

$$\{\operatorname{Im} z>0\ ;\ \ z \notin [2k,\ 2k+2i],\ \ z \notin [2k+1,\ 2k+1+i] \quad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots)\}$$

sur le demi-plan $\operatorname{Im} w>0$.

Dans beaucoup de cas, lors de l'obtention des applications intermédiaires, on peut aussi utiliser le principe de symétrie.

36.13. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques qui réalisent les représentations conformes des domaines donnés sur les fig. 121 à 123 sur le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$.

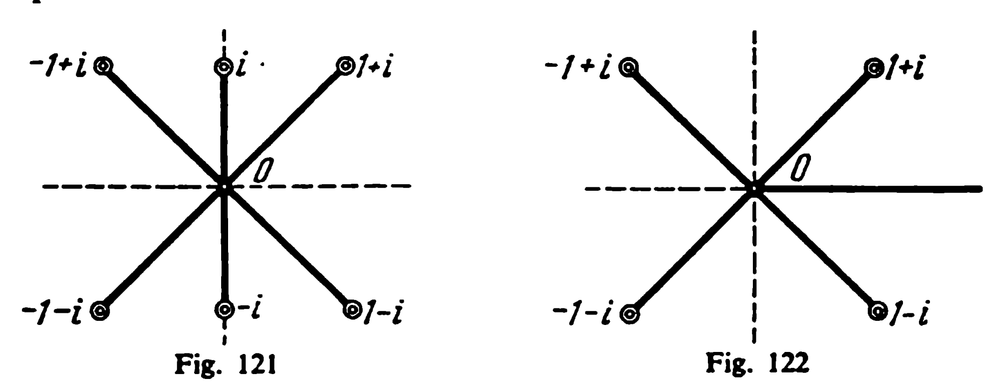


Fig. 121 Fig. 122

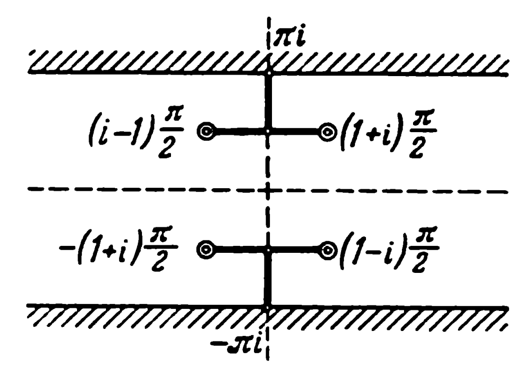


Fig. 123

RÉPONSES

36.03.

1. $z_1 = 1, \quad z_3 = -1$. 2. $z_1 = -1, \; z_3 = 1$. 3. $z_1 = 0, \; z_3 = -1$.

4. $z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_3 = -\frac{1}{2}$. 5. $z_1 = -1, \quad z_3 = i$. 6. $z_1 = e^{3\pi i/4}, \quad z_3 = e^{\pi i/4}$.

36.04.

$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2} e^{2\pi i/n}, \quad z_3 = 0.$

36.06.

1. Fig. 105 : $w = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{1+z^2}}{\sqrt{5} - \sqrt{1+z^2}}}$.

2. Fig. 106 : $w = \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-z^2}}}$.

3. Fig. 107 : $w = \sqrt{\dfrac{z\sqrt{34} + \sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{5z - \sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}}$.

4. Fig. 108 : $w = \sqrt{\dfrac{4 + z^2 + \frac{4}{5}\sqrt{z^4 + 17z^2 + 16}}{(4+z^2)\sqrt{34} + 5\sqrt{z^4 + 17z^2 + 16}}}$.

5. Fig. 109 : $w = \sqrt{\dfrac{z-i-\sqrt{z^2-1}}{(z-i)\sqrt{5}+3\sqrt{z^2-1}}}$.

6. Fig. 110 : $w = \sqrt{1+\sqrt{1+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2}}$.

7. Fig. 111 : $w = \sqrt{-\dfrac{z^2+1+\sqrt{z^4-2z^2\cos 2\alpha+1}+2z(1+\sin\alpha)}{z^2+1+\sqrt{z^4-2z^2\cos 2\alpha+1}-2z(1+\sin\alpha)}}$.

8. Fig. 112 : $w = \dfrac{\sqrt{z^2+1}}{z}\sqrt{z^2+1+\sqrt{z^4+1}}$.

9. Fig. 113 : $w = \dfrac{1}{z}\sqrt{(z^2-1)(z^2-1+\sqrt{z^4+1})+2(2+\sqrt{2})z^2}$.

10. Fig. 114 : $w = \sqrt{\dfrac{\sqrt{4z^4+17z^2+4}-3z}{\sqrt{4z^4+17z^2+4}-5z}}$.

11. Fig. 115 : $w = \sqrt{1-\sqrt{1+e^{-\pi z}}}$.

12. Fig. 116 : $w = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{2}+\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{2}}-\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{2}+\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi}{2}}-\operatorname{ch}\pi}}$.

36.07. $i\operatorname{ch}\left(\pi\sqrt{\dfrac{z}{2p}}\right)$.

36.08. $w = i\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right)$.

36.09.

1. Fig. 117 : $w = \left(-z^{3/2}+\sqrt{z^3-1}\right)^{2/3}$.

2. Fig. 118 : $w = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}\sqrt{\sqrt{z^4+4}-\sqrt{z^4-1}}$.

3. Fig. 119 : $w = \left(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta-1}\right)^{2/3}$, $\zeta = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2z^3}\left(z^3+1+\sqrt{z^6+1}\right)^2$.

4. Fig. 120 : $w = \left(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta-1}\right)^{2/3}$, $\zeta = \dfrac{(z^3+1)(z^3+1+\sqrt{z^6+1})}{2(2+\sqrt{2})z^3}$.

36.10.

$w = i\ln\left(e^{-z}+\sqrt{e^{-2z}-1}\right)$.

36.11.

$w = i\ln\dfrac{\cos z+\sqrt{\cos^2 z-\operatorname{ch}^2\pi}}{\operatorname{ch}\pi}$.

36.12.

$$w = i \ln \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\pi z}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}} + \sqrt{\cos^2 \frac{\pi z}{2} - \operatorname{ch}^2 \pi}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}}}.$$

36.13.

1. Fig. 121 : $$w = \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}} - \sqrt{2-\sqrt{z^4+4}}}{\sqrt{\sqrt{z^4+4}+\sqrt{5}}}.$$

2. Fig. 122 : $$w = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{z^4+4}}}.$$

3. Fig. 123 : $$w = \sqrt{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - \sqrt{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}}} + \sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} - \sqrt{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}}}.$$

§ 37. Application des polygones

Jusqu'à présent, nous avons considéré des méthodes de recherche de la représentation conforme d'un domaine donné sur un domaine canonique, méthodes qui se ramenaient au choix des combinaisons d'applications déjà connues. De cette façon, on obtenait des fonctions élémentaires, réalisant des applications, dont les inverses étaient aussi des fonctions élémentaires. Dans le présent paragraphe, on examine des problèmes à la solution desquels on aboutit par une méthode plus algorithmique avec utilisation de l'intégrale de Christoffel-Schwarz. Ici aussi on arrive parfois à exprimer les fonctions réalisant les applications par des fonctions élémentaires, mais les fonctions inverses ne peuvent presque jamais être exprimées d'une façon élémentaire.

37.01. Soient a_k et α_k, où $k = 1, 2, \ldots, n$, des nombres réels vérifiant les conditions:

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < +\infty,$$

$$0 < \alpha_k \leq 2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leq n - 2.$$

Notons $w(z)$ une branche régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ de la fonction analytique

$$\int_{\infty}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} \, d\zeta$$

prolongée en continuité sur l'axe réel aussi. Démontrer les assertions suivantes:

1. Lorsque le point ξ parcourt l'axe réel de $-\infty$ à $+\infty$, le point $w(\xi)$ contourne une ligne polygonale fermée finie Γ ayant pour sommets

$$A_k = w(a_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad A_{n+1} = w(\infty).$$

2. Lorsque le point ξ parcourt un segment de l'axe réel ne contenant pas les points a_k, le point $w(\xi)$ se déplace suivant un segment rectiligne de la ligne polygonale Γ sans changer le sens de mouvement.

3. Lorsque le point ξ passe par le point a_k, la ligne polygonale Γ tourne de l'angle $\pi(1-\alpha_k)$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et lorsqu'il passe par le point ∞, de l'angle $\pi\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-n+2\right)$.

37.02. Soient α_1 et α_2 deux constantes vérifiant les conditions :

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\quad \alpha_1+\alpha_2<1.$$

Montrer que la fonction

$$w(z)=\int_0^z \zeta^{\alpha_1-1}(1-\zeta)^{\alpha_2-1}\,d\zeta,\quad w(x+i0)>0\quad (0<x<1)$$

est univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ et réalise une représentation conforme de ce dernier sur un triangle de sommets

$$A_1=w(0)=0,\qquad A_2=w(1)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)},$$

$$A_3=w(\infty)=e^{i\pi\alpha_1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)}.$$

Indication. Voir le problème 32.25.

37.03. Soient α_1, α_2, α_3 trois constantes vérifiant les conditions

$$\alpha_k>0\quad (k=1,\ 2,\ 3),\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1,$$

et soient a_1, a_2, a_3 trois points deux à deux distincts. Montrer que la fonction

$$\int_{z_0}^{z}(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-a_2)^{\alpha_2-1}(\zeta-a_3)^{\alpha_3-1}\,d\zeta$$

admet la séparation d'une branche régulière univalente à l'intérieur d'une circonférence, qui passe par les points a_1, a_2, a_3, et que cette branche réalise une représentation conforme du disque borné par la circonférence mentionnée ci-dessus sur un certain triangle.

Indication. Réaliser une application homographique transformant les points a_1, a_2, a_3 en les points 0, 1, ∞.

37.04. Soient

$$-\infty<a_1<a_2<a_3<a_4<+\infty,$$

$$0<\alpha_k<2\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4),\qquad \sum_{k=1}^{4}\alpha_k=2.$$

Montrer que toute branche régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ de la fonction

$$\int_{z_0}^{z}(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-a_2)^{\alpha_2-1}(\zeta-a_3)^{\alpha_3-1}(\zeta-a_4)^{\alpha_4-1}\,d\zeta$$

est univalente dans ce demi-plan et réalise une représentation conforme de ce dernier sur un certain quadrilatère fini.

37.05. Soient

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < +\infty,$$

$$0 < \alpha_k < 1 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2.$$

Montrer que toute branche régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ de la fonction

$$\int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\, d\zeta$$

est univalente dans ce demi-plan et réalise une représentation conforme de ce dernier sur un n-gone convexe fini.

Indication. Montrer que les conditions concernant les angles α_k ne peuvent être vérifiées que si la ligne polygonale Γ (image de l'axe réel par l'application $w = w(z)$) est la frontière d'un n-gone convexe fini.

37.06. Montrer que pour une valeur assez grande de $k > 0$, la fonction

$$w(z) = \int_0^z \frac{\zeta^{1/2}(\zeta^2 - k^2)^{-3/4}}{\sqrt{\zeta^2 - (k+1)^2}}\, d\zeta, \quad k > 0 \quad (w(x+i0) > 0,\ 0 < x < k)$$

ne peut pas être univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$.

Indication. Trouver les formules asymptotiques donnant les longueurs des côtés de la ligne polygonale Γ (image de l'axe réel) pour $k \to +\infty$, et se convaincre que, pour une valeur assez grande de k, cette ligne polygonale présente des auto-intersections.

37.07. Montrer que la fonction

$$w(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\varkappa^2\zeta^2)}}, \quad 0 < \varkappa < 1 \quad (w(x+i0) > 0,\ -1 < x < 1)$$

réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur un rectangle de sommets $-\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} + ib$, $-\frac{a}{2} + ib$, où

$$a = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}}, \quad b = \int_1^{1/\varkappa} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-\varkappa^2 t^2)}}.$$

37.08. Trouver l'image du disque $|z| < 1$ par l'application

$$w = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt[3]{1-\zeta^6}} \quad (w(x) > 0,\ 0 < x < 1).$$

37.09. Trouver l'image du domaine $|z| > 1$ par l'application

$$w = \int\limits_{\infty} \frac{(1+\zeta^5)^{2/5}}{(1-\zeta^5)^{4/5}} d\zeta \quad (w(x) > 0,\ x > 1).$$

* * *

37.10. Soient

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < +\infty,$$

$$0 < \alpha_k < 2 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \lambda < 2.$$

Notons $w(z)$ une branche régulière quelconque dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ de la fonction

$$(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n}$$

prolongée en continuité sur l'axe réel. Montrer que l'image de l'axe réel par l'application $w = w(z)$ est l'ensemble de demi-droites

$$\arg w = \varphi_0, \qquad \arg w = \varphi_0 + \lambda,$$

et de segments

$$[0,\ A_k e^{i(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \varphi_0)}] \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

(φ_0 est une certaine constante réelle dépendant du choix de la branche considérée, A_k étant des nombres positifs qui ne dépendent pas de ce choix).

37.11. Soient $a_1, \ldots, a_{2n}$ des nombres réels deux à deux distincts, et soit $w(z)$ une fonction définie dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ par l'égalité

$$w(z) = \sqrt[n]{(z-a_1)\ldots(z-a_{2n})}, \quad w(x+i0) > 0 \ (x \to +\infty).$$

Montrer que la fonction $w(z)$ est univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, et qu'elle réalise une représentation conforme de ce demi-plan sur le plan des w muni de coupures suivant la demi-droite $[0,\ +\infty]$ et les segments

$$[0,\ e^{-k\pi i/2n}|w(\xi_k)|] \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1),$$

où ξ_k sont les zéros de la dérivée du polynôme $P(z) = (z-a_1)\ldots(z-a_{2n})$ numérotés en ordre croissant.

37.12. Trouver l'image du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ par l'application

$$w = -\sqrt[3]{z(1-z^2)}, \quad w(x+i0) > 0 \quad (x > 1).$$

37.13. Trouver l'image du disque $|z| < 1$ par l'application

$$w = \frac{1}{z} \cdot \sqrt[4]{1+z^8}, \quad w(x) > 0 \quad (0 < x < 1).$$

37.14. Soient

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < +\infty,$$

$$\alpha_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 2,$$

et soit $w(z)$ n'importe quelle branche régulière dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ de la fonction $(z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_n)^{\alpha_n}$. Montrer que la fonction $w(z)$ est univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ si, et seulement si, la fonction $w'(z)$ n'a qu'un zéro simple sur chaque intervalle (a_k, a_{k+1}), $k = 1, \ldots, n-1$.

* * *

37.15. Soit $w(z)$ une fonction quelconque qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur un polygone fini ayant pour sommets $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les points de l'axe réel en lesquels sont transformés ces sommets par l'application $w = w(z)$. Montrer que la fonction $w(z)$ peut être prolongée analytiquement le long de n'importe quel chemin ne passant pas par les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Indication. Appliquer le principe de symétrie en profitant du fait que sur les segments de l'axe réel ne contenant pas les points a_k la fonction $w(z)$ prend des valeurs situées sur une certaine droite.

37.16. Montrer que la fonction $\frac{w''(z)}{w'(z)}$, où $w(z)$ est la fonction figurant au problème 37.15, peut être prolongée analytiquement dans le plan élargi des z privé des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et que ce prolongement analytique est une fonction uniforme.

Indication. Montrer que le résultat du prolongement analytique de la fonction $w(z)$ le long de n'importe quel chemin fermé Γ (ne passant pas par les points a_k) est de la forme $e^{i\varphi}w(z) + C$, où φ et C sont des constantes dépendant du chemin de prolongement.

37.17. Supposons que les angles intérieurs aux sommets A_k d'un polygone soient égaux à $\pi\alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, où $0 < \alpha_k \leq 2$. Montrer que

$$\frac{w''(z)}{w'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$$

(ici, $w(z)$ est la fonction qui figure au problème 37.15).

37.18. Montrer que les assertions des problèmes 37.15 à 37.17 restent vraies dans les cas où les points $a_1, \ldots, a_n$ ne se trouvent pas sur l'axe réel mais se situent sur une circonférence quelconque $|z - z_0| = R$, tandis que la fonction $w(z)$ réalise une représentation conforme du disque $|z - z_0| < R$ ou du domaine $|z - z_0| > R$ sur le polygone.

37.19. Montrer que l'assertion du problème 37.17 reste vraie dans le cas où l'un des points a_k est le point à l'infini.

37.20. Montrer que l'assertion du problème 37.17 reste vraie dans le cas où le polygone a un ou plusieurs de ses sommets situés à l'infini si seulement on prend comme angle intérieur au sommet à l'infini du polygone l'angle com · entre les droites qui forment ce sommet et qui se rencontrent

en un point situé à distance finie ; cet angle doit être pris avec signe opposé (si les droites sont parallèles, la grandeur de l'angle doit être déterminée par passage à la limite).

37.21. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur l'extérieur d'un polygone fini ayant pour sommets A_k ($k=1, \ldots, n$), les angles extérieurs à ces sommets étant respectivement $\pi\alpha_k$ (pour l'extérieur du polygone, ces angles sont des angles intérieurs; on considère toujours que $0 < \alpha_k \leq 2$). Notons a_k les points de l'axe réel qui sont transformés en les sommets A_k, et a le point qui est transformé en le point $w=\infty$. Montrer que

$$\frac{w''(z)}{w'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} - \frac{2}{z-a} - \frac{2}{z-\bar{a}}.$$

37.22. Soit $w(z)$ la fonction du problème 37.21 qui réalise une représentation conforme sur l'extérieur du polygone non plus du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, mais du disque $|z| < 1$ (comme précédemment, $w(a)=\infty$). Montrer que

$$\frac{w''(z)}{w'(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} - \frac{2}{z-a} + \frac{2\bar{a}}{1-z\bar{a}}.$$

37.23. Montrer que l'assertion du problème 37.15 reste vraie si l'on considère que les côtés du polygone ne sont pas de ligne droite mais des arcs de circonférences.

Remarque. Rigoureusement parlant, l'assertion sera un peu modifiée, car, lors du prolongement analytique de la fonction $w(z)$, des pôles peuvent surgir.

37.24. Montrer que, si une fonction $w(z)$ réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur un polygone borné par des arcs de circonférences, alors la fonction $2\frac{w'''(z)}{w'(z)} - 3\left[\frac{w''(z)}{w'(z)}\right]^2$ coïncide avec une certaine fonction rationnelle.

Indication. Voir le problème 33.02.



Les résultats des problèmes 37.17 à 37.22 donnent la possibilité d'écrire sous la forme d'une certaine intégrale indéterminée l'expression de la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme d'un demi-plan (ou d'un disque) sur un polygone rectiligne. Même dans les cas où cette intégrale est prise en fonctions élémentaires, son calcul est très difficile. Pour cette raison, il faut avoir en vue les cas où la recherche de la fonction, qui réalise l'application, est possible sans intégration.

37.25. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur un domaine D dont la frontière est constituée par un nombre fini de segments de droites passant par le point $w=0$. Montrer que la fonction $\frac{w'(z)}{w(z)}$ coïncide avec une certaine fonction rationnelle.

37.26. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur un domaine D dont la frontière est constituée par un nombre fini de demi-droites (ou de droites complètes) parallèles entre elles. Montrer que la fonction $w'(z)$ coïncide avec une certaine fonction rationnelle.

37.27. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur l'angle $0 < \arg w < \lambda\pi$ $(0 < \lambda \leq 2)$ muni de coupures suivant les segments $[0, B_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, où

$$\frac{1}{\pi} \arg B_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < \lambda.$$

En supposant que $w(\infty) = 0$, $w(a_1) = \ldots = w(a_{n+1}) = 0$, où

$$-\infty < a_{n+1} < a_n < \ldots < a_1 < +\infty,$$

démontrer la formule

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_k}{z - a_k}, \qquad \alpha_{n+1} = \lambda - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

37.28. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du domaine $|z| > 1$ sur tout le plan des w muni de coupures suivant les segments $[0, B_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, où

$$\arg B_k - \arg B_{k-1} = \pi\alpha_k \ (k = 1, 2, \ldots, n, \ B_0 = B_n), \ \alpha_k > 0, \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

En supposant que $w(\infty) = \infty$, $w(a_1) = \ldots = w(a_n) = 0$, où

$$0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi,$$

démontrer la formule

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{z - a_k} - \frac{1}{z}.$$

37.29. Soit $w(z)$ la fonction du problème 37.27 ou 37.28. Montrer que les images anticipées b_k des points B_k (extrémités des coupures) vérifient l'équation $\frac{w'(z)}{w(z)} = 0$.

37.30. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le plan des w muni de coupures suivant les demi-droites

$$[B_k, B_k + \infty], \ k = 1, 2, \ldots, n \quad (\operatorname{Im} B_k = h_k),$$

où $-\infty < h_1 < \ldots < h_n < +\infty$. En supposant que

$$w(\infty) = \infty, \ w(a_1) = w(a_2) = \ldots = w(a_{n-1}) = \infty,$$

et que

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < +\infty \text{ et } \lim_{z \to a_k} \operatorname{Re} w(z) = +\infty,$$

démontrer la formule

$$w'(z) = C_1 z + C_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_{k+1} - h_k}{\pi(z - a_k)}.$$

37.31. Soit $w(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur la bande $H_1 < \operatorname{Im} z < H_2$ munie de coupures suivant les demi-droites

$$[B_k,\ B_k + \infty],\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ ; \quad (\operatorname{Im} B_k = h_k),$$

où $H_1 < h_1 < h_2 < \ldots < h_n < H_2$. En supposant que

$$\operatorname{Re} w(\infty) = \infty, \quad \operatorname{Re} w(a_k) = +\infty \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

et que $-\infty < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < +\infty$, démontrer la formule

$$w'(z) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{h_{k+1} - h_k}{\pi(z - a_k)}, \quad h_0 = H_1,\ h_{n+1} = H_2.$$

37.32. Soit $w(z)$ la fonction du problème 37.30 ou 37.31. Montrer que les images anticipés b_k des points B_k (extrémités des coupures) vérifient l'équation $w'(z) = 0$.



Dans certains cas, il est utile d'examiner les applications réalisées par la fonction $w'(z)$ qui est la dérivée de la fonction recherchée $w(z)$ qui applique le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur un polygone D. Les sommets du polygone D seront désignés comme auparavant par $A_1, \ldots, A_n$ et leurs images anticipées sur l'axe réel par $a_1, \ldots, a_n$, en posant $-\infty < a_1 < \ldots < a_n \leq +\infty$. La grandeur de l'angle intérieur du polygone D au sommet A_k sera notée comme précédemment $\pi\alpha_k$. Pour un angle au sommet à distance finie on pose $0 < \alpha_k < 2$, un angle à l'infini entre deux droites parallèles est considéré nul (ou 2π), tandis qu'un angle à l'infini compris entre deux droites concourantes est pris égal à l'angle que font ces droites au point d'intersection mais avec signe opposé.

37.33. Montrer que l'image du segment (a_k, a_{k+1}) de l'axe réel par l'application $\zeta = w'(z)$ se situe sur la demi-droite $\arg \zeta = \arg(A_{k+1} - A_k)$.

37.34. Montrer que, si $a_k \neq \infty$ et $A_k \neq \infty$, et si $\alpha_k < 1$, alors l'image du point a_k par l'application $\zeta = w'(z)$ est le point $\zeta = \infty$.

37.35. Montrer que, si $a_k \neq \infty$ et $A_k \neq \infty$, et si $\alpha_k > 1$, alors l'image du point a_k par l'application $\zeta = w'(z)$ est le point $\zeta = 0$.

37.36. Montrer que, si $a_k = \infty$ et $A_k = \infty$, et si $\alpha_k > -1$, alors l'image du point a_k par l'application $\zeta = w'(z)$ est le point $\zeta = 0$.

37.37. Montrer que, si $a_k \neq \infty$ et $A_k = \infty$, alors l'image du point a_k par l'application $\zeta = w'(z)$ est le point $\zeta = 0$.

37.38. Montrer que, lorsque le point z se déplace suivant un segment de l'axe réel contenu par le segment (a_k, a_{k+1}) et privé des points où $w''(z) = 0$, le point $\zeta = w'(z)$ se déplace monotonement suivant la demi-droite $\arg \zeta = \arg (A_{k+1} - A_k)$.

37.39. Soit D un polygone de côtés

$$\arg w = \pi,\ \arg w = \alpha,\ \arg(w - i) = \pi,\ \arg(w - i) = \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

et soit $\varphi(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme de la bande $0<\operatorname{Im} z<1$ sur ce polygone. En outre,

$$\varphi(-\infty)=-\infty, \quad \varphi(0)=0, \quad \varphi(+\infty)=+\infty e^{i\alpha}.$$

Montrer que la fonction $\zeta=\varphi'(z)$ réalise une représentation conforme de la bande $0<\operatorname{Im} z<1$ sur l'angle $0<\arg\zeta<\alpha$ et vérifie les conditions :

$$\varphi'(0)=\infty, \quad \varphi'(i)=0, \quad \varphi'(-\infty)=1, \quad \varphi'(+\infty)=e^{i\alpha}\cos\alpha.$$

Indication. Ayant trouvé les zéros de $\varphi''(z)$, suivre le déplacement du point $\zeta=\varphi'(z)$ suivant la frontière du polygone et appliquer le principe de correspondance des frontières.

37.40. Montrer que pour tout triangle, la fonction $\zeta=w'(z)$ réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur un certain angle ayant le sommet au point $\zeta=0$ et présentant des coupures suivant des segments des demi-droites sortant du point $\zeta=0$.

37.41. Montrer que pour tout polygone convexe fini D, la fonction $w'(z)$ réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur un angle de sommet $\zeta=0$ présentant des coupures suivant des segments des demi-droites sortant du point $\zeta=0$.

37.42. Soit D un polygone fini non convexe et supposons que les images anticipées de tous ses sommets par l'application $w=w(z)$ soient à distances finies. Montrer que la fonction $\zeta=w'(z)$ ne peut pas être univalente dans le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$.

* * *

Pour résoudre les problèmes qui suivent, on recommande d'utiliser aussi bien les méthodes des problèmes 37.17 à 37.22 que celles des problèmes 37.25 à 37.32. Dans les deux cas, la difficulté principale consiste dans la recherche des constantes a_k (images anticipées des sommets A_k du polygone dont l'application est réalisée) et des constantes d'intégration. Voici quelques indications concernant la recherche de ces constantes.

Lorsqu'il s'agit des méthodes exposées aux problèmes 37.17 à 37.22, les constantes sont déterminées à partir des équations $w(a_k)=A_k$ et des conditions qui donnent d'une manière unique la représentation conforme cherchée (le plus souvent, ces conditions consistent dans le fait que l'on donne trois points a_k, mais, parfois, on donne la valeur en un point intérieur quelconque et un point a_k). Si certains sommets A_k se trouvent à l'infini, au lieu de l'égalité $w(a_k)=A_k$ on a affaire au comportement asymptotique de la fonction qui réalise l'application au voisinage des points a_k. Le plus souvent, une étude pareille est entreprise dans les cas où l'angle au sommet correspondant $A_k=\infty$ est égal à zéro, c'est-à-dire lorsque la partie du polygone au voisinage de ce sommet représente une bande. Alors, pour la fonction qui réalise l'application, au voisinage du point correspondant a_k, la formule asymptotique $w(z)=\frac{c}{\pi}\ln(z-a_k)+O(1)$ (voir le problème 34.10) a lieu, la constante c étant égale en module à la largeur de la bande, tandis que son argument est exprimé par l'orientation de la bande.

Au cas où l'on recourt aux méthodes exposées aux problèmes 37.25 à 37.32, le procédé de détermination des constantes est quelque peu différent. Tout d'abord, il faut exprimer par les points a_k (une partie de ces points peut être donnée par les conditions qui définissent d'une façon uniforme l'application) les points b_k (images anticipées des extrémités des coupures). Ensuite, toutes les constantes qui restent inconnues sont déterminées à partir de l'équation $w(b_k) = B_k$ (ici, B_k représentent les extrémités des coupures, c'est-à-dire les nombres donnés).

37.43. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur les polygones donnés sur les fig. 124 à 137, de façon que $w(0) = A_1$, $w(1) = A_2$, $w(\infty) = A_3$ (les sommets A_k sont marqués sur les figures).

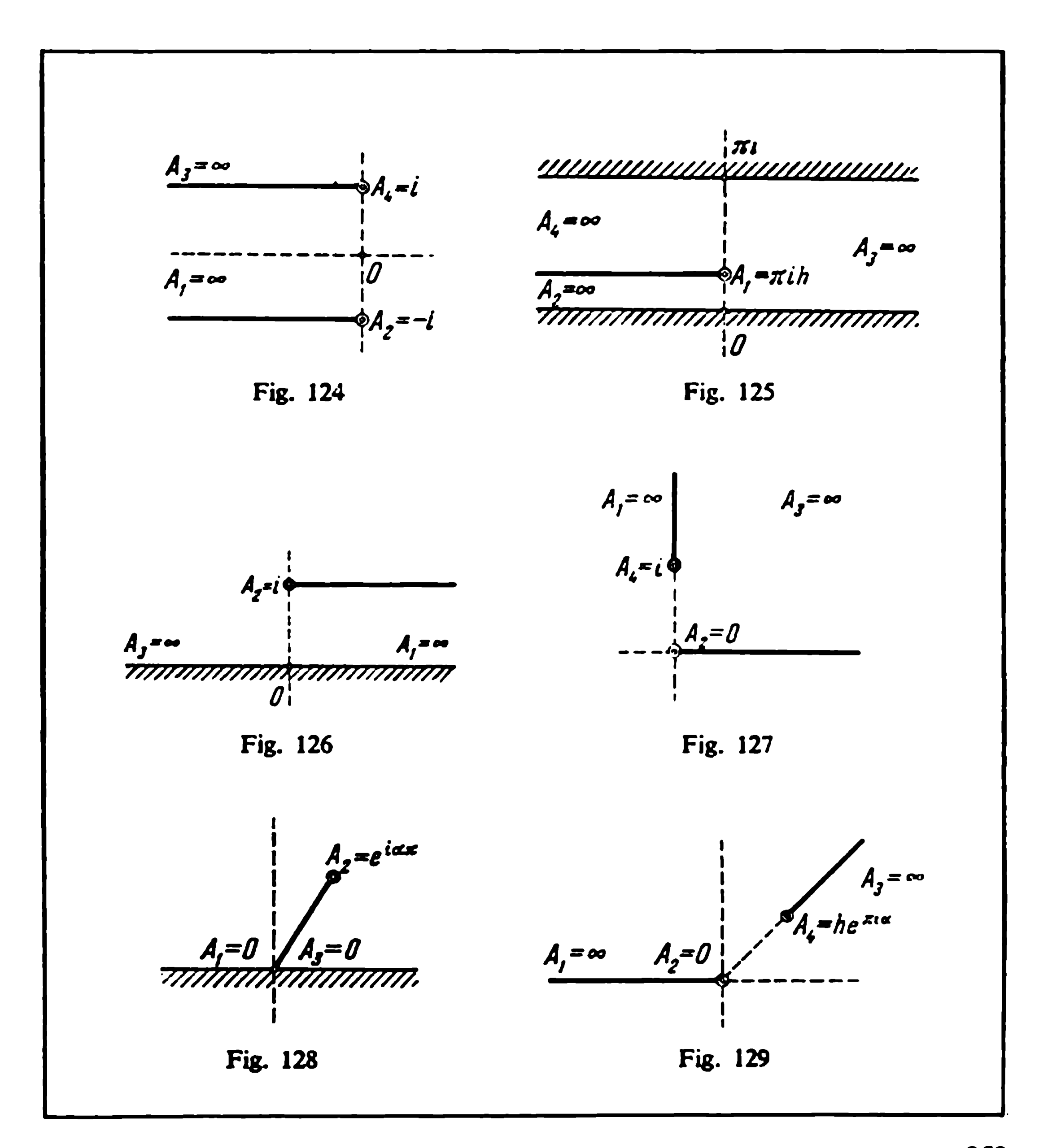


Fig. 124

Fig. 125

Fig. 126

Fig. 127

Fig. 128

Fig. 129

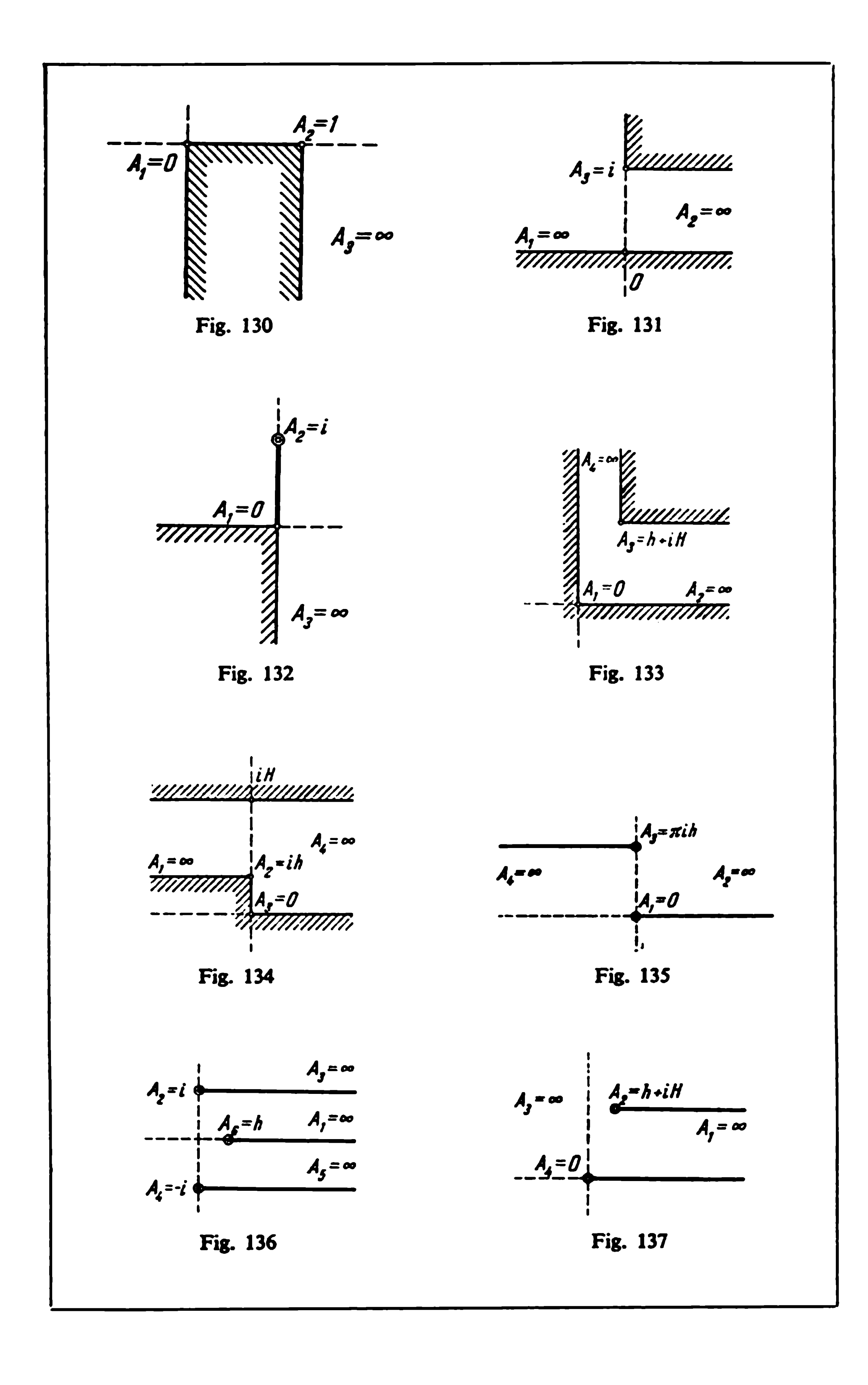


Fig. 130

Fig. 131

Fig. 132

Fig. 133

Fig. 134

Fig. 135

Fig. 136

Fig. 137

Lorsque les polygones à appliquer sont symétriques par rapport à une droite quelconque, il est beaucoup plus facile de trouver la fonction qui réalise l'application, car cela permet de déterminer, sans résoudre les équations, un nombre plus important d'images anticipées des sommets et de réduire le nombre de constantes qui doivent être déterminées. Le procédé principal est le suivant : supposons que le polygone ait deux sommets situés sur l'axe de symétrie. Comme image anticipée de l'un des sommets on considère le point $z=0$, et comme image anticipée de l'autre, le point $z=\infty$. Alors, les images anticipées des sommets symétriques ne diffèrent que par le signe.

En outre, en réalisant l'application des polygones symétriques, on peut utiliser tous les procédés exposés au paragraphe 36.

37.44. Trouver des fonctions $w(z)$ quelconques qui réalisent les représentations conformes du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur les polygones symétriques donnés sur les fig. 138 à 143.

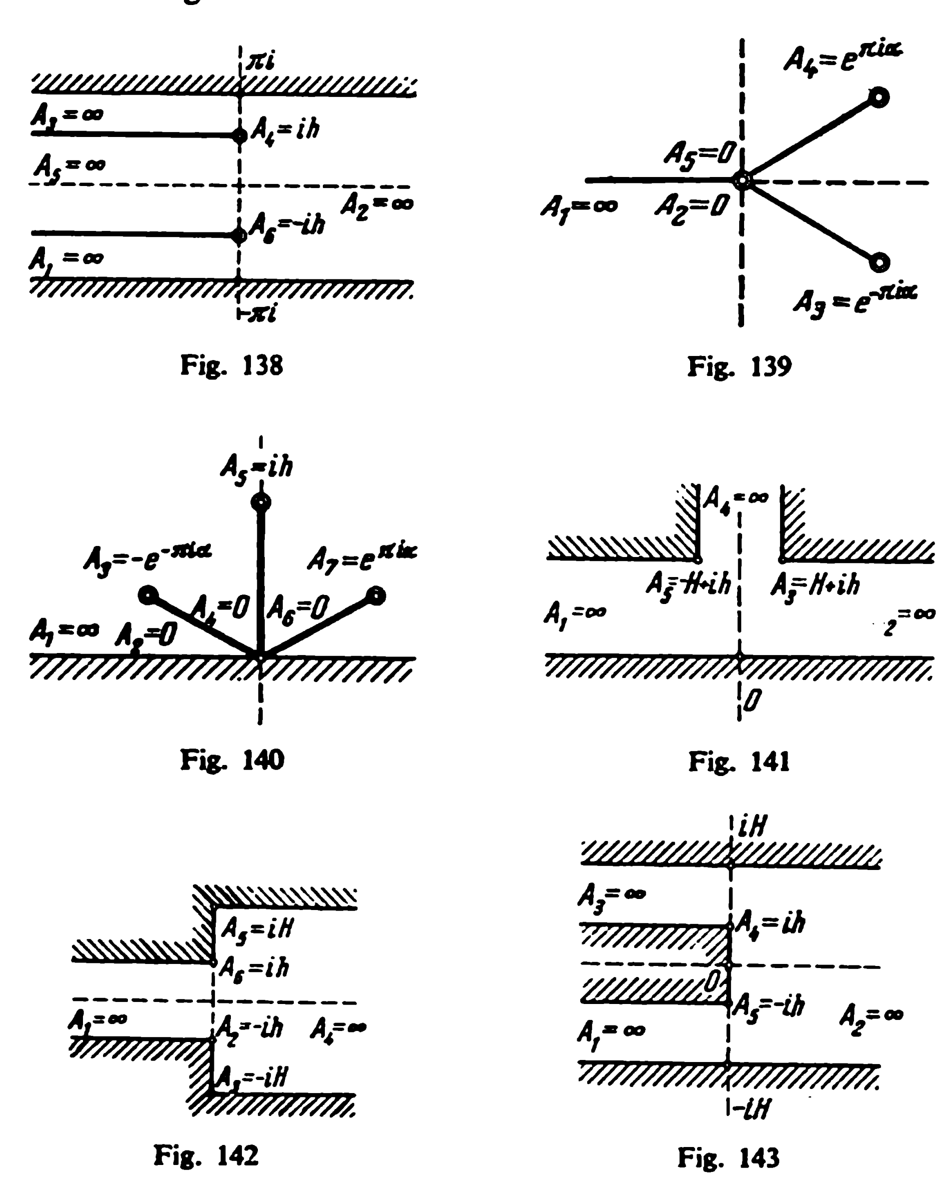


Fig. 138

Fig. 139

Fig. 140

Fig. 141

Fig. 142

Fig. 143

37.45. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes du domaine $|z|>1$ sur les polygones (ayant $w=\infty$ comme point intérieur) donnés sur les fig. 144 à 146, de façon que $w(\infty)=\infty$, $w(1)=A_1$.

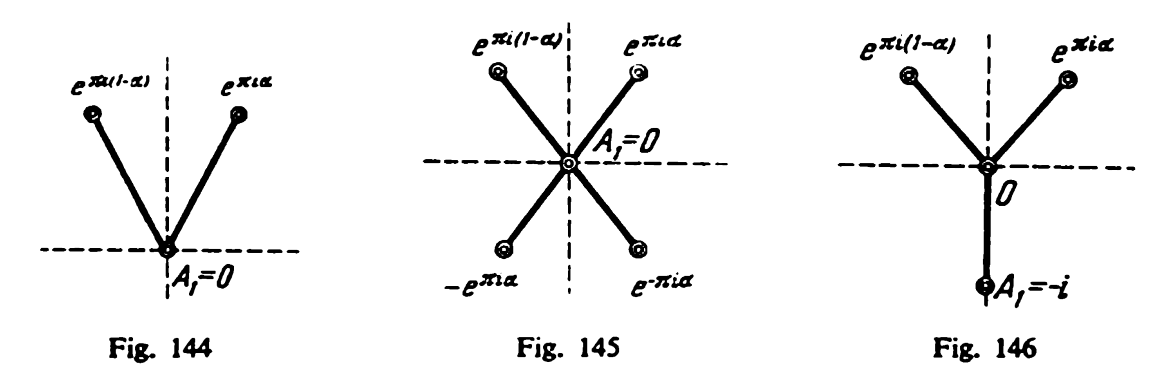


Fig. 144 Fig. 145 Fig. 146

Les méthodes de représentation conforme des polygones qui viennent d'être exposées peuvent s'associer facilement avec d'autres méthodes de représentations conformes. Les difficultés ne surgissent que lorsqu'on tâche d'obtenir l'application inverse.

37.46. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur les domaines donnés sur les fig. 147 à 150, de facon que $w(0)=A_1$, $w(1)=A_2$, $w(\infty)=A_3$ (pour la fig. 149, $A_3=i+i\cdot 0$).

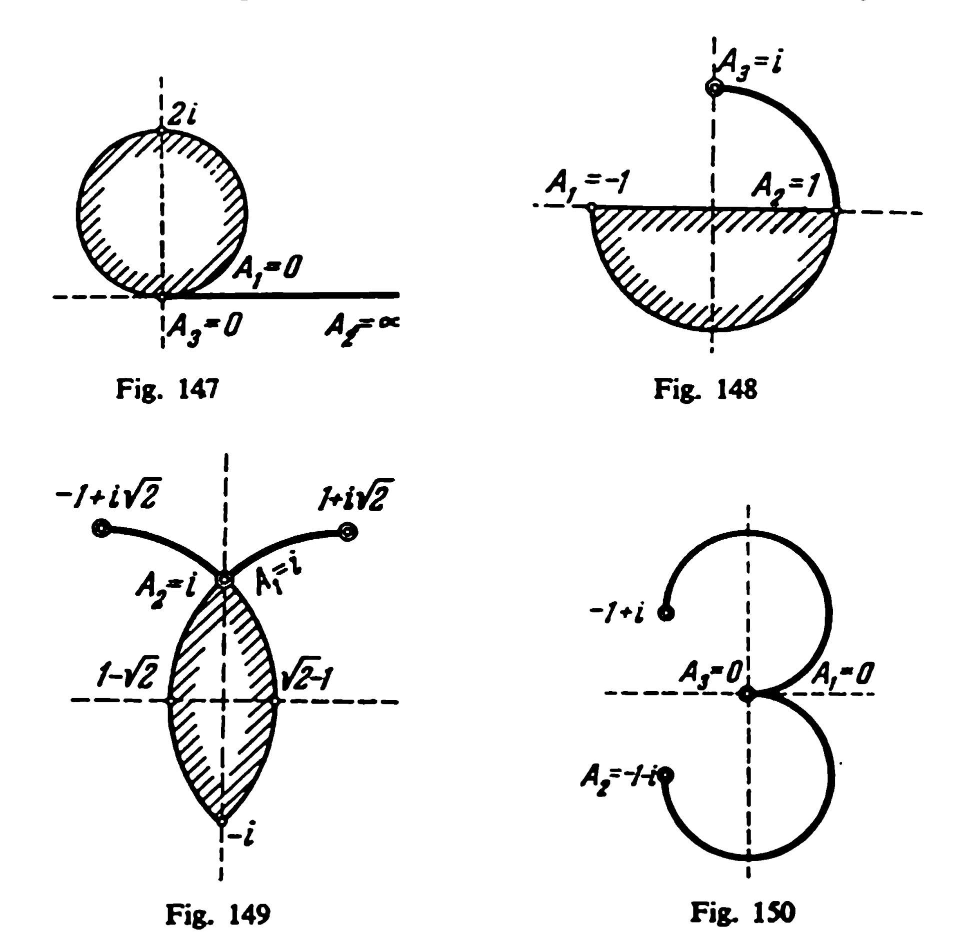


Fig. 147 Fig. 148

Fig. 149 Fig. 150

37.47. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes de tout le plan des z muni d'une coupure suivant le segment $[-1, 1]$ sur les domaines donnés sur les fig. 151 à 153, de façon que $w(\infty)=\infty$, $w(1)=A_1$.

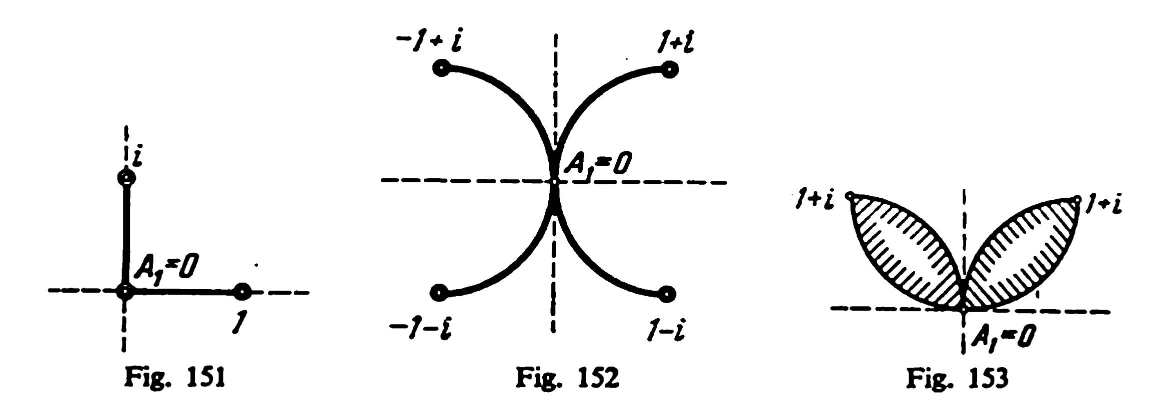


Fig. 151 Fig. 152 Fig. 153

37.48. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes de la bande $|\operatorname{Im} z| < 1/2$ sur les domaines donnés sur les fig. 154 à 156, de façon que $w(0)=0$, $w(+\infty)=A_1$.

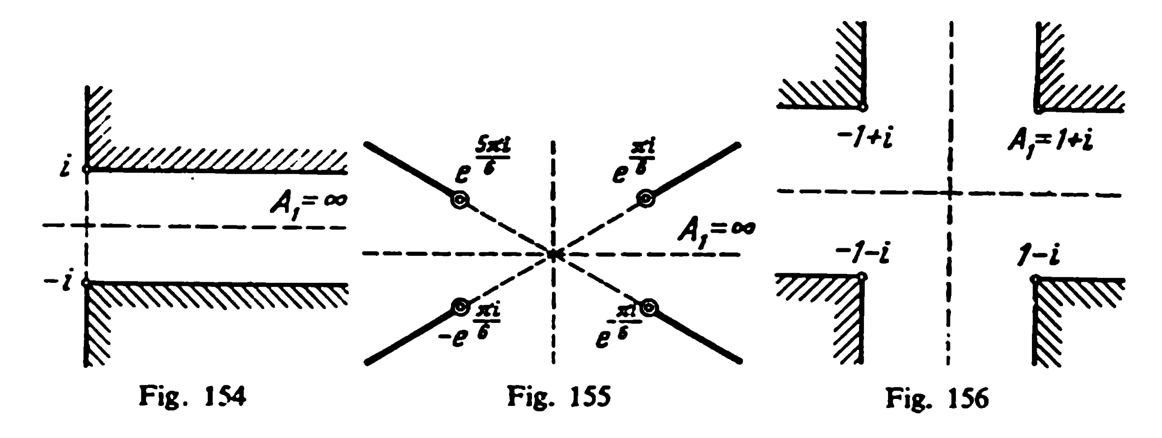


Fig. 154 Fig. 155 Fig. 156

37.49. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes de la demi-bande $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ sur les domaines donnés sur les fig. 157 et 158, de façon que $w\left(-\frac{\pi i}{2}\right)=A_1$, $w(\infty)=A_2$, $w\left(\frac{\pi i}{2}\right)=A_3$.

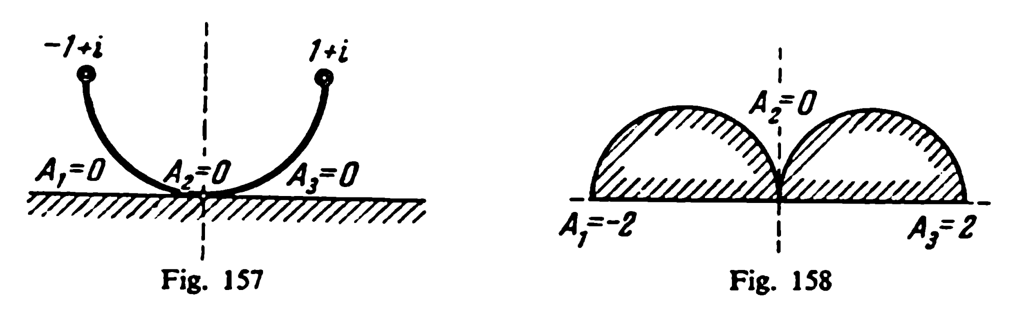


Fig. 157 Fig. 158

37.50. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le plan des w muni de coupures suivant les demi-droites

$$[ki, ki+\infty], \left[\left(k+\frac{1}{4}\right)i, \left(k+\frac{1}{4}\right)i+\infty\right] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

37.51. Trouver une fonction $w(z)$ quelconque qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le plan des w duquel on a enlevé les demi-bandes

$$\left\{\operatorname{Re} w < 0, |k - \operatorname{Im} w| < \frac{1}{4}\right\} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Dans les problèmes qui suivent, les fonctions qui réalisent l'application ne sont pas exprimées par des fonctions élémentaires.

37.52. Trouver les fonctions $w(z)$ qui réalisent les représentations conformes du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur les polygones donnés sur les fig. 159 à 161, de façon que $w(0) = A_1$, $w(1) = A_2$, $w(\infty) = A_3$.

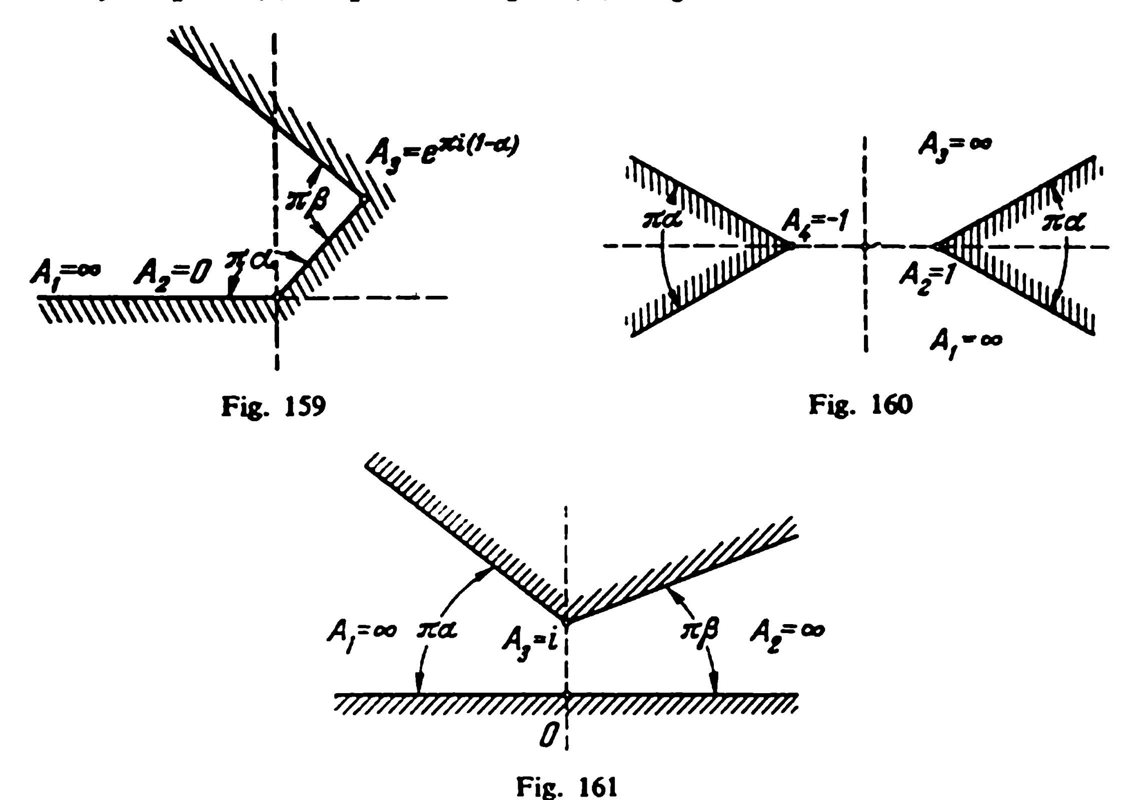


Fig. 159

Fig. 160

Fig. 161

37.53. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du disque $|z| < 1$ sur un n-gone régulier inscrit dans le disque $|w| < 1$, de façon que $w(0) = 0$, $w(1) = 1$.

Lors de la recherche des constantes, il est souvent utile de considérer les applications réalisées par la fonction $w'(z)$ (voir les problèmes 37.33 à 37.40). Cela est particulièrement commode lorsqu'on cherche l'application d'une bande sur un polygone.

37.54. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de la bande $0 < \operatorname{Im} z < 1$ sur le domaine donné sur la fig. 162 et qui satisfait aux conditions $w(-\infty) = A_1$, $w(0) = A_2$, $w(+\infty) = A_3$.

Indication. Voir le problème 37.39.

37.55. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme de la bande $0 < \operatorname{Im} z < 1$ sur le domaine donné sur la fig. 163 et qui vérifie les conditions $w(-\infty) = A_1$, $w(+\infty) = A_4$, $w(0) = A_3$.

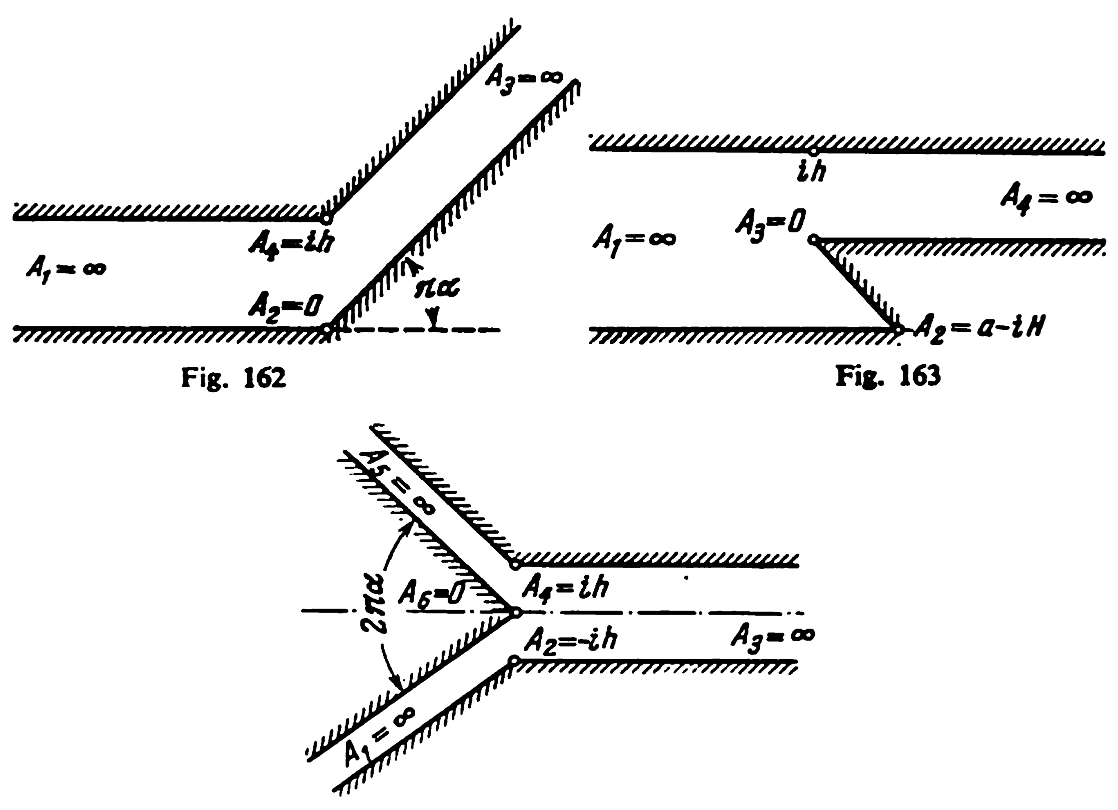


Fig. 162

Fig. 163

Fig. 164

37.56. Trouver la fonction $w(z)$ qui réalise une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur le domaine donné sur la fig. 164 et qui vérifie les conditions $w(1) = A_1$, $w(-1) = A_5$, $w(\infty) = A_3$.

RÉPONSES

37.08.

Le hexagone régulier ayant pour sommets $Ae^{\pi i k/3}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, où

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{6\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

37.09. L'étoile régulière à cinq pointes ayant pour sommets $Ae^{\frac{2k\pi i}{5}}$ et $Be^{\frac{2k+1}{5}\pi i}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, où

$$A = \int_0^1 \frac{(1+t^5)^{4/5}}{(1-t^5)^{2/5}}\,dt, \quad B = \int_0^1 \frac{(1-t^5)^{4/5}}{(1+t^5)^{2/5}}\,dt.$$

37.12. Le demi-plan $\operatorname{Im} w > 0$ muni de coupures suivant les segments

$$[0,\quad 2^{1/3}\quad 3^{-1/2}\quad e^{\pi i/3}],\qquad [0,\quad 2^{1/3}\quad 3^{-1/2}\quad e^{2\pi i/3}].$$

37.13. Tout le plan des w muni de coupures suivant les segments

$$[0,\ \sqrt[4]{2}e^{k\pi i/4}],\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

37.43.

1. Fig. 124 : $w=\dfrac{1}{\pi}(-z^2+2\ln z+1-\pi i)$.

2. Fig. 125 : $w=\dfrac{1}{\pi}(z-\ln z-1+\pi i)$.

3. Fig. 126 : $w=h\ln(z-1)+(1-h)\ln\left(1+\dfrac{hz}{1-h}\right)$.

4. Fig. 127 : $w=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\,\dfrac{(z-1)^2}{z\sqrt{z}}$.

5. Fig. 128 : $w=\dfrac{z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)z+\alpha}\,e^{\pi i\alpha}$.

6. Fig. 129 : $w=-\dfrac{h}{4}(1+\alpha)^{1+\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}z^{\alpha-1}(z-1)^2$.

7. Fig. 130 : $w=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin(2z-1)+4\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{z(1-z)}\right)$.

8. Fig. 131 : $w=\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{z}}+\ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)$.

9. Fig. 132 : $w=\dfrac{i}{2}(3-z)\sqrt{z}$.

10. Fig. 133 : $w=\dfrac{1}{\pi}\left(H\ln\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}+ih\ln\dfrac{H-ih\sqrt{z}}{H+ih\sqrt{z}}\right)$.

11. Fig. 134 : $w=\dfrac{H-h}{\pi}\left\{\ln\dfrac{\sqrt{z-1}-i}{\sqrt{z-1}+i}+\dfrac{H}{H-h}\ln\dfrac{(H-h)\sqrt{z-1}+iH}{(H-h)\sqrt{z-1}-iH}\right\}$.

12. Fig. 135 : $w=h\left\{\dfrac{(1+a)z(2z+a-1)}{(1-a)(1-z)(z+a)}-\ln\dfrac{a(1-z)}{z+a}\right\}$, où a est l'unique solution positive de l'équation $\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{1}{2}\ln a$.

13. Fig. 136 : $w=i+\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{z(z+a)}{1+a}-1-\ln z-\ln\dfrac{z+a}{1+a}\right]$, où a est l'unique solution positive de l'équation $\dfrac{(a+2)^2}{4(a+1)}+\ln\dfrac{a^2}{4(a+1)}=-\pi h$.

14. Fig. 137 : $w(z)=\dfrac{H}{\pi}\left[\dfrac{z^2-1}{2}+\dfrac{(a-1)(z-1)^2}{2}-\ln z\right]+h+iH$,

$$\frac{1}{2}(a^2-1)(a+2)-\ln a=-\pi\frac{h}{H}.$$

37.44.

1. Fig. 138 : $w=\frac{2h}{\pi}\ln z+\frac{\pi-h}{\pi}\ln\frac{\pi-hz^2}{\pi-h}-ih.$

2. Fig. 139 : $w=-\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}z^{2\alpha}(z^2-1)^{1-\alpha}.$

3. Fig. 140 : $w=2^{-\alpha}(1-2\alpha)^{\alpha-\frac{1}{2}}\alpha^{-\alpha}(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}(z^2-a^2-1)^{\alpha},$

où a est l'unique solution positive de l'équation

$$a^{1-2\alpha}(a^2+1)^{\alpha}=2^{\alpha}(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}-\alpha}\alpha^{\alpha}\cdot h.$$

4. Fig. 141 :

$$w=\frac{h}{\pi}\ln\frac{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}+hz}{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}-hz}-\frac{iH}{\pi}\ln\frac{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}+iHz}{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}-iHz}.$$

5. Fig. 142 :

$$w=-\frac{H}{\pi}\ln\frac{h\sqrt{1-z^2}-\sqrt{H^2-h^2z^2}}{h\sqrt{1-z^2}+\sqrt{H^2-h^2z^2}}+\frac{h}{\pi}\ln\frac{H\sqrt{1-z^2}-\sqrt{H^2-h^2z^2}}{H\sqrt{1-z^2}+\sqrt{H^2-h^2z^2}}.$$

6. Fig. 143 :

$$w=\frac{H}{\pi}\ln\frac{iz+\sqrt{1-z^2}}{iz-\sqrt{1-z^2}}+\frac{H-h}{\pi}\ln\frac{H\sqrt{1-z^2}+i(H-h)z}{H\sqrt{1-z^2}-i(H-h)z}.$$

37.45.

1. Fig. 144 : $w=\frac{C}{z}(z-1)^{1+2\alpha}(z+1)^{1-2\alpha},\quad C=\frac{(1-2\alpha)^{\alpha}(1+2\alpha)^{-\alpha}}{2i\sqrt{1-4\alpha^2}}.$

2. Fig. 145 : $w=\frac{C}{z}(z^2-1)^{2\alpha}(z^2+1)^{1-2\alpha},\quad C=\frac{(1-2\alpha)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2^{\alpha+1}\alpha^{\alpha}}.$

3. Fig. 146 :

$$w=-i2^{\alpha-\frac{3}{2}}(1-\cos\theta)^{-\frac{1}{2}-\alpha}\cdot\frac{1}{z}(z+1)^{1-2\alpha}(z^2+2z\cos\theta+1)^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

où θ est l'unique solution de l'équation

$$(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}-\alpha}=(1-\cos\theta)\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

située dans l'intervalle $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

37.46.

1. Fig. 147 : $w=\frac{2\pi}{z-\ln z-1}.$

2. Fig. 148 : $w=\frac{2z\sqrt{z}-(1+2z)\sqrt{1-z}}{2z\sqrt{z}+(1+2z)\sqrt{1-z}}.$

3. Fig. 149 : $w=i\,\frac{(1+\sqrt{2})(1-2z)^{3/2}+(1+i)3^{3/4}\sqrt{z(1-z)}}{(1+\sqrt{2})(1-2z)^{3/2}-(1+i)3^{3/4}\sqrt{z(1-z)}}$

(ici, $A_3=i+0i$).

4. Fig. 150 : $w=\frac{2\pi}{z^2-2\ln z+\pi i-\pi-1}.$

37.47.

1. Fig. 151 : $w=(1+i)2^{1/2}\cdot 3^{-3/4}\cdot \sqrt[4]{(z-1)(z+1)^3}$.

2. Fig. 152 : $w=\pi i\left\{\dfrac{1}{(a^2-1)\sqrt{1-z^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1-z^2}+1}{\sqrt{1-z^2}-1}\right\}^{-1}$, où a est l'unique solution positive de l'équation $\dfrac{2a}{a^2-1}+\ln\dfrac{a+1}{a-1}=\pi$.

3. Fig. 153 : $w=-\pi i\left(\sqrt{\dfrac{(1+a^2)z+a^2-1}{z-1}}-\ln\dfrac{\sqrt{z-1}+\sqrt{(1+a^2)z+a^2-1}}{a\sqrt{z-1}}-\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$,

où a est l'unique solution positive de l'équation

$$\sqrt{1+a^2}-\ln\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a}=\frac{\pi}{2}.$$

37.48.

1. Fig. 154 : $w=\dfrac{2}{\pi}\left\{\ln\left(e^{\pi z}+\sqrt{a^2+e^{2\pi z}}\right)-\sqrt{1+a^2e^{2\pi z}}-\ln a\right\}$,

où a est l'unique solution positive de l'équation

$$\sqrt{1+a^2}=\operatorname{cth}\sqrt{1+a^2}.$$

2. Fig. 155 : $w=2^{1/3}3^{-1/2}\operatorname{sh}\pi z\,(\operatorname{ch}\pi z)^{-2/3}$.

3. Fig. 156 : $\dfrac{1}{\pi}\left\{\ln\dfrac{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}+(1+i)\operatorname{sh}\pi z}{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}-(1+i)\operatorname{sh}\pi z}+i\ln\dfrac{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}+(1-i)\operatorname{sh}\pi z}{2\sqrt{\operatorname{ch}\pi z}-(1-i)\operatorname{sh}\pi z}\right\}$.

37.49.

1. Fig. 157 : $w=-\dfrac{\pi(a^2-1)}{i\operatorname{sh}z-\dfrac{a^2-1}{2}\ln\dfrac{1-i\operatorname{sh}z}{1+i\operatorname{sh}z}}$, où a est l'unique solution positive de l'équation

$$\frac{2a}{a^2-1}-\ln\frac{a-1}{a+1}=\pi.$$

2. Fig. 158 : $w=\dfrac{\pi i}{z-\operatorname{cth}z}$.

37.50.

$$w=-\frac{1}{4\pi}\ln\{[(a-b)\cos z+a+b]^3[3(a-b)\cos z+3(a+b)+4]\},$$

où a est l'unique solution positive et b l'unique solution négative de l'équation $3x^4+2x^3=1/16$.

37.51.

$$w=\frac{1}{4\pi}\ln\left\{\frac{\sqrt{4\cos^2 z-3}-\cos z}{\sqrt{4\cos^2 z-3}+\cos z}\cdot\left(\frac{\sqrt{4\cos^2 z-3}+2\cos z}{\sqrt{4\cos^2 z-3}-2\cos z}\right)^2\right\}.$$

37.52.

1. Fig. 159 : $w=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{\pi i(1-\alpha)}\displaystyle\int_1^z\frac{(\zeta-1)^{\alpha-1}}{\zeta^{\alpha+\beta}}\,d\zeta$.

2. Fig. 160 : $$w=e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\cdot\frac{2\Gamma^2\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)}{\pi\Gamma(2-\alpha)}\int_1^z \zeta^{\alpha-2}(\zeta^2-1)^{1-\alpha}\,d\zeta+1.$$

3. Fig. 161 : $$w=\frac{\Gamma(\alpha+1)e^{\pi i\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta+1)\sin\pi\beta}\int_z^{\infty}\zeta^{-\alpha-1}(\zeta-1)^{-\beta-1}\,d\zeta+i.$$

37.53. $$w=\frac{\pi n}{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}}\int_0^z (1-\zeta^n)^{-2/n}\,d\zeta.$$

37.54. $$w=h\cos\alpha\pi\int_0^z\left\{\frac{1-e^{\pi z}}{(\cos\alpha\pi)^{1/\alpha}+e^{\pi z}}\right\}^{\alpha}dz.$$

37.55. $$w=\int_0^z\left\{\frac{h^{\mu}e^{\pi z}-(H+h)^{\mu}}{e^{\pi z}-1}\right\}^{1/\mu}dz. \qquad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{H}{a}-2.$$

37.56. $$w=\frac{2h\cos\pi\alpha}{\pi}\int_0^z[1+(\cos\pi\alpha)^{1/\alpha}+z^2]^{-\alpha}\frac{z^{1+2\alpha}}{1+z^2}\,dz.$$

CHAPITRE VII

CHAMP VECTORIEL PLAN À POTENTIEL COMPLEXE

§ 38. Champs vectoriels plans arbitraires

Si à chaque point d'un certain domaine D on associe un vecteur, on dit que dans ce domaine est donné un *champ vectoriel*. D'habitude, le domaine est choisi dans l'espace à trois dimensions et en tant que vecteur on prend telle ou telle grandeur physique (force, vitesse, etc.). Lorsque l'on donne la définition mathématique complète de la notion de champ vectoriel, on prend en considération, dans une certaine mesure, le caractère de ces grandeurs (voir les problèmes donnés à la fin du présent paragraphe), mais pour la première initiation, on peut se limiter à la définition proposée plus haut.

Partout dans ce qui suit on n'examinera que des *champs vectoriels plans*, c'est-à-dire des champs vectoriels pour lesquels à chaque point d'un certain domaine du plan on associe un vecteur du même plan. Il est clair qu'au champ vectoriel plan correspond une certaine fonction d'une variable complexe et à valeurs complexes. Nous allons supposer que dans le domaine où est donné le champ vectoriel cette fonction soit continue de même que ses dérivées partielles premières.

Une courbe contenue dans le domaine D est appelée *ligne de courant* du champ vectoriel donné dans ce domaine si le vecteur tangent à cette courbe en chacun de ses points est colinéaire avec le vecteur du champ pris au même point (et s'il est orienté dans la même direction).

38.01. Soit $w(z)$ une fonction correspondant à un champ vectoriel et supposons qu'elle soit différente de zéro dans le domaine D où ce champ est donné. Soit en outre L une courbe lisse qui a pour équation paramétrique $z=z(t)$, $a \leq t \leq b$. Montrer que la courbe L est une ligne de courant du champ vectoriel si, et seulement si, les conditions ci-dessous sont vérifiées:

$$\operatorname{Im}\{\overline{w(z(t))}\cdot z'(t)\}=0, \qquad \operatorname{Re}\{\overline{w(z(t))}\cdot z'(t)\}>0, \qquad a\leq t\leq b.$$

38.02. Soit $w(z)$ une fonction correspondant à un champ vectoriel et supposons qu'elle soit différente de zéro dans le domaine où ce champ est donné. Montrer qu'une courbe qui a pour équation paramétrique $z=z(t)$, $a\leq t\leq b$, où la fonction $z(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dz}{dt}=w(z)$, est une ligne de courant du champ vectoriel.

38.03. Les conditions du problème 38.02 restant les mêmes, montrer que chaque ligne de courant a pour équation paramétrique $z=z(t)$, $a\leq t\leq b$, où la fonction $z(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dz}{dt}=w(z)$.

Indication. Ayant utilisé le résultat du problème 38.01, choisir un autre paramètre.

38.04. Montrer que les lignes de courant des champs vectoriels correspondant aux fonctions $w(z)$ et $\frac{1}{\overline{w(z)}}$ coïncident.

38.05. Trouver toutes les lignes de courant des champs vectoriels correspondant aux fonctions $w(z)$ ci-dessous et représenter graphiquement ces lignes:

1. $w(z) = \bar{z}$. 2. $w(z) = i\bar{z}$.

3. $w(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$. 4. $w(z) = \frac{z}{|z^2|}$. 5. $w(z) = \frac{1}{2}(1 - \bar{z}^{-2})$.

Les points du domaine où est donné le champ vectoriel auxquels correspond un vecteur nul sont appelés points *critiques*.

38.06. Montrer que par chaque point non critique passe exactement une ligne de courant.

Indication. Poser $z = x + iy$ dans l'équation $\frac{dz}{dt} = w(z)$, écrire l'équation de la ligne de courant sous la forme $y = y(x)$ ou $x = x(y)$, ensuite utiliser le théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle.

38.07. Supposons que d'un point $z_0 \neq \infty$ sorte une ligne de courant d'un champ vectoriel $w(z)$ de longueur σ contenue dans le domaine où ce champ est donné et que cette ligne ne passe pas par les points critiques du champ (les points de départ et d'arrivée de la ligne de courant sont aussi des points non critiques). Montrer que:

1. De chaque point z_1 situé assez près du point z_0 il sort également une ligne de courant de longueur σ contenue dans le domaine où ce champ est donné et qui ne passe pas par les points critiques du champ.

2. Si l'on note respectivement $z = \psi_0(s)$, $0 \leq s \leq \sigma$; $z = \psi_1(s)$, $0 \leq s \leq \sigma$, les équations naturelles des lignes de courant qui sortent des points z_0 et z_1, la grandeur $\sup\limits_{0 \leq s \leq \sigma} |\psi_1(s) - \psi_0(s)|$ tend vers zéro lorsque $z_1 \to z_0$.

Indication. Utiliser le théorème de la dépendance continue qui existe entre la solution d'une équation différentielle et les données initiales.

38.08. Trouver tous les points critiques des champs vectoriels ci-dessous et dire combien de lignes de courant pénètrent dans ces points (ou sortent de ces points) :

1. $w(z) = \bar{z}$. 2. $w(z) = \bar{z}^2$. 3. $w(z) = z$.

4. $w(z) = iz$. 5. $w(z) = \frac{\bar{z}^2}{|z|}$. 6. $w(z) = \frac{i}{2}(1 - \bar{z}^{-2})$.

Un champ vectoriel $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est appelé *solénoïdal* dans un certain domaine s'il existe une fonction réelle continûment différentiable dans ce domaine $V(x, y)$ telle que $\frac{\partial V}{\partial x} = -v(x, y)$, $\frac{\partial V}{\partial y} = u(x, y)$. Cette fonction $V(x, y)$ (ou bien, tout court $V(z)$) est appelée *fonction de courant* du champ vectoriel.

38.09. Montrer qu'un champ vectoriel $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est solénoïdal dans un domaine fini simplement connexe D si, et seulement si, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ dans tout le domaine D.

38.10. Soit $V(z)$ la fonction de courant d'un champ vectoriel solénoïdal. Montrer que la valeur de la fonction $V(z)$ en tous les points d'une même ligne de courant est la même.

38.11. Se convaincre que les champs vectoriels $w(z)$ ci-dessous sont solénoïdaux et trouver pour eux les fonctions de courant $V(z)$:

1. $w(z)=\bar{z}$. 2. $w(z)=\frac{iz}{|z|^2}$.
3. $w(z)=x^2y^2\bar{z}$ $(z=x+iy)$.
4. $w(z)=ix(x+i)-y(y-i)$ $(z=x+iy)$.

38.12. Soit $V(z)$ la fonction de courant d'un champ vectoriel solénoïdal. Montrer que l'ensemble de niveau de la fonction de courant (c'est-à-dire l'ensemble de points z en lesquels la fonction $V(z)$ prend une valeur donnée) est constitué par un certain nombre de lignes de courant qui ne se rencontrent qu'aux points critiques.

38.13. Soient deux champs vectoriels solénoïdaux donnés dans un même domaine, et soient $V_1(z)$ et $V_2(z)$ leurs fonctions de courant. Montrer que, si chaque ligne de courant d'un de ces champs est une ligne de courant de l'autre champ, alors il existe une fonction différentiable $\Phi(\xi, \eta)$ telle que

$$\Phi(V_1(z),\ V_2(z))\equiv 0.$$

Un champ vectoriel $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ est appelé *potentiel* dans un certain domaine s'il existe une fonction continûment différentiable dans ce domaine $U(x, y)$ telle que $\frac{\partial U}{\partial x}=u(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=v(x, y)$. Cette fonction $U(x, y)$ (ou bien, tout court $U(z)$) est appelée *potentiel* du champ vectoriel.

38.14. Montrer qu'un champ vectoriel $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ est potentiel dans un domaine fini simplement connexe D si, et seulement si, $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ dans tout le domaine D.

38.15. Montrer qu'un champ vectoriel $w(z)$ est potentiel dans un domaine D si, et seulement si, le champ vectoriel $iw(z)$ est solénoïdal dans ce domaine.

38.16. Se convaincre que les champs vectoriels $w(z)$ ci-dessous sont potentiels et trouver pour eux les potentiels $U(z)$:

1. $w(z)=\bar{z}^{-1}$ 2. $w(z)=i(\bar{z})^{-2}$.
3. $w(z)=i\bar{z}x^2y^2$ $(z=x+iy)$.
4. $w(z)=x(x^2+i)+iy(y^2-i)$ $(z=x+iy)$.

38.17. Montrer que le potentiel d'un champ vectoriel croît monotonement lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de courant.

Les lignes de niveau du potentiel d'un champ vectoriel sont appelées *lignes équipotentielles*. Pour un champ vectoriel à trois dimensions, les lignes équipotentielles sont remplacées par des surfaces. Pour cette raison, la notion de direction d'une ligne équipotentielle pour un champ vectoriel plan est introduite d'une façon quelque peu artificielle.

38.18. Soit un champ vectoriel potentiel. Montrer que:

1. Par chaque point non critique du champ vectoriel il passe exactement une ligne équipotentielle.

2. Une ligne équipotentielle et une ligne de courant qui passe par un point non critique donné se coupent en ce point à angle droit.

Comme direction positive d'une ligne équipotentielle nous allons considérer la direction à gauche par rapport à la direction positive de la ligne de courant passant par le même point.

38.19. Trouver toutes les lignes équipotentielles passant par les points critiques des champs vectoriels potentiels $w(z)$ ci-dessous:

1. $w(z)=\bar{z}$. 2. $w(z)=i\bar{z}x^2y^2$ $(z=x+iy)$.

3. $w(z)=i\bar{z}^2$. 4. $w(z)=\frac{1}{2}(1-\bar{z}^{-2})$.

38.20. Montrer qu'un champ vectoriel $w(z)$ est potentiel et solénoïdal dans un domaine D si, et seulement si, la fonction $\overline{w(z)}$ est régulière dans ce domaine.

38.21. Soit $w(z)$ un champ vectoriel potentiel et solénoïdal dans un domaine D, et soient respectivement $U(z)$ et $V(z)$ son potentiel et sa fonction de courant. Montrer que:

1. Les fonctions $U(z)$ et $V(z)$ sont harmoniques dans le domaine D, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

2. La fonction $W(z)=U(z)+iV(z)$ est régulière dans le domaine D.

3. La formule $W'(z)=\overline{w(z)}$ a lieu.

Un champ vectoriel potentiel et solénoïdal dans un domaine D sera appelé *champ vectoriel à potentiel complexe* dans ce domaine, tandis que la fonction $W(z)=U(z)+iV(z)$, où $U(z)$ est le potentiel et $V(z)$ la fonction de courant, sera appelée *potentiel complexe* de ce champ.

38.22. Montrer que les assertions suivantes sont vraies:

1. Pour qu'un champ vectoriel solénoïdal dans un domaine fini simplement connexe D soit à potentiel complexe dans D, il faut et il suffit que son potentiel soit harmonique dans D.

38.23. Trouver les équations des lignes de courant et des lignes équipotentielles pour les champs vectoriels ci-dessous, donnés par leurs potentiels complexes $W(z)$ dans les domaines D indiqués, et représenter graphiquement ces lignes:

1. $W=e^z$, D : $|\mathrm{Im}\, z|<\pi$. 2. $W=\ln\frac{z+1}{z-1}$, D : $\mathrm{Im}\, z>0$.

3. $W=i\ln\frac{z+1}{z-1}$, D : $\mathrm{Im}\, z>0$. 4. $W=\frac{1}{z^2-1}$, D : $z\neq\pm 1$.

5. $W=i\ln\frac{4z^2-1}{z^2-4}$, D : $|z|<1$, $\mathrm{Im}\, z>0$.

6. $W=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, D : $|z|>1$.

Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans un domaine D, et soit L une courbe arbitraire lisse par morceaux contenue dans ce domaine. Posons $S(L)=\int_L w_n\,ds$, $R(L)=\int_L w_s\,ds$, où w_s est le produit scalaire du vecteur $w(z)$ par le vecteur unité de la tangente à la courbe L au point z, w_n étant le produit scalaire du vecteur $w(z)$ par le vecteur unité de la normale à la courbe L au point z (on considère le vecteur de la tangente dirigé suivant la courbe, et le vecteur de la normale, à gauche par rapport à la courbe). La grandeur $S(L)$ sera appelée *flux* du champ vectoriel $w(z)$ à travers la courbe L, et la grandeur $R(L)$ *circulation* du champ vectoriel le long de la courbe L. (Le terme « circulation » est habituellement réservé pour une courbe fermée, tandis que pour une courbe non fermée, on utilise le terme « intégrale linéaire du champ vectoriel » qui est très peu adéquat. C'est pourquoi nous n'allons pas l'utiliser.)

38.24. Montrer que la circulation d'un champ vectoriel le long de tout tronçon d'une ligne de courant est positive.

38.25. Soit $w(z)$ un champ vectoriel potentiel. Montrer que son flux à travers un tronçon d'une ligne équipotentielle qui ne contient pas de points critiques est différent de zéro.

38.26. Montrer que:

1. Le flux d'un champ solénoïdal à travers toute courbe fermée est nul.
2. La circulation d'un champ potentiel le long de n'importe quelle courbe fermée est nulle.

38.27. Montrer qu'un champ vectoriel potentiel dans un domaine D ne peut pas posséder de lignes de courant fermées situées dans ce domaine.

38.28. Montrer qu'un champ vectoriel à potentiel complexe dans un domaine D ne peut avoir ni lignes de courant fermées ni lignes équipotentielles fermées (qui ne passent pas par les points critiques) situées dans ce domaine.

38.29. Soient Γ_1 et Γ_2 deux lignes de courant d'un champ vectoriel solénoïdal, et soit $V(z)$ sa fonction de courant. Notons C_1 la valeur de la fonction $V(z)$ sur la ligne de courant Γ_1 et C_2 la valeur de cette fonction sur la ligne de courant Γ_2. Montrer que le flux du champ vectoriel à travers toute courbe dont l'origine se situe sur Γ_1 et l'extrémité sur Γ_2 est égal à C_2-C_1.

38.30. Démontrer la formule $R(L)+iS(L)=\int_L \overline{w(z)}\,dz$.

38.31. Trouver le flux $S(L)$ et la circulation $R(L)$ des champs vectoriels $w(z)$ ci-dessous suivant les courbes L indiquées (les circonférences sont parcourues dans le sens inverse des aiguilles d'une montre):

1. $w=\frac{1}{z}$, L : $|z|=1$.
2. $w=\frac{i}{z}$, L : $|z-2|=1$.
3. $w=\frac{1}{z}$, L : $|z|=1$.

4. $w=\frac{1-i}{1-\bar{z}^2}$, L : $|z|=2$.

5. $w=e^{\bar{z}}$, L : $z=it$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

6. $w=\cos \bar{z}$, L : $z=iR+t$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

* * *

Un champ vectoriel est appelé *localement solénoïdal* dans un domaine D si pour chaque point de ce domaine il existe un voisinage tel que ce champ y soit solénoïdal. D'une façon analogue sont définies les notions de champ localement potentiel et de champ localement à potentiel complexe.

38.32. Montrer qu'un champ vectoriel localement solénoïdal dans un domaine fini simplement connexe est solénoïdal dans ce domaine.

Indication. Voir le problème 7.13.

38.33. Soit un champ vectoriel localement solénoïdal dans le domaine $0<|z|<\infty$. Montrer que ce champ est solénoïdal dans tout ce domaine si, et seulement si, $S(|z|=1)=0$.

38.34. Soit un champ vectoriel localement solénoïdal dans un domaine fini doublement connexe. Montrer que ce champ est solénoïdal dans tout ce domaine s'il existe au moins une courbe fermée L contenue dans le domaine en question, non homotope à zéro dans ce domaine et telle que $S(L)=0$.

Indication. Voir le problème 7.22.

38.35. Soit D un domaine fini m-connexe dont les composantes intérieures de la frontière sont $C_1, \ldots, C_{m-1}$, tandis que $z_1, \ldots, z_{m-1}$ sont des points arbitraires situés respectivement sur ces composantes. Montrer que, si un champ vectoriel $w(z)$ est localement solénoïdal dans le domaine D, alors le champ vectoriel

$$w_1(z)=w(z)-\sum_{k=1}^{m}\frac{S(L_k)}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_k},$$

est solénoïdal dans tout le domaine D (ici, L_k, $k=1, \ldots, m-1$, est une courbe simple fermée contenue dans le domaine D et constituant la frontière du domaine D_k qui contient la composante L_k sans contenir d'autres composantes de la frontière du domaine D).



Les problèmes qui suivent se rapportent au fait que la valeur d'un champ vectoriel en un point du domaine où il est donné n'est pas, strictement parlant, un vecteur mais un opérateur linéaire (tenseur)*qui agit dans l'espace des différentielles. Dans les conditions déterminées, un tel opérateur peut être donné en donnant un certain vecteur. Ayant en vue que ces questions sont superficiellement traitées par les manuels sur la théorie des fonctions

d'une variable complexe, on trouvera ci-dessous quelques explications qui prennent appui sur le sens physique de la notion de champ vectoriel.

Prenons comme modèle physique le champ de vitesses d'un mouvement stationnaire d'un fluide. Il est clair que l'écoulement d'un fluide est un phénomène physique qui ne dépend pas du choix du système de coordonnées, tandis que la notion de vitesse est liée au choix de ce système, et la vitesse d'écoulement varie lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre. Cependant, l'intensité du flux et de la circulation (le long de n'importe quelle courbe donnée) doit rester invariante lors du changement des coordonnées en vertu du sens physique de ces grandeurs. Dans le cas d'un champ vectoriel plan $w(z)$, cela signifie que, pour chaque courbe L, la grandeur $R(L)+iS(L)=\int_L \overline{w(z)}\,dz$ doit rester invariante au passage d'un système de coordonnées à un autre. Etant donné que la courbe L est une courbe arbitraire (on peut considérer qu'elle est représentée par un segment de droite allant du point z au point $z+dz$), cette assertion peut être formulée d'une façon encore plus simple :

L'expression différentielle $\overline{w(z)}\,dz$ doit être invariante lors du passage d'un système de coordonnées à un autre.

L'expression $\overline{w(z)}\,dz$ doit être interprétée comme l'application d'un certain opérateur linéaire (qui dépend du point z) au vecteur dz disposé dans le plan des différentielles. Dans le cas général, un tel opérateur peut être décrit par une matrice d'ordre 2 dont les éléments dépendent de z, mais, dans certains cas, cet opérateur se ramène au produit du nombre complexe dz par un certain nombre complexe dépendant de z. On démontre aisément que cette dernière affirmation est impossible si l'on veut assurer l'invariance de l'expression différentielle $\overline{w(z)}\,dz$ pour tout changement de coordonnées. Pourtant, cela devient possible si l'on se limite à des changements de coordonnées qui se ramènent à une représentation conforme.

38.36. Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans un domaine D, et soit $\zeta=\varphi(z)$ la représentation conforme du domaine D sur un domaine D'. Désignons par $w^*(\zeta)$ la valeur du champ vectoriel $w(z)$ en coordonnées nouvelles ζ (qui correspondent au même point que le point z en coordonnées anciennes). Montrer que $w^*(\zeta)=\dfrac{w(z)}{\overline{\varphi'(z)}}$.

38.37. Tout en conservant les notations du problème précédent, introduisons les notations :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} z=x,\ \operatorname{Im} z=y\ ; && \operatorname{Re}\zeta=\xi,\ \operatorname{Im}\zeta=\eta\ ;\\ &\operatorname{Re} w(z)=u(x,y), && \operatorname{Im} w(z)=v(x,y)\ ;\\ &\operatorname{Re} w^*(\zeta)=u^*(\xi,\eta), && \operatorname{Im} w^*(\zeta)=v^*(\xi,\eta). \end{aligned}$$

Démontrer les formules :

1. $\dfrac{\partial u^*}{\partial \xi^*}+\dfrac{\partial v^*}{\partial \eta^*}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot|\varphi'(z)|^{-2}$. 2. $\dfrac{\partial v^*}{\partial \xi^*}-\dfrac{\partial u^*}{\partial \eta^*}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot|\varphi'(z)|^{-2}$.

Dans ce qui suit, au lieu d'écrire « la grandeur est invariante au passage d'un système de coordonnées à un autre se ramenant à une représentation conforme », on va dire tout court « la grandeur est invariante par rapport aux représentations conformes ».

38.38. Montrer que la fonction de courant d'un champ vectoriel solénoïdal est invariante par rapport aux représentations conformes.

38.39. Montrer que le potentiel d'un champ vectoriel potentiel est invariant par rapport aux représentations conformes.

38.40. Montrer que les points critiques d'un champ vectoriel sont invariants par rapport aux représentations conformes.

38.41. Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans un domaine D. Est-ce que les grandeurs ci-dessous seront invariantes par rapport aux représentations conformes ?

1. $\int\limits_L |w(z)|\,ds$. 2. $\iint\limits_\Delta |w(z)|^2\,d\sigma$. 3. $\iint\limits_\Delta |w(z)|\,d\sigma$. 4. $\int\limits_L w(z)\,dz$.

5. $\iint\limits_\Delta \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma$. 6. $\int\limits_L \sqrt{\left|\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right|}\,ds$.

Ici, L est une courbe contenue dans le domaine D, Δ un sous-domaine du domaine D, ds un élément de longueur d'arc, $d\sigma$ un élément de surface du domaine D,

$$u(x, y) = \text{Re}\, w(x+iy), \qquad v(x, y) = \text{Im}\, w(x+iy).$$

RÉPONSES

38.05.

1. $xy = \text{const}$; voir la fig. 165. 2. $x^2 - y^2 = \text{const}$; voir la fig. 166. 3. $xy = \text{const}$; voir la fig. 165.

4. $\arg z = \text{const}$; voir la fig. 167. 5. $\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi = \text{const}$ $(z = re^{i\varphi})$; voir la fig. 168.

38.08.

1. $z = 0$; quatre. 2. $z = 0$; six. 3. $z = 0$; une infinité. 4. $z = 0$; aucune. 5. $z = 0$; six. 6. $z = 1$ et $z = -1$; quatre lignes pour chaque point.

38.11.

1. $V = xy + C$. 2. $V = -\ln|z| + C$. 3. $V = \frac{1}{3}x^3y^3 + C$.

4. $V = -\frac{1}{3}(x^3 + y^3) - xy + C$.

38.16.

1. $U = \ln|z| + C$. 2. $U = -\frac{y}{x^2+y^2} + C$. 3. $U = -\frac{1}{3}x^3y^3 + C$.

4. $U = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) + xy + C$.

38.19.

1. $\arg z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$. 2. $\arg z = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

3. $\arg z = \frac{k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

4. $z = 1 : y = \pm(x-1)\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ $(0 < x < 2)$;

$z = -1 :$ $y = \pm(x+1)\sqrt{-\frac{x}{x+2}}$ $(-2 < x < 0)$.

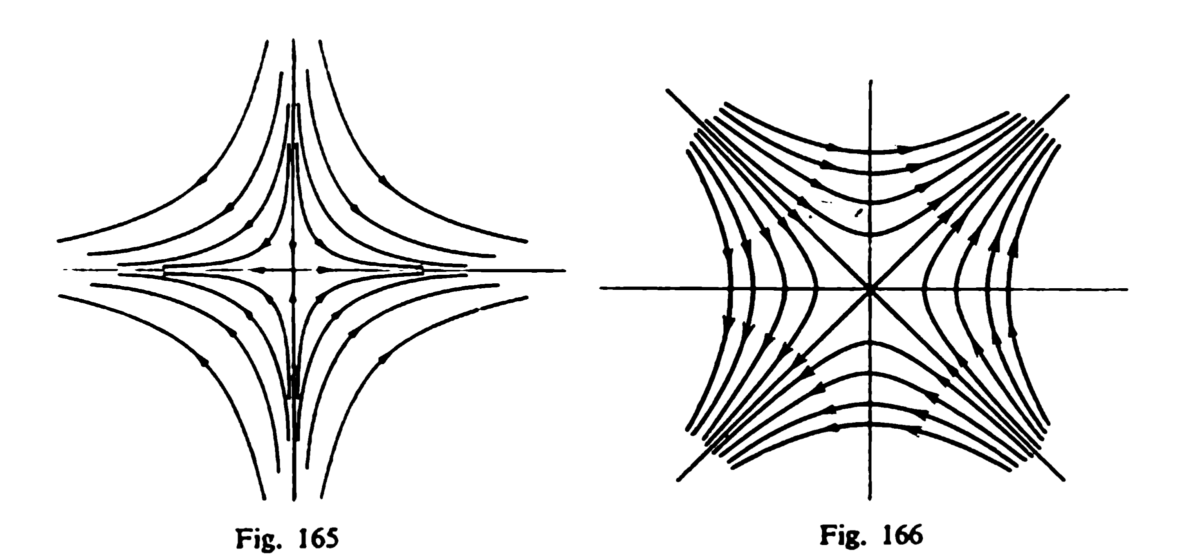


Fig. 165 Fig. 166

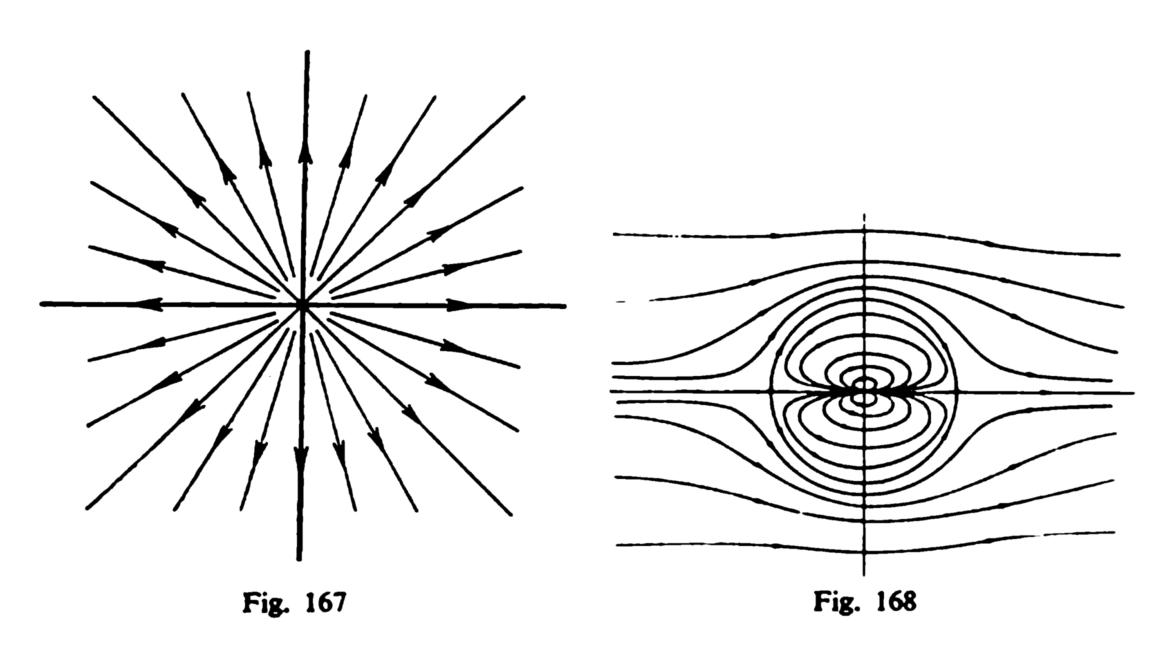


Fig. 167 Fig. 168

38.23.

1. Lignes de courant : $y = \text{const}$; lignes équipotentielles : $x = \text{const}$; voir la fig. 169.

2. Lignes de courant : $|z - iC| = \sqrt{1+C^2}$, $0 < C < \infty$; $y = 0$; lignes équipotentielles : $\left|z - \frac{C^2+1}{C^2-1}\right| = \frac{2C}{|C^2-1|}$, $0 < C < 1$, $C > 1$; $x = 0$; voir la fig. 170.

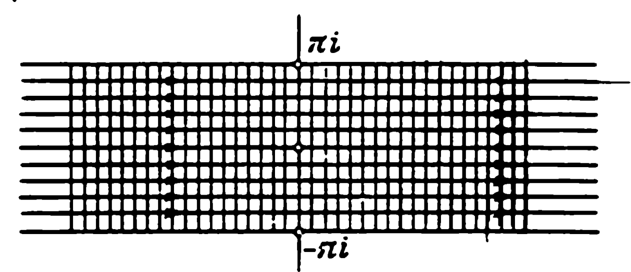


Fig. 169

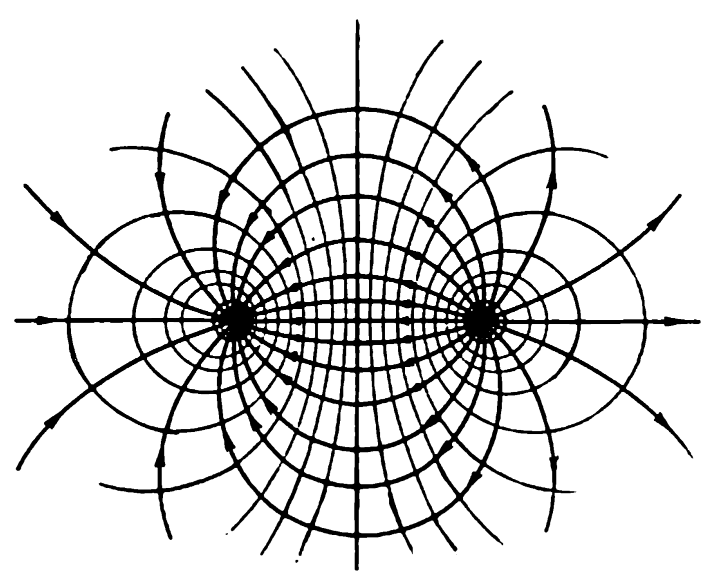


Fig. 170

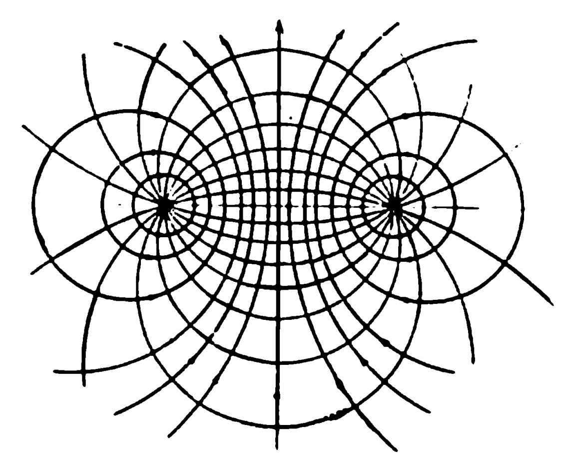


Fig. 171

3. Lignes de courant : $\left|z - \frac{C^2+1}{C^2-1}\right| = \frac{2C}{|C^2-1|}$, $0 < C < 1$, $C > 1$; $x = 0$; lignes équipotentielles : $|z - iC| = \sqrt{C^2+1}$, $0 < C < \infty$; $y = 0$; voir la fig. 171.

4. Lignes de courant : $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)+Cxy+1=0$; $x=0$; $y=0$; lignes équipotentielles : $(x^2+y^2)^2-C(x^2-y^2)-1+C=0$; $x=\pm\sqrt{1+y^2}$; voir la fig. 172.

5. Lignes de courant : $\left|\dfrac{4z^2-1}{z^2-4}\right|=\text{const}$; lignes équipotentielles : $\arg\dfrac{4z^2-1}{z^2-4}=\text{const}$; voir la fig. 173.

6. Lignes de courant : $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi=\text{const}$ $(re^{i\varphi}=z)$; lignes équipotentielles : $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi=\text{const}$; voir la fig. 174.

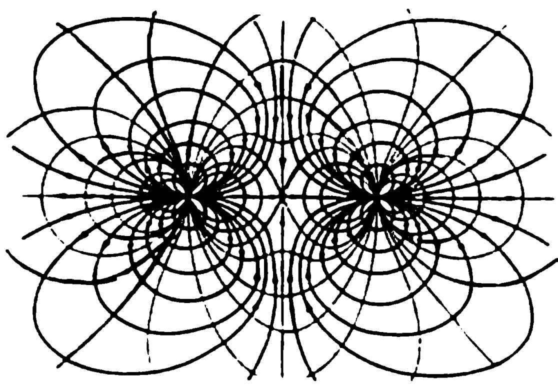


Fig. 172

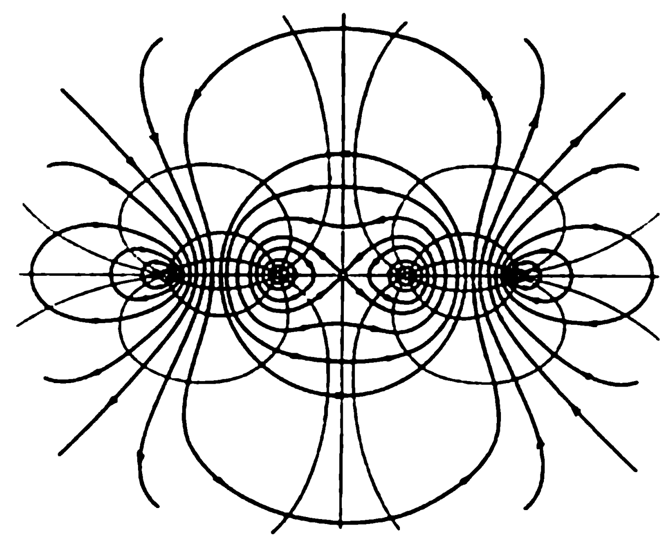


Fig. 173

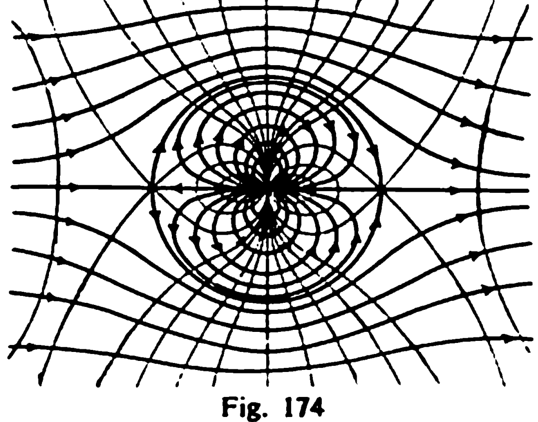


Fig. 174

38.31.

1. $S=2\pi$, $R=0$. 2. $S=0$, $R=-\dfrac{\pi}{2}$. 3. $S=0$, $R=0$. 4. $S=0$, $R=0$.
5. $S=0$, $R=0$. 6. $S=0$, $R=0$.

38.41.

1. Oui. 2. Oui. 3. Non. 4. Non. 5. Oui. 6. Oui.

§ 39. Points singuliers des champs vectoriels à potentiel complexe

Partout dans ce qui suit nous n'aurons affaire qu'à des champs vectoriels localement à potentiel complexe, c'est-à-dire à des champs vectoriels $w(z)$ tels que, pour eux, la fonction $\overline{w(z)}$ soit régulière. On appelle *potentiel complexe* d'un pareil champ vectoriel une fonction analytique $W(z)$ (qui, généralement parlant, est une fonction multiforme) dont la dérivée est uniforme et coïncide avec la fonction $\overline{w(z)}$. Les fonctions harmoniques $U(z)=$ $=\operatorname{Re} W(z)$, $V(z)=\operatorname{Im} W(z)$ (qui, généralement parlant, sont aussi des fonctions multiformes) sont appelées respectivement *potentiel* et *fonction de courant* du champ vectoriel $w(z)$.

On appelle *ligne de courant* d'un champ vectoriel $w(z)$ une courbe simple lisse par morceaux L dont la direction en chaque point où elle a une tangente coïncide avec la direction du vecteur $w(z)$.

On appelle *ligne équipotentielle* d'un champ vectoriel $w(z)$ une courbe simple lisse par morceaux L dont la direction en chaque point où elle a une tangente coïncide avec la direction du vecteur $iw(z)$.

On vérifie aisément que sur chaque ligne de courant la fonction de courant reste constante, tandis que sur chaque ligne équipotentielle c'est le potentiel qui est constant (ayant en vue que la fonction de courant et le potentiel peuvent être des fonctions multiformes, on entend par leurs valeurs en un point de la courbe les valeurs obtenues par un prolongement continu suivant la courbe depuis une détermination quelconque choisie au point d'origine de la courbe).

39.01. Pour les champs vectoriels $w(z)$ ci-dessous, trouver le potentiel complexe $W(z)$, le potentiel $U(z)$ et la fonction de courant $V(z)$ et représenter graphiquement les lignes de courant et les lignes équipotentielles :

1. $w=e^{i\frac{\pi}{4}}$. 2. $w=\bar{z}$. 3. $w=i\bar{z}$. 4. $w=\bar{z}^2$.
5. $w=e^{-\frac{\pi i}{4}}\bar{z}$. 6. $w=-\bar{z}^{-1}$.
7. $w=i\bar{z}^{-1}$. 8. $w=(1+i)\bar{z}^{-1}$.
9. $w=\bar{z}^{-2}$. 10. $w=i\bar{z}^{-2}$.

Un point $z_0\neq\infty$ est appelé *point critique* d'un champ vectoriel $w(z)$ si $w(z_0)=0$. On appelle *ordre d'un point critique* $z_0\neq\infty$ l'ordre du zéro de la fonction $\overline{w(z)}$ au point z_0. Le point à l'infini est un point critique d'ordre m pour le champ vectoriel $w(z)$ si le point $\zeta=0$ est un point critique d'ordre m pour le champ vectoriel $-\zeta^{-2}w(\zeta^{-1})$.

39.02. Trouver les lignes de courant du champ vectoriel $w(z)=\bar{z}^m$ ($m=1, 2, \ldots$) sortant du point critique $z=0$ et pénétrant dans ce point.

39.03. Représenter graphiquement les lignes de courant des champs vectoriels $w(z)=\bar{z}$ et $w(z)=\bar{z}^2$ près du point critique $z=0$.

39.04. Trouver tous les points critiques des champs vectoriels ci-dessous, donnés par les potentiels complexes $W(z)$, et les équations de toutes les lignes de courant passant par ces points :

1. $W=z+\frac{1}{z}$. 2. $W=\ln\frac{z+1}{(z-1)^2}$. 3. $W=z+\frac{1}{z}+i\ln z$.

4. $W=z+\frac{1}{z}+\frac{5}{3}i\ln z$. 5. $W=z+\frac{1}{z}+2i\ln z$. 6. $W=z+\ln z$.

7. $W=z+i\ln z$. 8. $W=z-\frac{1}{z}$. 9. $W=z+\frac{i}{z}$.

Un point $z_0\neq\infty$ est appelé *pôle d'ordre m* pour un champ vectoriel $w(z)$ si ce point est un pôle d'ordre m pour la fonction $\overline{w(z)}$. Le point $z=\infty$ est appelé pôle d'ordre m pour un champ vectoriel $w(z)$ si le point $\zeta=0$ est un pôle d'ordre m pour le champ vectoriel $-\zeta^{-2}w(\zeta^{-1})$.

D'habitude, les pôles d'un champ vectoriel ne sont pas exclus du domaine où ce champ est donné, mais sont appelés *points singuliers* du champ vectoriel. On adopte la classification suivante des points singuliers d'un champ vectoriel.

Un point $z_0\neq\infty$ est appelé *source d'intensité* $2\pi\alpha$ si dans le voisinage du point z_0 la fonction $\overline{w(z)}$ peut être présentée sous la forme $\overline{w(z)}=\frac{\alpha}{z-z_0}+f(z)$, où la fonction $f(z)$ est régulière au point z_0, α étant un nombre réel (une source d'intensité négative est souvent appelée puits).

Un point $z_0\neq\infty$ est appelé *tourbillon d'intensité* $2\pi\beta$ si dans le voisinage du point z_0 la fonction $\overline{w(z)}$ peut être présentée sous la forme $\overline{w(z)}=\frac{i\beta}{z-z_0}+$ $+f(z)$, où la fonction $f(z)$ est régulière au point z_0, β étant un nombre réel.

Un point $z_0\neq\infty$ est appelé *dipôle de moment* $2\pi a$ si dans le voisinage du point z_0 la fonction $\overline{w(z)}$ peut être présentée sous la forme $\overline{w(z)}=-\frac{a}{(z-z_0)^2}+$ $+f(z)$, où la fonction $f(z)$ est régulière au point z_0 (souvent, on appelle moment d'un dipôle le nombre $|a|$, le nombre $\arg a$ étant la direction de l'axe du dipôle).

Un point $z_0\neq\infty$ est appelé *multipôle d'ordre* $2m$ ($m>1$) si dans le voisinage du point z_0 la fonction $\overline{w(z)}$ peut être présentée sous la forme $\overline{w(z)}=\frac{c}{(z-z_0)^m}+$ $+f(z)$, où la fonction $f(z)$ est régulière au point z_0.

On considère que pour un champ vectoriel $w(z)$, le caractère du point singulier $z=\infty$ coïncide avec le caractère du point singulier $\zeta=0$ pour le champ vectoriel $-\zeta^{-2}w(\zeta^{-1})$; si seulement le point singulier est un dipôle, alors, pour le moment, on prend le signe opposé.

Généralement parlant, un pôle arbitraire d'un champ vectoriel est constitué par un tourbillon, une source, un dipôle et des multipôles d'ordre $2m$, $m<n$, où n est l'ordre du pôle. Un pôle constitué par un tourbillon et une source est parfois appelé *tourbillon-source*.

39.05. Trouver et décrire tous les points singuliers des champs vectoriels ci-dessous donnés dans les domaines D indiqués par leurs potentiels complexes $W(z)$:

1. $W=z+i\ln z$; D : $|z|>1$. 2. $W=i\ln\frac{2z-1}{z-2}$; D : $|z|<1$.
3. $W=z+i\ln z$; D : $|z|<1$. 4. $W=z+\frac{1}{z}$; D : $|z|\leq\infty$.
5. $W=\ln\sin z$; D : $|z|<\infty$. 6. $W=i\ln\operatorname{tg} z$; D : $|z|<\infty$.
7. $W=\ln(z^2-1)$; D : $|z|\leq\infty$. 8. $W=\ln\left(z+\frac{1}{z}\right)$; D : $|z|\leq\infty$.
9. $W=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $W'(1)>0$; D : $z\notin[-i, i]$.
10. $W=i\ln(2z+\sqrt{z^2-1})$, $W'(\sqrt{2})=\frac{2i(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}+1}$; D : $z\notin[-1, 1]$.

39.06. Montrer que le point $z=\infty$ sera un tourbillon-source respectivement d'intensité β et α pour un champ vectoriel si, et seulement si, le potentiel complexe $W(z)$ de ce champ dans le voisinage du point $z=\infty$ peut être présenté sous la forme $W(z)=-\frac{\alpha+i\beta}{2\pi}\ln z+f(z)$, où la fonction $f(z)$ est régulière au point $z=\infty$.

39.07. Montrer que l'intensité d'une source située en un point $z_0\neq\infty$ est égale au flux du champ à travers une circonférence assez petite de centre z_0 (la direction est inverse au sens des aiguilles d'une montre).

39.08. Montrer que l'intensité d'un tourbillon situé en un point $z_0\neq\infty$ est égale à la circulation du champ vectoriel le long d'une circonférence assez petite de centre z_0 (la direction est inverse au sens des aiguilles d'une montre).

39.09. Montrer qu'un point singulier z_0 d'un champ vectoriel sera une source si, et seulement si, le potentiel du champ vectoriel est uniforme dans un certain voisinage du point z_0 et y conserve son signe.

39.10. Montrer qu'un point singulier z_0 d'un champ vectoriel sera un tourbillon si, et seulement si, la fonction de courant de ce champ vectoriel est uniforme dans un certain voisinage du point z_0 et y conserve son signe.



Même pour des champs vectoriels relativement simples, une étude complète des lignes de courant présente beaucoup de difficultés. Pourtant, pour la résolution d'un grand nombre de questions, il suffit d'obtenir certains renseignements qualitatifs sur le comportement des lignes de courant. Pour effectuer des études qualitatives de ce genre, on utilise comme instrument de base l'invariance de l'expression différentielle $\overline{w(z)}\,dz$ lors des représentations conformes (pour plus de détails, voir le texte qui précède le problème 38.36).

39.11. Montrer que l'ordre d'un pôle est invariant lors des représentations conformes.

39.12. Montrer que l'intensité d'une source et l'intensité d'un tourbillon sont invariantes lors des représentations conformes.

39.13. Dire comment va varier le moment a d'un dipôle en un point z_0 par la représentation conforme $\zeta = \varphi(z)$ (à condition que le dipôle se trouve en un point à distance finie aussi bien avant qu'après l'application).

39.14. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans le voisinage d'une source.

Indication. En utilisant l'invariance de l'expression différentielle $\overline{w(z)}\,dz$, ramener l'étude au cas $w(z) = \frac{\alpha}{\bar{z}}$.

39.15. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans le voisinage d'un tourbillon.

39.16. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans le voisinage d'un point critique d'ordre 1 et 2.

39.17. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans le voisinage d'un dipôle.

39.18. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans le voisinage d'un tourbillon-source dont les intensités sont différentes de zéro.

39.19. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans le voisinage des multipôles d'ordre 4 et 6.

39.20. Soit z_0 un pôle d'ordre $m \geq 2$ pour un champ vectoriel dont le potentiel complexe est $W(z)$. Montrer que l'ensemble de niveau de la fonction de courant $\operatorname{Im} W(z) = C$ est constitué, dans un voisinage assez petit du point z_0, par $m-1$ lignes de courant pénétrant dans le pôle et par $m-1$ lignes de courant sortant de ce pôle. Avec cela, les lignes de courant qui pénètrent dans le pôle alternent avec les lignes de courant qui en sortent et les angles que font entre elles au point z_0 deux lignes immédiatement voisines sont égaux à $\frac{\pi}{m-1}$.

Indication. A l'aide de la représentation conforme, ramener l'étude au cas où $W(z) = a \ln z + \frac{1}{z^{m-1}}$ et $z_0 = 0$.

39.21. Montrer qu'un voisinage aussi petit que l'on veut d'un point singulier d'un champ vectoriel comporte des lignes de courant fermées (lignes qui ne passent pas par ce point singulier), si, et seulement si, ce point singulier est un tourbillon.

39.22. Soit un point singulier d'un champ vectoriel jouissant de la propriété que les lignes de courant qui en sortent sont tangentes à n'importe quelle direction. Montrer que ce point singulier est une source.

39.23. Montrer que, si dans un certain voisinage d'un point singulier d'un champ vectoriel il n'y a pas de lignes de courant contenues entièrement dans ce voisinage et ayant l'origine et l'extrémité en ce point, alors ce point singulier est un tourbillon-source.

La voie qu'il faut suivre pour décrire le tableau qualitatif des lignes de courant d'un champ vectoriel tout entier (et pas seulement dans le voisinage de certains points) est donnée par le théorème que l'on propose de démontrer dans les problèmes suivants.

39.24. Supposons que le domaine où est donné un champ vectoriel $w(z)$ contienne le domaine D dont la frontière est constituée par des tronçons de lignes de courant de ce champ vectoriel se rencontrant aux points critiques (mais pas aux pôles, car il n'y a pas de pôles sur la frontière de ce domaine). Traçons dans le domaine D toutes les lignes de courant, qui passent par les points critiques du champ, situés dans le domaine D où sur sa frontière. Alors le domaine D va se décomposer en un certain nombre de domaines D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Montrer que les domaines D_k doivent appartenir à l'un des quatre types indiqués ci-dessous :

1. Le domaine D_k est simplement connexe et sur sa frontière il n'y a pas de pôles du champ vectoriel.

2. Le domaine D_k est doublement connexe et sur sa frontière il n'y a pas de pôles du champ vectoriel.

3. Le domaine D_k est simplement connexe et sur sa frontière il y a un point qui est un pôle du champ vectoriel.

4. Le domaine D_k est simplement connexe et deux points de sa frontière sont des pôles du champ vectoriel (ces deux points de la frontière peuvent parfois n'être qu'un point du plan).

Indication. Prenons une ligne de courant quelconque qui pénètre dans la frontière du domaine D_k et supposons que sur cette ligne $\operatorname{Im} W(z) = C_0$. Ensuite, examinons une ligne de courant voisine, sur laquelle $\operatorname{Im} W(z) = C_0 + \varepsilon$, contenue dans le domaine D_k (le nombre ε peut être soit positif soit négatif). Elucider ce qui se passe avec cette ligne de courant lorsque ε varie. Lors de cette dernière opération, il est utile d'avoir en vue le résultat du problème 38.07.

39.25. Les notations du problème 39.24 restant valables, montrer que dans un domaine D_k du 1er type on trouve exactement un point singulier du champ vectoriel et que ce point singulier est un tourbillon.

39.26. Les notations du problème 39.24 restant les mêmes, montrer que les domaines D_k des trois derniers types ne contiennent pas de points singuliers du champ vectoriel.

39.27. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant dans les domaines D_k (voir le problème 39.24) de chacun des quatre types énumérés.

39.28. Montrer que sur la frontière d'un domaine D_k du 3e type (voir le problème 39.24) on trouve un pôle du champ vectoriel d'ordre non inférieur à 2.

39.29. Montrer qu'un pôle d'ordre $m \geq 2$ est un point commun des fermetures de $2m - 2$ domaines D_k (voir le problème 39.24) du 3e type et, il se peut, d'un certain nombre de domaines du 4e type.

39.30. Montrer que chaque point critique d'ordre m situé à l'intérieur du domaine D est un point commun de la fermeture d'au moins $m + 2$ domaines D_k (voir le problème 39.24).

39.31. Montrer que, si un point critique d'ordre m est un point commun de la fermeture des domaines D_k (voir le problème 39.24) du 4e type seulement, alors le nombre de ces domaines est égal à $2m + 2$.

39.32. Soit D un domaine simplement connexe et supposons qu'un champ vectoriel possède dans ce domaine deux sources dont les intensités sont de

signe opposé sans avoir d'autres pôles. Montrer que, si les conditions du problème 39.24 sont satisfaites, le domaine D se décompose en deux domaines D_k et que ces derniers sont du 4[e] type.

Indication. Prendre une ligne de courant $\operatorname{Im} W(z) = C_0$ quelconque contenue dans le domaine D (elle doit obligatoirement aller d'une source à l'autre) et voir ce qui peut se passer avec cette ligne de courant lorsque C_0 varie.

39.33. Soit D un domaine simplement connexe et supposons qu'un champ vectoriel ait dans ce domaine deux tourbillons dont la somme des intensités est nulle, sans avoir d'autres pôles. Montrer que, si les conditions du problème 39.24 sont satisfaites, le domaine D se décompose en deux domaines du 1[er] type.

39.34. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant des champs vectoriels à potentiels complexes $W(z)$ ci-dessous dans les domaines D indiqués :

1. $W = \ln \dfrac{(2z-1)(z-2)}{(2z+1)(z+2)}$; D : $|z| < 1$.
2. $W = i \ln \dfrac{(2z-1)(z+2)}{(2z+1)(z-2)}$; D : $|z| < 1$.
3. $W = i \ln \dfrac{4z^2-1}{z^2-4}$; D : $|z| < 1$.
4. $W = \ln \dfrac{(2z-1)(z-2)}{(2z-i)(z-2i)}$; D : $|z| < 1$.
5. $W = \ln \dfrac{(2z-e^{\pi i/4})(z-2e^{\pi i/4})}{(2z-e^{-\pi i/4})(z-2e^{-\pi i/4})}$; D : $|z| < 1$.
6. $W = i \ln \dfrac{z^2(4z^2-1)}{z^2-4}$; D : $|z| < 1$.
7. $W = i \ln \dfrac{z^2(8z^3-1)}{z^3-8}$; D : $|z| < 1$.
8. $W = z + \dfrac{1}{z} + i \ln z$; D : $|z| > 1$.
9. $W = z + \dfrac{1}{z} + 3i \ln z$; D : $|z| > 1$.
10. $W = z + \dfrac{1}{z} + \ln \dfrac{(2z-1)(z-2)}{(2z+1)(z+2)}$; D : $|z| < 1$.
11. $W = \ln \dfrac{(2z-1)(z-2)}{(2z+1)(z+2)} - i \ln \dfrac{(2z-1)(z+2)}{(2z+1)(z-2)}$; D : $|z| < 1$.
12. $W = \ln \dfrac{(2z-1)(z-2)}{(2z+1)(z+2)} - i \ln \dfrac{4z^2-1}{z^2-4}$; D : $|z| < 1$.

39.35. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant dans les cas où, les conditions du problème 39.24 étant satisfaites, le domaine D est simplement connexe et le champ vectoriel possède dans ce domaine seulement les points singuliers ci-dessous :

1. Trois sources dont la somme des intensités est nulle.
2. Deux sources, dont la somme des intensités est nulle, et un dipôle.
3. Un tourbillon et un dipôle.
4. Un tourbillon et deux sources dont la somme des intensités est nulle.
5. Trois tourbillons.

39.36. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant dans les cas où, les conditions du problème 39.24 étant satisfaites, le domaine D est doublement connexe et le champ vectoriel possède dans ce domaine seulement les points singuliers ci-dessous :

1. Un tourbillon.
2. Un dipôle.
3. Deux sources dont la somme des intensités est nulle.
4. Deux tourbillons.

39.37. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant dans les cas où, les conditions du problème 39.24 étant satisfaites, le domaine D est triplement connexe et le champ vectoriel n'a pas de points singuliers.

Les mêmes méthodes sont applicables au cas où le domaine D représente tout le plan élargi. Dans ce cas le domaine n'a pas de frontière et c'est pour cela qu'il est superflu de voir si elle est une ligne de courant.

39.38. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant des champs vectoriels à potentiels complexes $W(z)$ ci-dessous dans le plan élargi tout entier :

1. $W=z+\dfrac{1}{z}$. 2. $W=z-\dfrac{1}{z}$.

3. $W=z^3+3z$. 4. $W=\ln\dfrac{(z-1)^2}{z+1}$.

5. $W=\ln(z+1)(z-1)^2$. 6. $W=z+i\ln z$.

7. $W=z+\ln z$. 8. $W=z+\dfrac{i}{z}$.

9. $W=z+\dfrac{1}{z}+2i\ln z$.

10. $W=i\ln\dfrac{z}{(z-1)^2}$. 11. $W=i\ln(z+1)(z-1)^2$.

12. $W=2i\ln\dfrac{z+i}{z-i}+\ln\dfrac{z+1}{z-1}$.

39.39. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant si le domaine D représente tout le plan élargi et le champ vectoriel n'a que les points singuliers ci-dessous :

1. Deux dipôles (pour rendre le traçage plus facile, situer un de ces dipôles à l'infini).
2. Trois sources dont la somme des intensités est nulle (situer une source à l'infini).
3. Trois tourbillons dont la somme des intensités est nulle (situer un tourbillon à l'infini).
4. Un dipôle et deux tourbillons dont la somme des intensités est nulle (situer le dipôle à l'infini).
5. Un pôle d'ordre 3 (situé à l'infini).

* * *

Soit un champ vectoriel à potentiel complexe $W(z)$ donné dans un domaine D, et soit L une courbe lisse par morceaux constituant une partie de la frontière du domaine D. Nous allons appeler la courbe L *ligne de courant frontière* du champ vectoriel si:

a) le potentiel complexe est continu jusqu'à la courbe L;

b) la fonction de courant reste constante sur L;

c) lorsqu'on parcourt la courbe L dans le sens positif, le potentiel du champ de courant croît monotonement.

Si la frontière du domaine D, dans lequel est donné le champ vectoriel, est consituée, dans le voisinage d'un point frontière z_0, par deux lignes de courant frontières de ce champ vectoriel qui s'unissent au point z_0, et si pour $z \to z_0$, $z \in D$, le potentiel complexe du champ vectoriel tend vers l'infini, nous allons appeler le point z_0 *pôle frontière* du champ vectoriel.

Un pôle frontière z_0 d'un champ vectoriel sera appelé *source frontière* si pour $z \to z_0$, $z \in D$, la fonction de courant du champ vectoriel reste bornée.

Nous allons appeler *intensité* d'une source frontière z_0 la valeur du flux d'un champ vectoriel à travers tout arc L contenu dans un voisinage assez petit du point z_0 et joignant dans le domaine D les lignes de courant frontières qui s'unissent au point z_0, à condition que la direction de l'arc L soit choisie telle que la partie du domaine D dont la frontière contient le point z_0 reste à droite de l'arc L (l'indépendance de la valeur du flux du choix de l'arc L découle du problème 38.29).

39.40. Soit z_0 une source frontière d'un champ vectoriel. Montrer que pour $z \to z_0$, $z \in D$, le potentiel du champ vectoriel admet une limite égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

39.41. Montrer que quelque petit que soit le voisinage considéré d'une source frontière, chaque ligne équipotentielle sortant d'un point de la frontière, située assez près de la source frontière, ne sort pas du voisinage choisi de cette source et finit en un point de la frontière; en outre, l'origine et l'extrémité se situent de côtés différents par rapport à la source frontière.

39.42. Soit z_0 une source frontière d'un champ vectoriel. Désignons par L_1 la ligne de courant frontière qui précède la source frontière, et par L_2 la ligne de courant frontière qui suit après cette source (la frontière du domaine est parcourue dans le sens positif). Notons C_1 la valeur de la fonction de courant du champ vectoriel sur l'arc L_1, et C_2 sur l'arc L_2. Montrer que :

1. Les lignes de courant pénétrant dans la source frontière (ou sortant de cette source) correspondent aux valeurs de la fonction de courant comprises entre C_1 et C_2.

2. L'intensité de la source frontière est égale à $C_2 - C_1$.

39.43. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant d'un champ vectoriel dans le voisinage d'une source frontière.

Un pôle frontière d'un champ vectoriel est appelé *dipôle frontière* si la fonction de courant du champ vectoriel a la même valeur sur les deux lignes de courant frontières qui s'unissent en ce pôle et si dans ce pôle ne pénètre plus aucune ligne de courant ayant la même valeur de la fonction de courant.

39.44. Montrer que la fonction de courant d'un champ vectoriel n'est pas bornée dans le voisinage d'un dipôle frontière.

Indication. Réaliser la représentation conforme d'un certain voisinage du dipôle frontière sur le demi-disque $|\zeta|<1$, $\operatorname{Im}\zeta>0$ (cette application transforme le dipôle en le point $\zeta=0$) et appliquer le principe de symétrie.

39.45. Montrer que, si le point z tend vers un dipôle frontière suivant la frontière d'un domaine, le potentiel du champ vectoriel a comme limites $+\infty$ d'un côté et $-\infty$ de l'autre.

39.46. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant d'un champ vectoriel dans le voisinage d'un dipôle frontière.

39.47. Montrer que l'intensité d'une source frontière est invariante lors des représentations conformes.

39.48. Trouver les sources frontières et les dipôles frontières pour les champs vectoriels ci-dessous donnés par leurs potentiels complexes $W(z)$ dans les domaines D indiqués. Déterminer en outre l'intensité des sources frontières :

1. $W=e^z$; D : $|\operatorname{Im} z|<a$.

2. $W=\ln\dfrac{z+1}{z-1}$; D : $|z|<1$.

3. $W=\ln\cos z$; D : $0<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0$.

4. $W=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$; D : $\operatorname{Im} z>0$.

5. $W=z+\dfrac{1}{z}+\ln z$; D : $\operatorname{Im} z>0$.

6. $W=\sqrt{1+z^2}$, $W(1)>0$; D : $\operatorname{Im} z>0$, $z\notin[0, i]$.

39.49. Supposons que le potentiel complexe $W(z)$ d'un champ vectoriel soit donné en tant que fonction implicite par l'équation $W(z)+e^{W(z)}=z$, $W(1)>0$, dans tout le plan privé des demi-droites $\arg(z-\pi i)=\pi$, $\arg(z+\pi i)=\pi$. Trouver les sources frontières et déterminer leur intensité.

39.50. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant d'un champ vectoriel dans un domaine simplement connexe borné par deux lignes de courant qui s'unissent en deux sources frontières si, ni à l'intérieur de ce domaine, ni sur sa frontière, il n'y a plus d'autres points singuliers.

39.51. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant d'un champ vectoriel dans un domaine simplement connexe borné par des lignes de courant si à l'intérieur de ce domaine il y a deux tourbillons, tandis que sur sa frontière on trouve deux sources frontières dont les intensités sont de signe opposé (ni à l'intérieur, ni sur la frontière du domaine il n'y a plus d'autres points singuliers).

39.52. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant d'un champ vectoriel dans un domaine doublement connexe borné par des lignes de courant si sur la frontière de ce domaine on trouve deux sources frontières, et, outre ces sources, ni à

l'intérieur du domaine, ni sur sa frontière il n'y a plus d'autres points singuliers.

39.53. Représenter graphiquement le maximum de variantes possibles du tableau des lignes de courant d'un champ vectoriel dans un domaine doublement connexe borné par des lignes de courant si sur la frontière de ce domaine on trouve un dipôle frontière, et, outre ce dipôle, ni à l'intérieur du domaine, ni sur sa frontière il n'y a plus d'autres points singuliers.

39.54. Soient D_k les domaines dont il a été question au problème 39.24. Dire quels sont les points singuliers que présente un champ vectoriel sur la frontière des domaines du 3[e] et du 4[e] types (si ces points singuliers sont considérés comme des pôles frontières dans le domaine D_k).

* * *

Beaucoup de problèmes nécessitent l'étude du comportement des lignes équipotentielles et pas celle du comportement des lignes de courant. Ce problème se ramène sans difficulté à l'étude du comportement des lignes de courant, car les lignes équipotentielles pour un champ vectoriel à potentiel complexe $W(z)$ sont des lignes de courant pour un champ vectoriel à potentiel complexe $-iW(z)$. On peut d'ailleurs ne faire aucun effort pour ramener un problème à un autre, et se limiter à des raisonnements analogues.

39.55. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes équipotentielles des champs vectoriels ci-dessous donnés par les potentiels complexes $W(z)$ dans les domaines D indiqués :

1. $W=z+\frac{1}{z}$; D : $|z|\leq\infty$. 2. $W=z+i\ln z$; D : $|z|\leq\infty$.

3. $W=\ln\frac{(z-1)^2}{z+1}$; D : $|z|\leq\infty$. 4. $W=z-\frac{1}{z}$; D : $|z|\leq\infty$.

5. $W=\ln\frac{(2z-1)(z-2)}{(2z+1)(z+2)}$; D : $|z|<1$.

6. $W=i\ln\frac{(2z-1)(z+2)}{(2z+1)(z-2)}$; D : $|z|<1$.

7. $W=z+\frac{1}{z}+i\ln z$; D : $|z|>1$.

8. $W=z+\frac{1}{z}+3i\ln z$; D : $|z|>1$.

9. $W=i\ln\frac{4z^2-1}{z^2-4}$; D : $|z|<1$.

10. $W=i\ln \operatorname{tg} z$; D : $|\operatorname{Re} z|<\frac{\pi}{4}$.

11. $W=\ln\cos z$; D : $|\operatorname{Re} z|<\frac{\pi}{2}$.

12. $W=\sqrt{1+z^2}$, $W(1)>0$; D : $\operatorname{Im} z>0$, $z\notin[0, i]$.

39.56. Compléter la solution du problème 39.35 en représentant graphiquement le tableau des lignes équipotentielles correspondant à chaque tableau des lignes de courant.

* * *

Pour des champs vectoriels donnés dans des domaines bornés par des lignes de courant frontières, outre les pôles frontières, on peut définir des points critiques frontières. C'est justement un point z_0 qui est appelé *point critique frontière* d'ordre m, si $2m+2$ lignes de courant (les lignes de courant frontières y comprises) sortent de ce point ou pénètrent dans lui. Pour un point critique frontière, le nombre m n'est pas obligatoirement un entier ; il est multiple de $\frac{1}{2}$. On voit aisément que la définition proposée convient bien en tant que définition d'un point critique situé à l'intérieur du domaine où le champ vectoriel est donné.

39.57. Supposons que le potentiel complexe d'un champ vectoriel soit continu jusqu'à un arc L situé sur la frontière du domaine D, où ce champ vectoriel est donné, et admettons que la fonction de courant reste constante sur l'arc L. Montrer que sur chaque partie fermée de l'arc L ne contenant pas ses extrémités on ne trouve qu'un nombre fini de points critiques frontières du champ vectoriel.

Indication. Réaliser la représentation conforme d'une partie simplement connexe du domaine D attenante à l'arc L sur le demi-disque $|\zeta|<1$, $\operatorname{Im}\zeta>0$, de façon que l'arc L soit transformé en le diamètre de ce demi-disque, ensuite appliquer le principe de symétrie.

39.58. Soit z_0 un point critique frontière d'un champ vectoriel, et soient L_1 et L_2 deux lignes de courant voisines qui prennent fin en ce point et qui correspondent à une valeur de la fonction de courant. Montrer que, si en parcourant L_1 depuis le point z_0, le potentiel du champ vectoriel croît, alors, en parcourant L_2 depuis le point z_0, ce potentiel diminue. (Deux lignes de courant correspondant à une valeur de la fonction de courant sont considérées voisines si, dans la partie du domaine D comprise entre ces lignes, près du point z_0, il n'y a pas d'autres lignes de courant ayant la même valeur de la fonction de courant).

Indication. Voir l'indication concernant le problème précédent.

39.59. Supposons que le potentiel complexe d'un champ vectoriel soit continu jusqu'à un arc L situé sur la frontière du domaine D, où est donné ce champ, et admettons que la fonction de courant reste constante sur l'arc L. Montrer que la direction de variation du potentiel du champ vectoriel peut changer (c'est-à-dire que la diminution peut devenir augmentation et vice versa) seulement aux points critiques frontières d'ordre non entier.

39.60. Supposons que le potentiel complexe $W(z)$ d'un champ vectoriel soit continu jusqu'à la frontière du domaine D où ce champ est donné, sauf en un nombre fini de points qui sont des sources frontières ou des dipôles frontières (nous n'exigeons pas que $W(z)$ soit continu ni même uniforme

à l'intérieur du domaine D), et admettons que toute la frontière du domaine D soit constituée par des lignes de courant frontières qui s'unissent aux points singuliers frontières et aux points critiques frontières. Traçons toutes les lignes de courant sortant des points critiques (et pénétrant dans ces points) situés aussi bien à l'intérieur du domaine D que sur sa frontière. Alors, le domaine D va se décomposer en un certain nombre de domaines D_k. Montrer que ces domaines D_k appartiennent aux types décrits au problème 39.24.

39.61. Les conditions du problème 39.60 étant satisfaites, supposons en outre que tous les points singuliers du champ vectoriel soient des tourbillons-sources à l'intérieur du domaine D, et des sources frontières sur sa frontière. Montrer que pour un domaine p-connexe D, la formule $M=N+\frac{1}{2}N'+p-2$ est vraie (ici, M est la somme des multiplicités de tous les points critiques du champ vectoriel situés à l'intérieur du domaine D et sur sa frontière, N est le nombre de tourbillons-sources du champ vectoriel dans le domaine D, N' étant le nombre de sources frontières).

Indication. Se convaincre du fait que la formule reste valable pour chacun des domaines élémentaires D_k, ensuite montrer que, si l'on réunit deux domaines arbitraires appartenant à un type décrit dans le problème, la formule ne cesse pas d'être vraie.

39.62. Montrer que la formule du problème 39.61 peut être mise sous une forme plus générale:

$$M=N+p-2,$$

où N est la somme des multiplicités de tous les pôles du champ vectoriel situés à l'intérieur du domaine D et sur sa frontière, si l'on attribue la multiplicité 1/2 aux sources frontières, et la multiplicité 1 aux dipôles.

La formule obtenue dans les problèmes 39.61 et 39.62 est très utile pour la résolution des questions concernant l'existence et l'unicité de différents champs vectoriels.

RÉPONSES

39.01.

1. $W=e^{-\frac{\pi i}{4}}z+C$; $U=\frac{x+y}{\sqrt{2}}+C_1$; $V=\frac{y-x}{\sqrt{2}}+C_2$; fig. 175.

2. $W=\frac{z^2}{2}+C$; $U=\frac{x^2-y^2}{2}+C_1$; $V=xy+C_2$; fig. 176.

3. $W=\frac{iz^2}{2}+C$; $U=-xy+C_1$; $V=\frac{x^2-y^2}{2}+C_2$; fig. 177.

4. $W=\frac{z^3}{3}+C$; $U=\frac{x^3}{3}-xy^2+C_1$; $V=x^2y-\frac{y^3}{3}+C_2$; fig. 178.

5. $W=\frac{z^2}{2}e^{\frac{\pi i}{4}}+C$; $U=\frac{x^2-y^2-2xy}{2\sqrt{2}}+C_1$; $V=\frac{x^2-y^2+2xy}{2\sqrt{2}}+C_2$; fig. 179.

6. $W=-\ln z+C$; $U=-\ln|z|+C_1$; $V=-\arg z+C_2$; fig. 180.

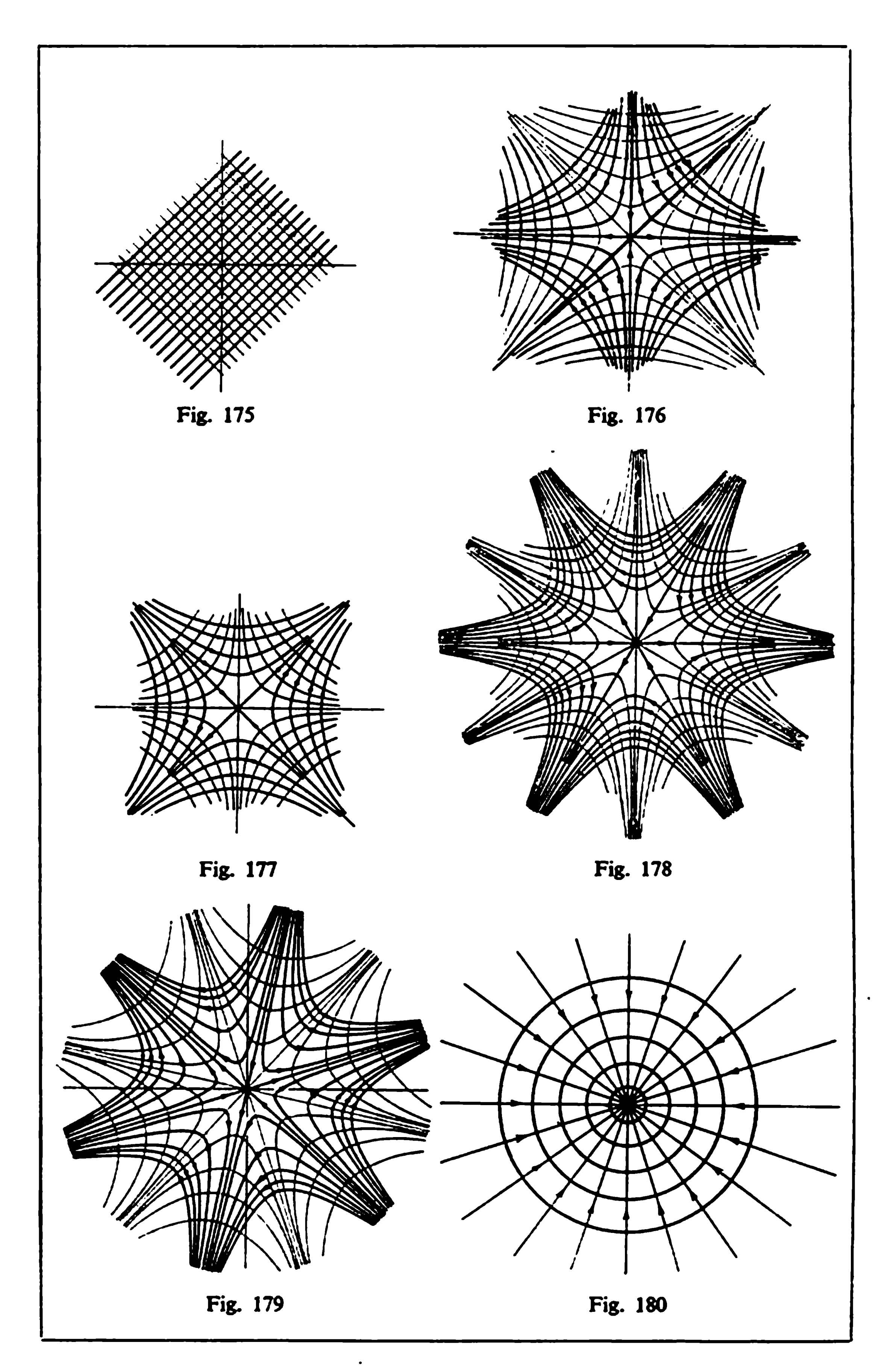


Fig. 175

Fig. 176

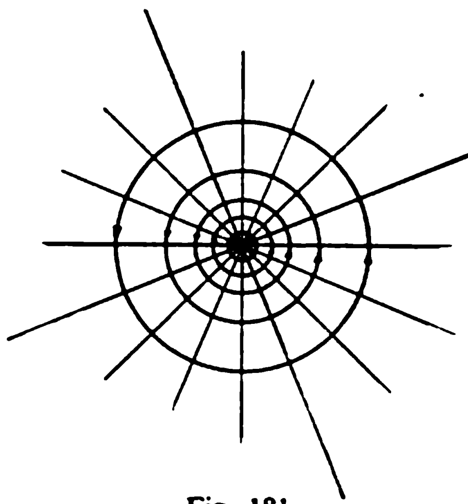
Fig. 177

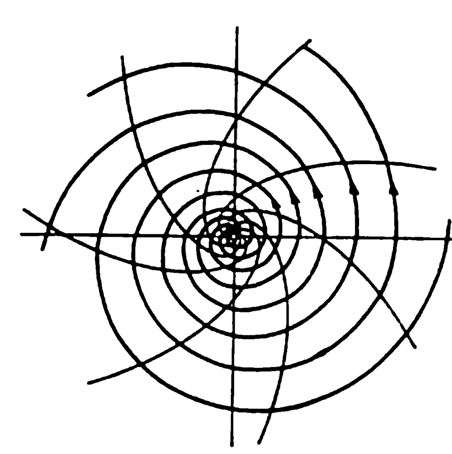
Fig. 178

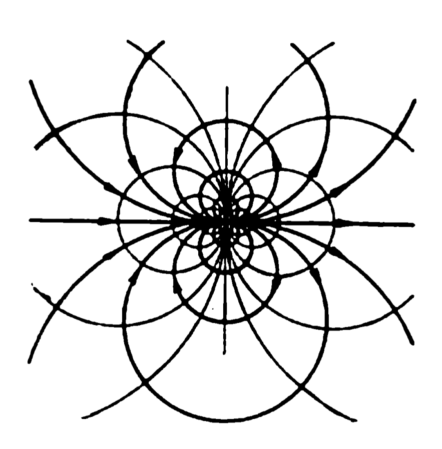
Fig. 179

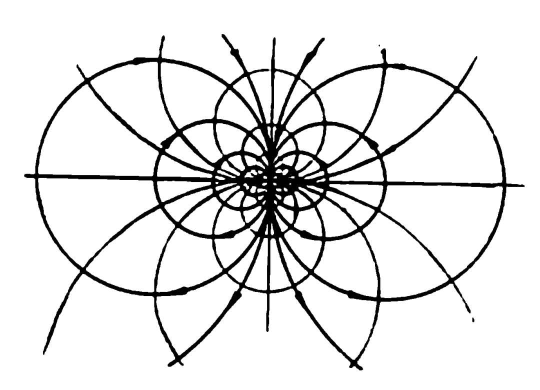
Fig. 180

7. $W=i\ln z+C_1$; $U=-\arg z+C_1$; $V=\ln|z|+C_2$;   fig. 181.
8. $W=(1+i)\ln z+C$; $U=\ln|z|-\arg z+C_1$; $V=\ln|z|+\arg z+C_2$; fig. 182.
9. $W=\frac{1}{z}+C$; $U=\frac{x}{x^2+y^2}+C_1$; $V=-\frac{y}{x^2+y^2}+C_2$;   fig. 183.
10. $W=\frac{i}{z}+C$; $U=\frac{y}{x^2+y^2}+C_1$; $V=\frac{x}{x^2+y^2}+C_2$;   fig. 184.


Fig. 181


Fig. 182


Fig. 183


Fig. 184

39.02.

Lignes sortantes : $\arg z=\frac{2k\pi}{m}$, $k=0, 1, \ldots, m-1$.

Lignes pénétrantes : $\arg z=\frac{(2k+1)\pi}{m}$, $k=0, 1, \ldots, m-1$.

39.03. Fig. 176 et 178.

39.04.

1. Le point $z=-1$: lignes de courant pénétrantes – la démi-droite $(-\infty, -1)$ et le segment $(0, -1)$; lignes de courant sortantes – les demi-circonférences supérieure et inférieure de la circonférence $|z|=1$. Le point $z=1$: lignes de courant pénétrantes – les demi-circonférences supérieure et inférieure de la circonférence $|z|=1$; lignes de courant sortantes – la demi-droite $(1, +\infty)$ et le segment $(1, 0)$.

2. Le point $z=-3$: lignes de courant pénétrantes – la demi-droite $(-\infty, -3)$ et le segment $(-1, -3)$; lignes de courant sortantes – les demi-circonférences supérieure et inférieure de la circonférence $|z+1|=2$.

3. Le point $z=e^{-5\pi i/6}$: lignes de courant sortantes – les arcs de la circonférence $|z|=1$ joignant les points $z=e^{-5\pi i/6}$ et $z=e^{-\pi i/6}$; lignes de courant pénétrantes – la courbe

$$z=\frac{1}{t^2-1}\left\{-\sqrt{(t^2-1)^2-t^2(\ln t-1)^2}+it(1-\ln t)\right\},\quad t>1,$$

et la courbe

$$z=\frac{1}{t^2-1}\left\{\sqrt{(t^2-1)^2-t^2(\ln t-1)^2}+it(1-\ln t)\right\},\quad 0<t<1.$$

Le point $z=e^{-\pi i/6}$: lignes de courant pénétrantes – les arcs de la circonférence $|z|=1$ joignant les points $z=e^{-\pi i/6}$ et $z=e^{-5\pi i/6}$; lignes de courant sortantes – la courbe

$$z=\frac{1}{t^2-1}\left\{-\sqrt{(t^2-1)^2-t^2(\ln t-1)^2}+it(1-\ln t)\right\},\quad t>1,$$

et la courbe

$$z=\frac{1}{t^2-1}\left\{-\sqrt{(t^2-1)^2-t^2(\ln t-1)^2}+it(1-\ln t)\right\},\quad 0<t<1.$$

4. Le point $z=-3i$: les lignes de courant qui pénètrent dans ce point et celles qui en sortent appartiennent au lieu géométrique des points $z=re^{i\varphi}$ vérifiant l'équation

$$\sin\varphi=-\frac{r\left(5\ln\frac{r}{3}+8\right)}{3(r^2-1)}.$$

Le point $z=-i/3$: les lignes de courant qui pénètrent dans ce point et celles qui en sortent appartiennent au lieu géométrique des points $z=re^{i\varphi}$ vérifiant l'équation

$$\sin\varphi=-\frac{r(8-5\ln 3r)}{3(r^2-1)}.$$

5. Le point $z=-i$: les lignes de courant qui pénètrent dans ce point et celles qui en sortent se situent sur la circonférence $|z|=1$ et sur le lieu géométrique des points $z=re^{i\varphi}$ vérifiant l'équation

$$\sin\varphi=\frac{r\ln r}{r^2-1}.$$

6. Le point $z=-1$: lignes de courant pénétrantes – le segment $(0, -1)$ et la demi-droite $(-\infty, -1)$; lignes de courant sortantes – les courbes

$$z=-t\operatorname{ctg} t+it,\ 0<t<\pi\ ;\qquad z=-t\operatorname{ctg} t-it,\ 0<t<\pi.$$

7. Le point $z=-i$: les lignes de courant qui pénètrent dans ce point et celles qui en sortent se situent sur le lieu géométrique des points $z=x+iy$ vérifiant l'équation $x^2+y^2=e^{2-2y}$.

8. Le point $z=i$: lignes de courant pénétrantes – les courbes

$$z=\frac{t}{1+t^2}(1-t^2+2it),\quad t>1\ ;\qquad z=\frac{t}{1+t^2}(1-t^2+2it),\quad 0<t<1\ ;$$

sortantes – les courbes

$$z=\frac{t}{1+t^2}(t^2-1+2it),\quad t>1\ ;\qquad z=\frac{t}{1+t^2}(t^2-1+2it),\quad 0<t<1.$$

Le point $z=-i$: lignes de courant pénétrantes – les courbes

$$z=\frac{t}{1+t^2}(1-t^2-2it),\quad t>1\ ;\quad z=\frac{t}{1+t^2}(1-t^2-2it),\quad 0<t<1\ ;$$

sortantes – les courbes

$$z=\frac{t}{1+t^2}(t^2-1-2it),\quad t>1\ ;\quad z=\frac{t}{1+t^2}(t^2-1-2it),\quad 0<t<1.$$

9. Le point $z=e^{\pi i/4}$: les lignes de courant qui pénètrent dans ce point et celles qui en sortent appartiennent au lieu géométrique des points $z=x+iy$ vérifiant l'équation $(x-\sqrt{2})(x^2+y^2)+y=0$. Le point $z=e^{-3\pi i/4}$: les lignes de courant qui pénètrent dans ce point et celles qui en sortent appartiennent au lieu géométrique des points vérifiant l'équation $(x+\sqrt{2})(x^2+y^2)+y=0$.

39.05.

1. $z=\infty$ est un dipôle de moment 1 et un tourbillon d'intensité -2π.
2. $z=1/2$ est un tourbillon d'intensité 2π.
3. $z=0$ est un tourbillon d'intensité 2π.
4. $z=\infty$ est un dipôle de moment 1 ; $z=0$ est un dipôle de moment 1.
5. $z=k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, sont des sources d'intensité 2π.
6. $z=k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, sont des tourbillons d'intensité 2π ; $z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, sont des tourbillons d'intensité -2π.
7. $z=1$ et $z=-1$ sont des sources d'intensité 2π ; $z=\infty$ est une source d'intensité -4π.
8. $z=i$ et $z=-i$ sont des sources d'intensité 2π ; $z=0$ et $z=\infty$ sont des sources d'intensité -2π.
9. $z=\infty$ est une source d'intensité -2π.
10. $z=\infty$ est un tourbillon d'intensité -2π ; $z=-\frac{i}{\sqrt{3}}$ est un tourbillon d'intensité 2π.

39.13. Est divisé par $\varphi'(z_0)$.

39.14. Fig. 185.

39.15. Fig. 186.

39.16. Fig. 187 et fig. 188.

39.17. Fig. 189.

39.18. Fig. 190.

39.19. Fig. 191 et fig. 192.

39.27. Fig. 193, 194, 195, 196.

39.34.

1. Fig. 197. 2. Fig. 198. 3. Fig. 199. 4. Fig. 200. 5. Fig. 201. 6. Fig. 202. 7. Fig. 203. 8. Fig. 204. 9. Fig. 205. 10. Fig. 206. 11. Fig. 207. 12. Fig. 208.

39.35.

1. Fig. 209, 210. 2. Fig. 211, 212, 213, 214, 215, 216. 3. Fig. 217, 218. 4. Fig. 219, 220. 5. Fig. 221, 222, 223, 224, 225, 226.

39.36.

1. Fig. 227, 228, 229. 2. Fig. 230, 231, 232, 233. 3. Fig. 234, 235, 236, 237. 4. Fig. 238, 239, 240, 241, 242, 243.

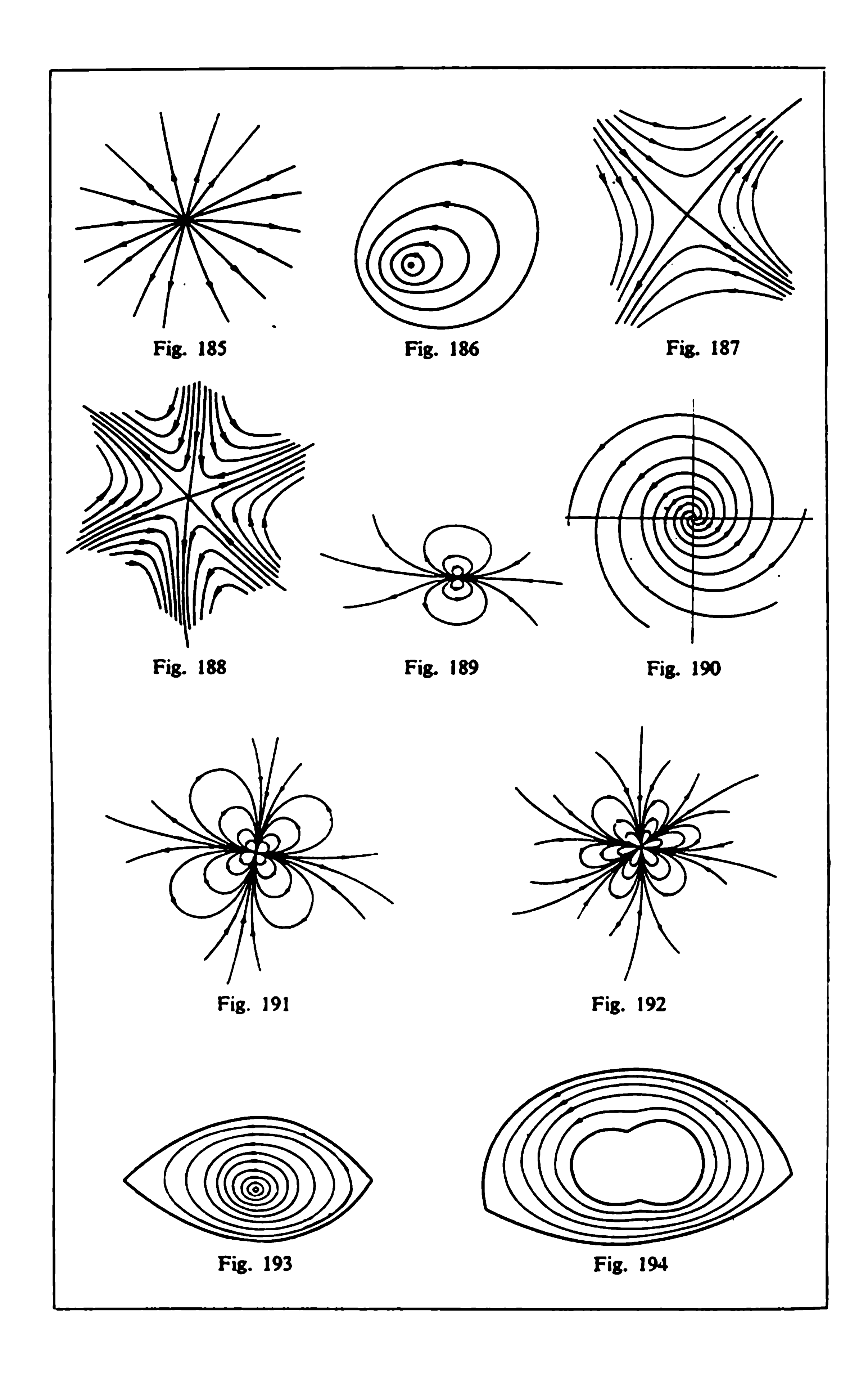
39.37. Fig. 244, 245, 246.

39.38.

1. Fig. 247. 2. Fig. 248. 3. Fig. 249. 4. Fig. 250. 5. Fig. 251. 6. Fig. 252. 7. Fig. 253. 8. Fig. 254. 9. Fig. 255. 10. Fig. 256. 11. Fig. 257. 12. Fig. 258.

39.39.

1. Fig. 259, 260. 2. Fig. 261, 262. 3. Fig. 263, 264. 4. Fig. 265. 5. Fig. 266, 267, 268.


Fig. 185
Fig. 186
Fig. 187
Fig. 188
Fig. 189
Fig. 190
Fig. 191
Fig. 192
Fig. 193
Fig. 194

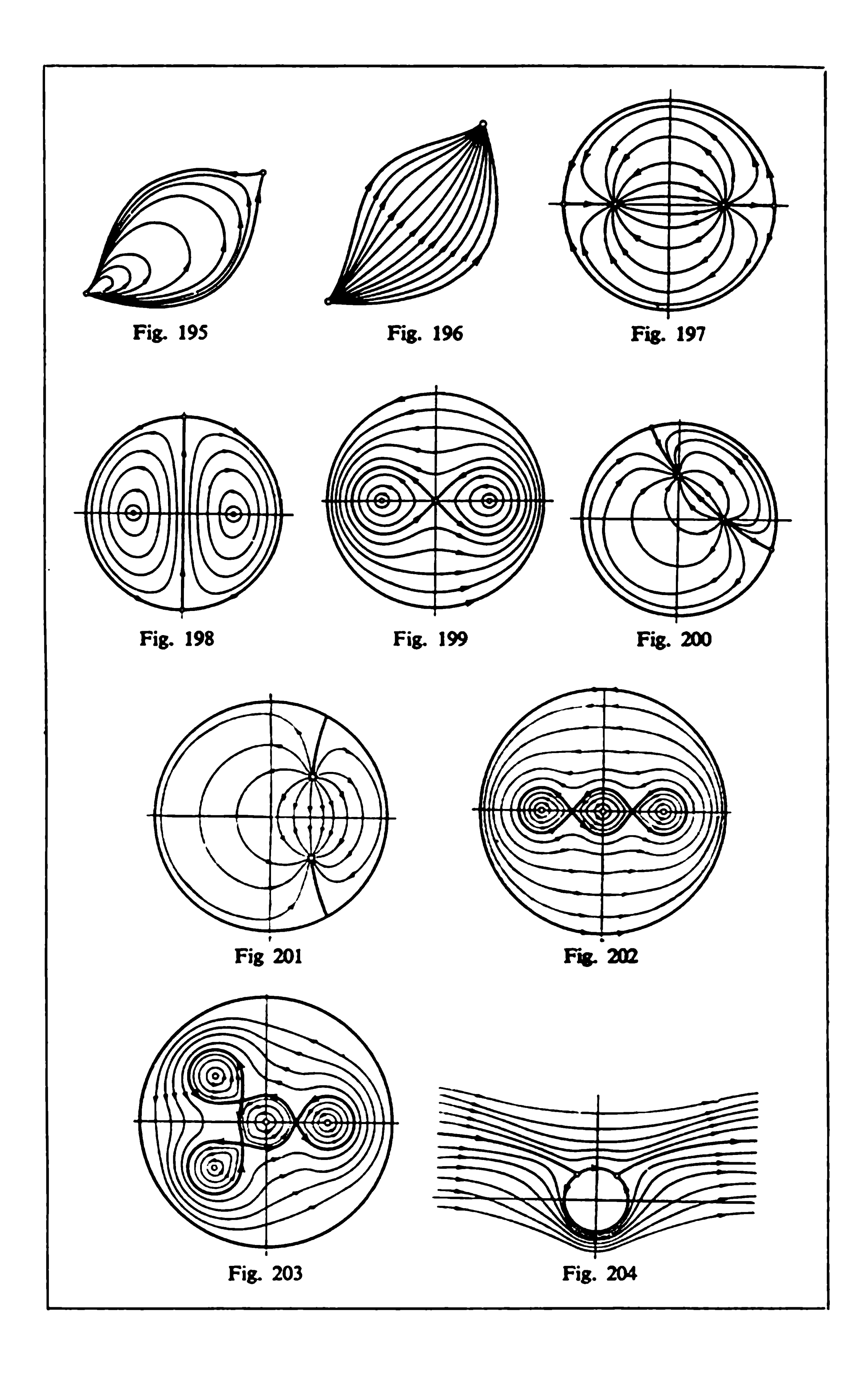


Fig. 195

Fig. 196

Fig. 197

Fig. 198

Fig. 199

Fig. 200

Fig 201

Fig. 202

Fig. 203

Fig. 204

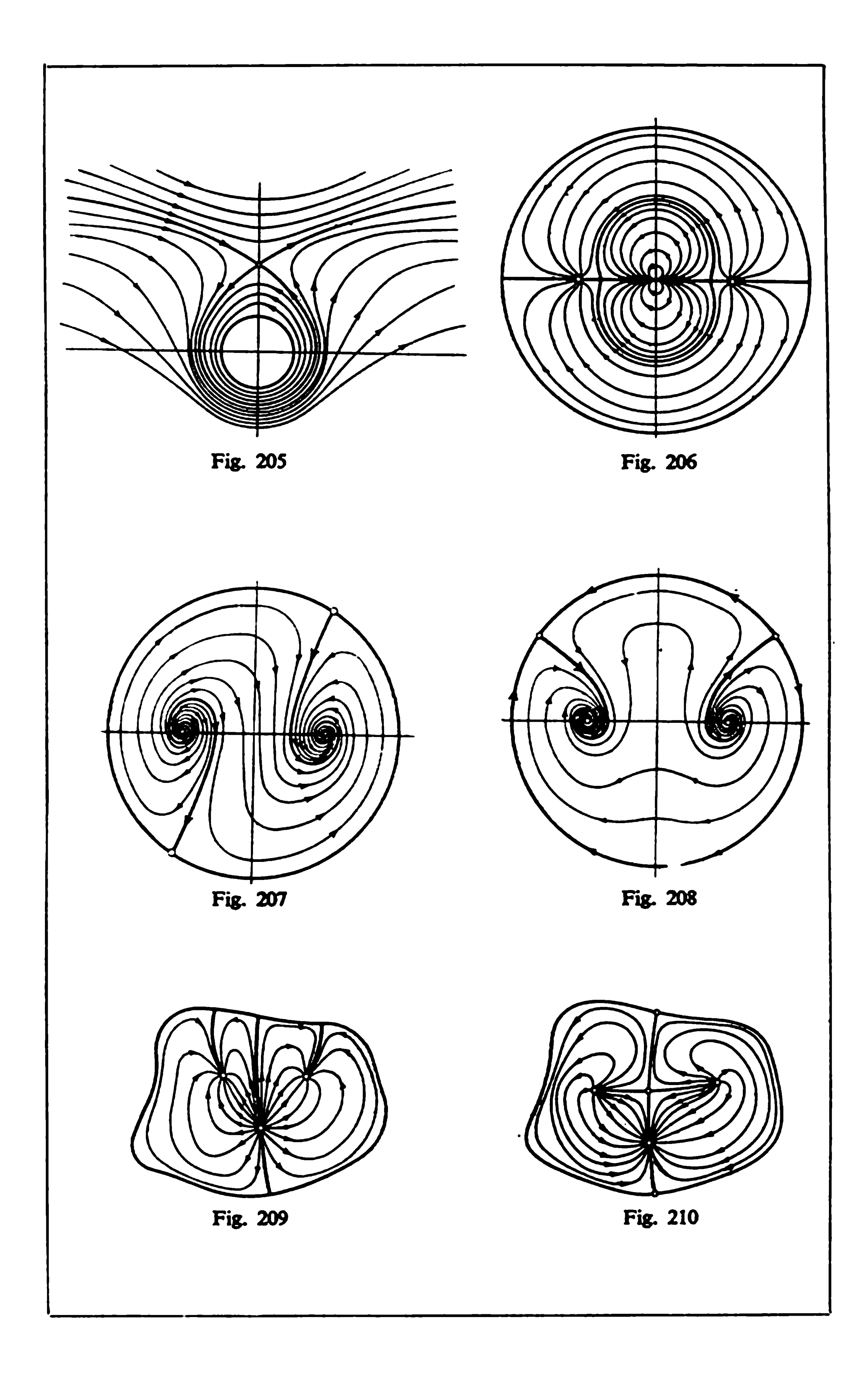


Fig. 205

Fig. 206

Fig. 207

Fig. 208

Fig. 209

Fig. 210

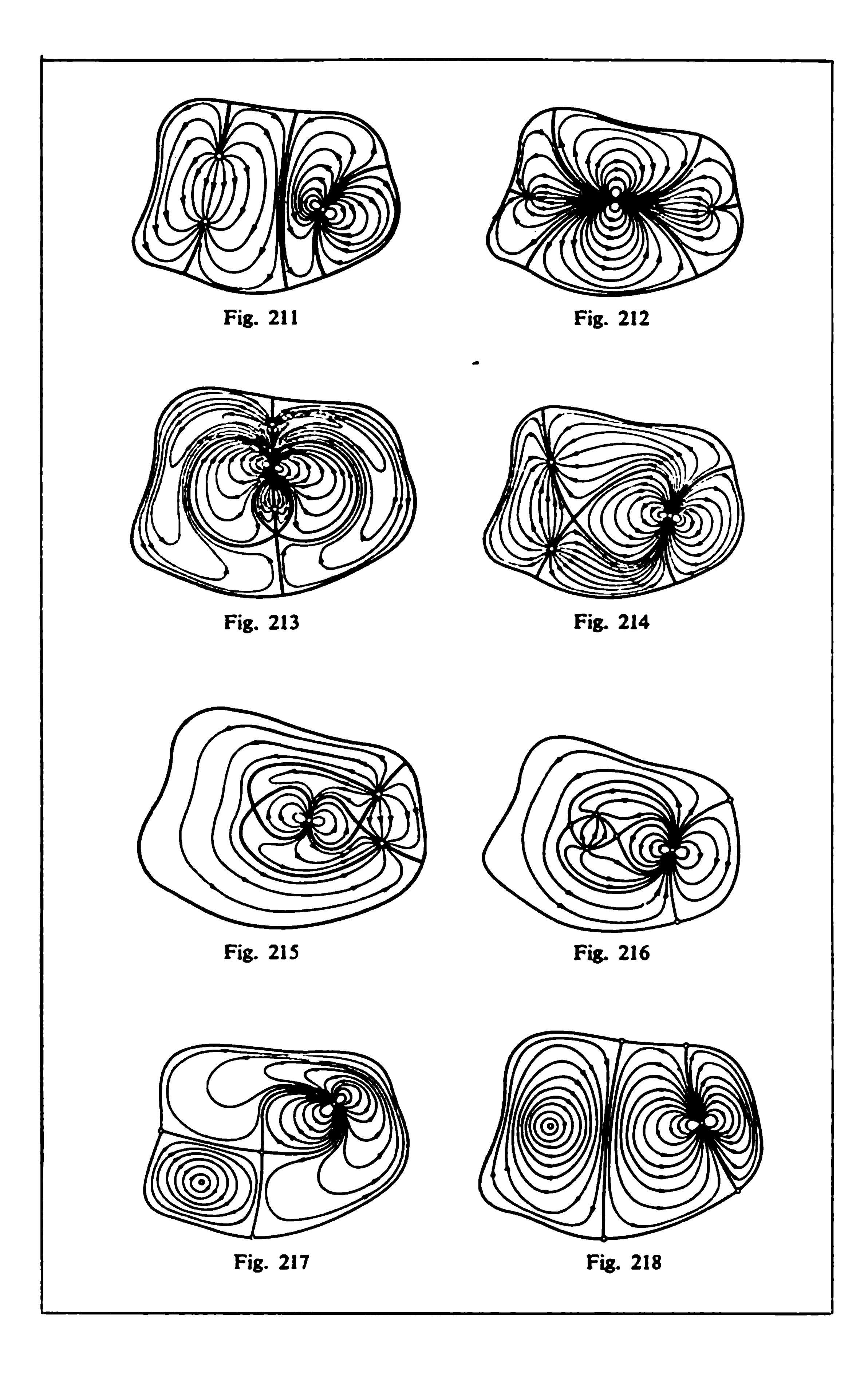


Fig. 211

Fig. 212

Fig. 213

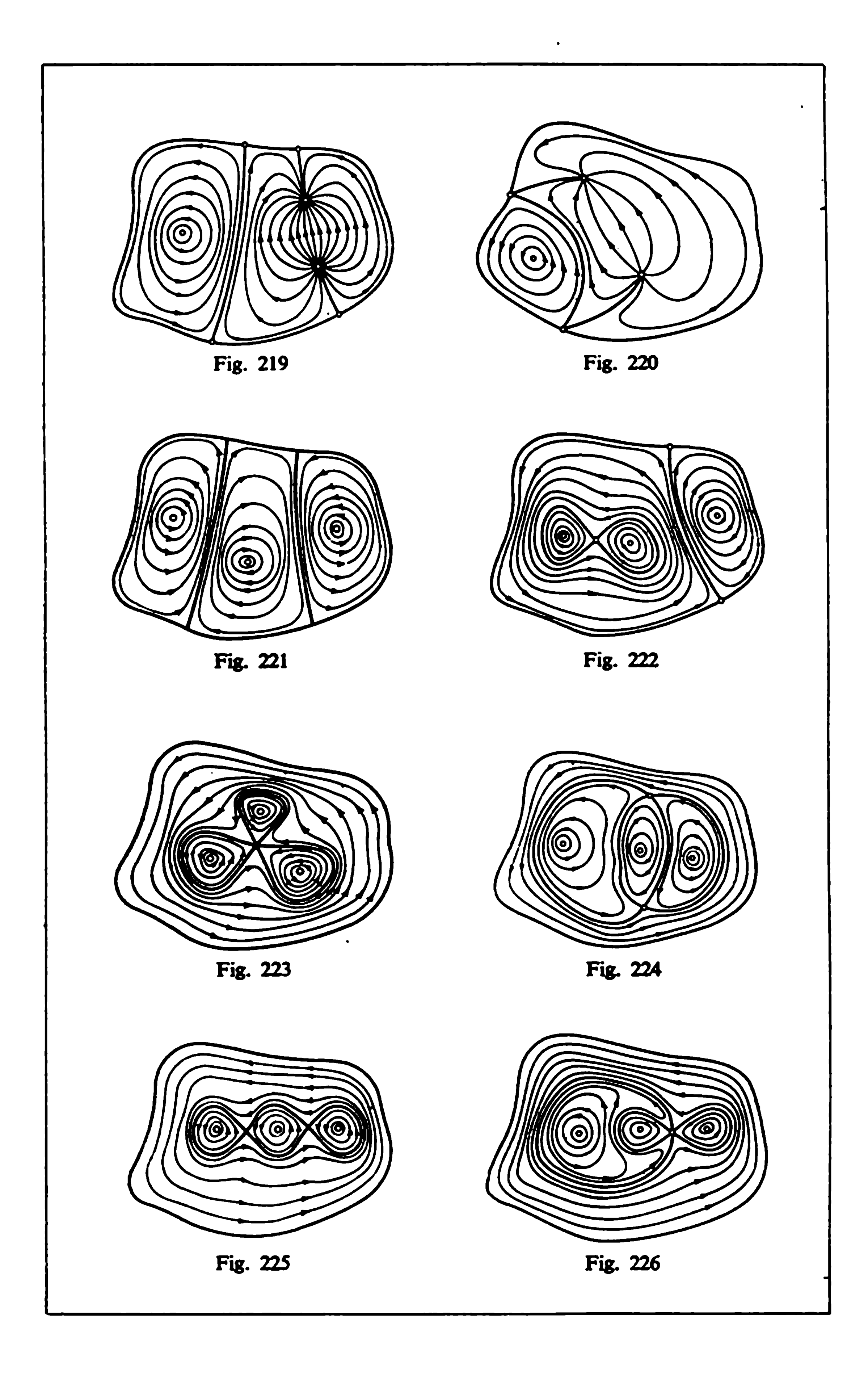
Fig. 214

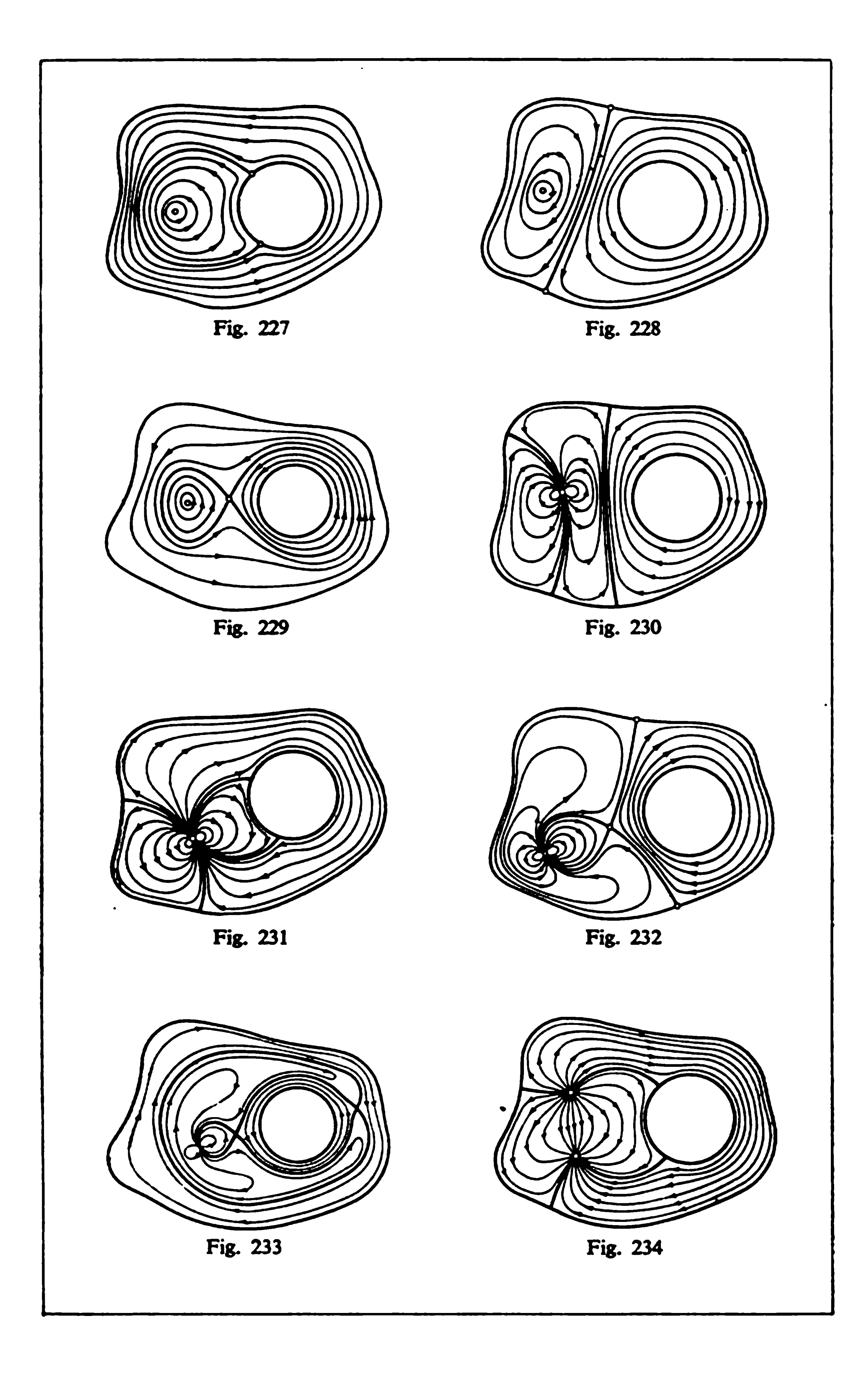
Fig. 215

Fig. 216

Fig. 217

Fig. 218


Fig. 219
Fig. 220
Fig. 221
Fig. 222
Fig. 223
Fig. 224
Fig. 225
Fig. 226


Fig. 227
Fig. 228
Fig. 229
Fig. 230
Fig. 231
Fig. 232
Fig. 233
Fig. 234

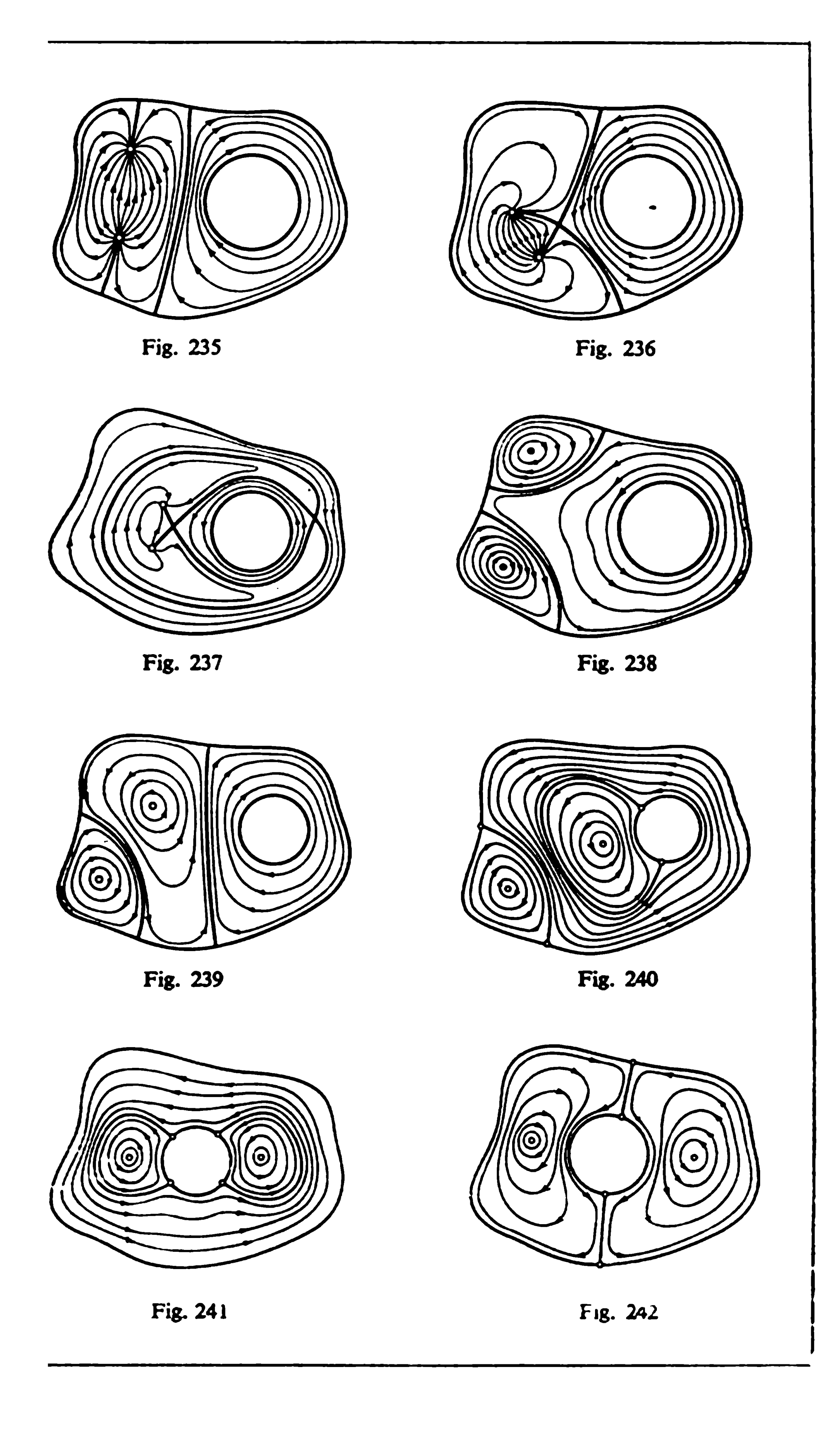


Fig. 235

Fig. 236

Fig. 237

Fig. 238

Fig. 239

Fig. 240

Fig. 241

Fig. 242

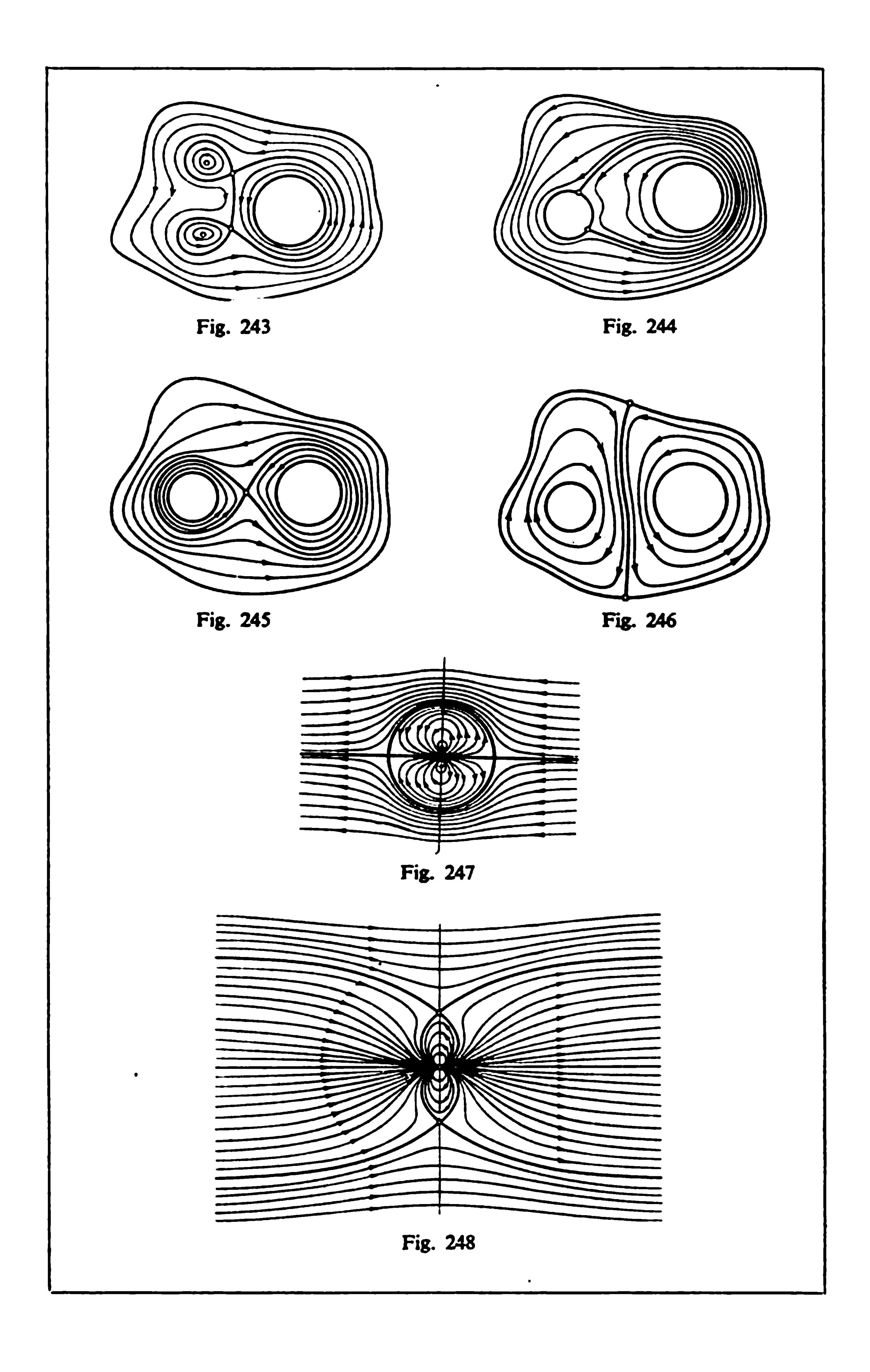


Fig. 243

Fig. 244

Fig. 245

Fig. 246

Fig. 247

Fig. 248

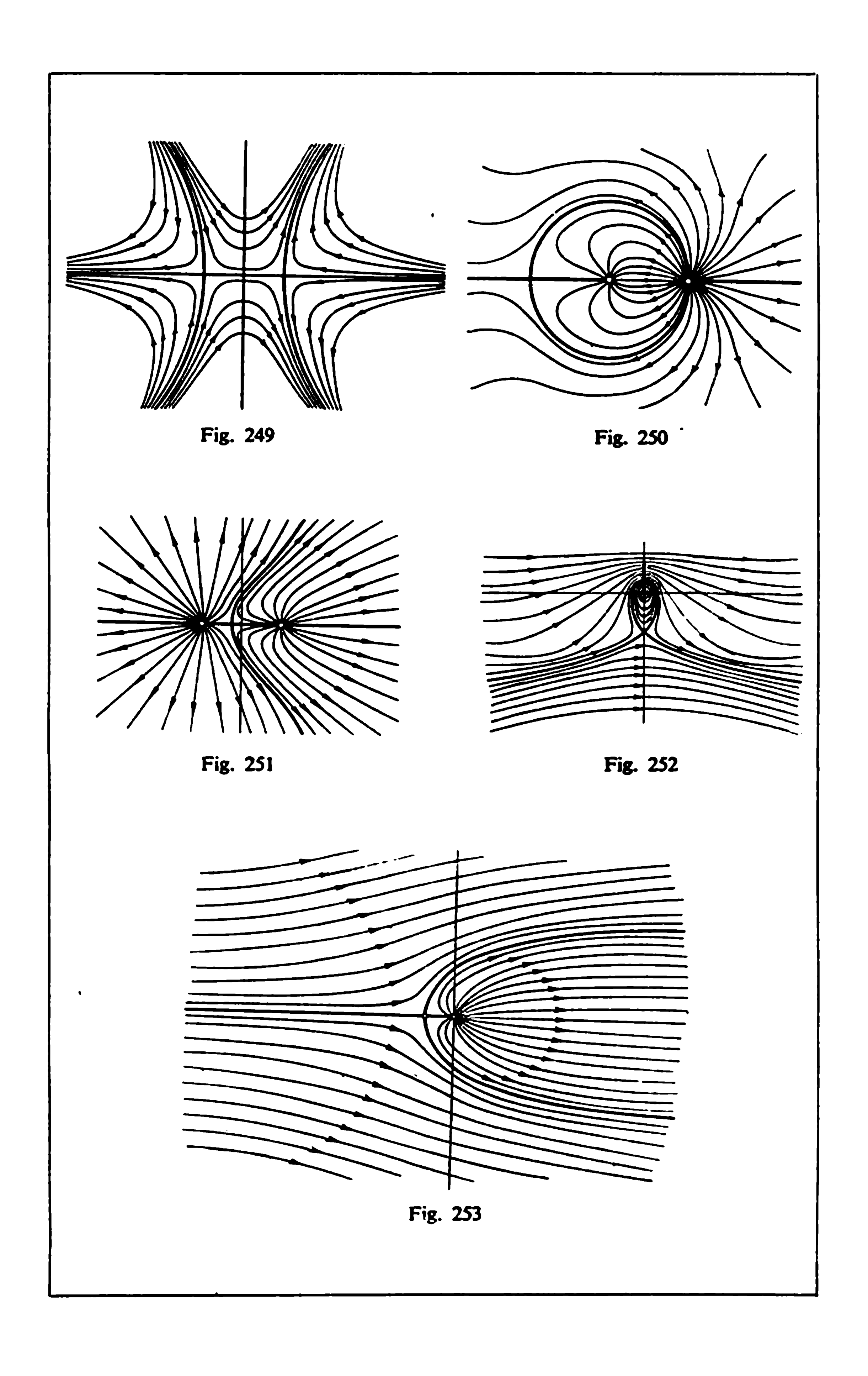

Fig. 249

Fig. 250

Fig. 251

Fig. 252

Fig. 253

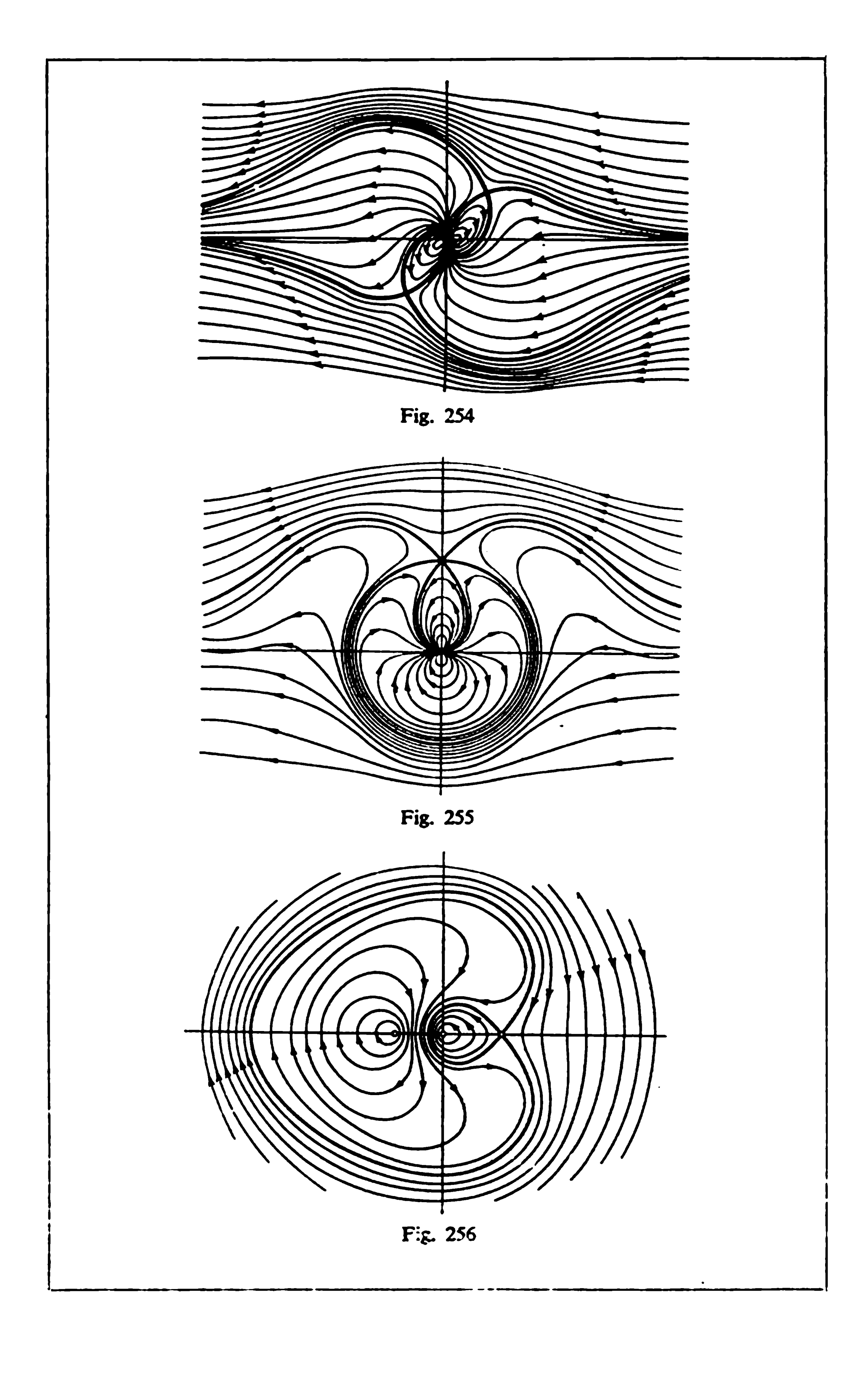
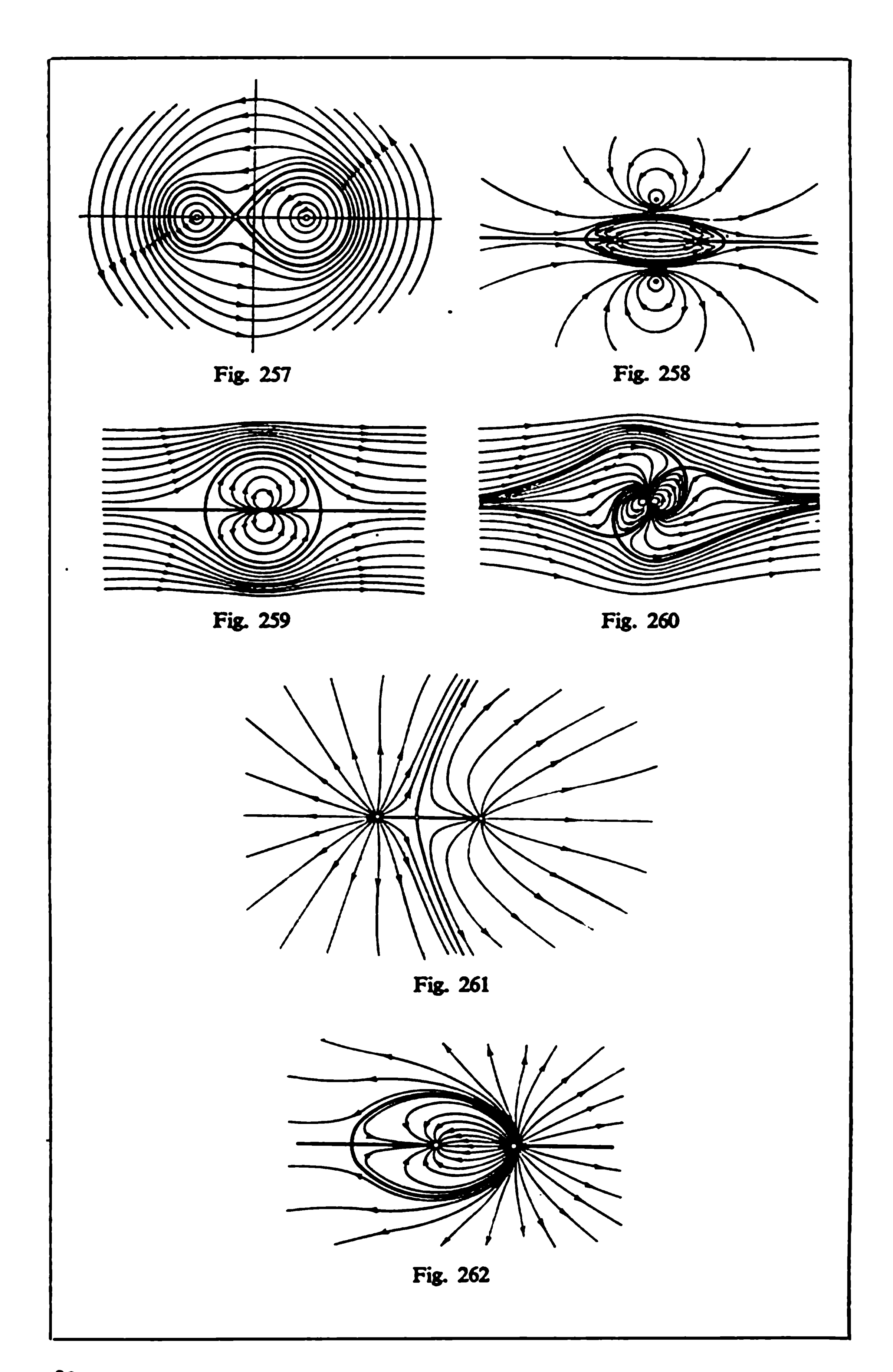

Fig. 254

Fig. 255

Fig. 256


Fig. 257
Fig. 258
Fig. 259
Fig. 260
Fig. 261
Fig. 262

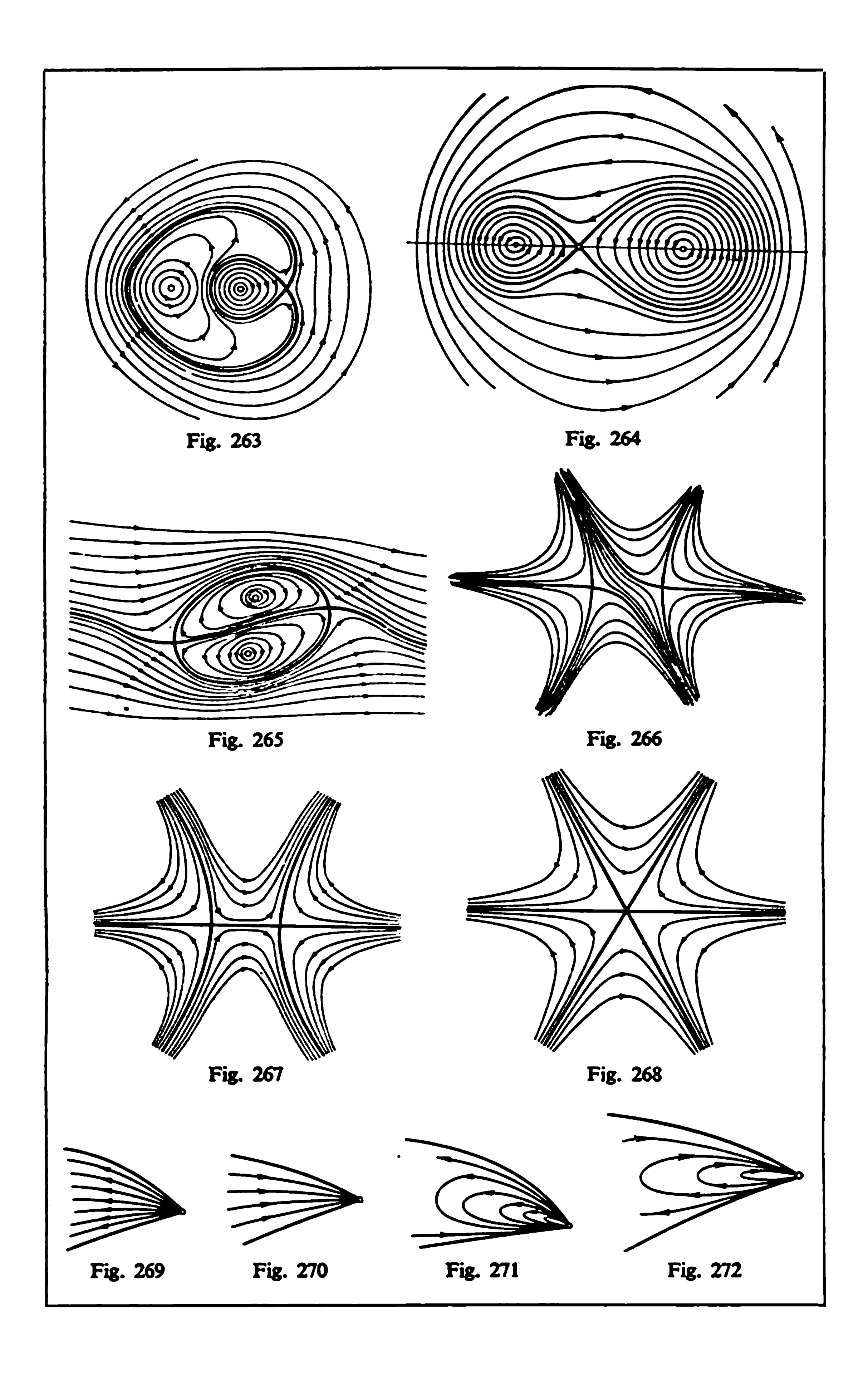


Fig. 263 Fig. 264

Fig. 265 Fig. 266

Fig. 267 Fig. 268

Fig. 269 Fig. 270 Fig. 271 Fig. 272

39.43. Fig. 269, 270.

39.46. Fig. 271, 272.

39.48.

1. $z=-\infty$ est une source frontière d'intensité $2a$; $z=+\infty$ est une source frontière d'intensité $-2a$.

2. $z=1$ est une source frontière d'intensité $-\pi$; $z=-1$ est une source frontière d'intensité π.

3. $z=\pi/2$ est une source frontière d'intensité π ; $z=\infty$ est une source frontière d'intensité $-\pi$ et un dipôle frontière.

4. $z=0$ et $z=-\infty$ sont des dipôles frontières.

5. $z=0$ est une source frontière d'intensité π et un dipôle frontière ; $z=\infty$ est une source frontière d'intensité $-\pi$ et un dipôle frontière.

6. $z=\infty$ est un dipôle frontière.

39.49. $z=-\infty$ est une source frontière d'intensité 2π ; $z=+\infty$ est une source frontière d'intensité -2π.

39.50. Fig. 273.

39.51. Fig. 274, 275.

39.52. Fig. 276, 277, 278.

39.53. Fig. 279, 280.

39.54. Dans le domaine du 3[e] type : un dipôle frontière ; dans le domaine du 4[e] type : deux sources frontières dont les intensités sont de signe opposé.

39.55.

1. Fig. 281. 2. Fig. 282. 3. Fig. 283. 4. Fig. 284. 5. Fig. 285. 6. Fig. 286. 7. Fig. 287. 8. Fig. 288. 9. Fig. 289. 10. Fig. 290. 11. Fig. 291. 12. Fig. 292.

39.56.

1. Fig. 293, 294. 2. Fig. 295, 296, 297, 298, 299, 300. 3. Fig. 301, 302. 4. Fig. 303, 304. 5. Fig. 305, 306, 307, 308, 309, 310.

§ 40. Construction d'un champ vectoriel d'après des points singuliers donnés

La terminologie concernant le champ vectoriel et ses points singuliers a été définie au paragraphe précédent.

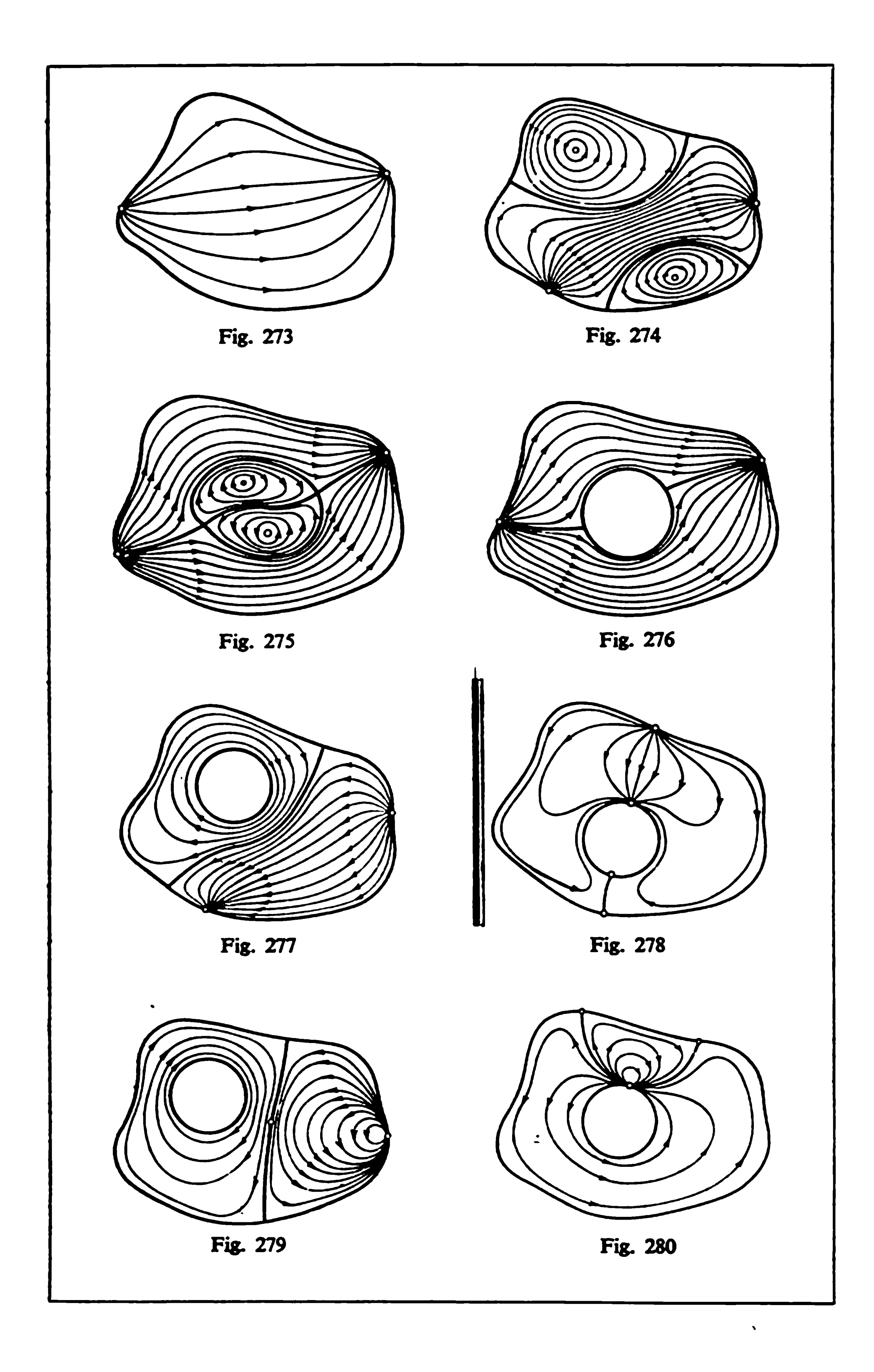
40.01. Montrer qu'un champ vectoriel donné dans le plan élargi sans y avoir de points singuliers est identiquement nul.

40.02. Montrer qu'il n'existe pas de champ vectoriel possédant dans tout le plan élargi un seul point singulier qui soit un pôle d'ordre 1.

Indication. Prendre en considération la définition du caractère du point singulier à l'infini.

40.03. Montrer qu'un champ vectoriel qui possède dans le plan élargi un seul point singulier, notamment un pôle d'ordre $m\geq 2$ à l'infini, est de la forme $w(z)=a_0+a_1\bar{z}+\ldots+a_{m-2}\bar{z}^{m-2}$.

40.04. Montrer qu'un champ vectoriel qui possède dans le plan élargi un seul point singulier, notamment un pôle d'ordre $m\geq 2$ en un point $z_0\neq\infty$, est de la forme $w(z)=a_0(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-2}+\ldots+a_{m-2}(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-m}$.


Fig. 273
Fig. 274
Fig. 275
Fig. 276
Fig. 277
Fig. 278
Fig. 279
Fig. 280

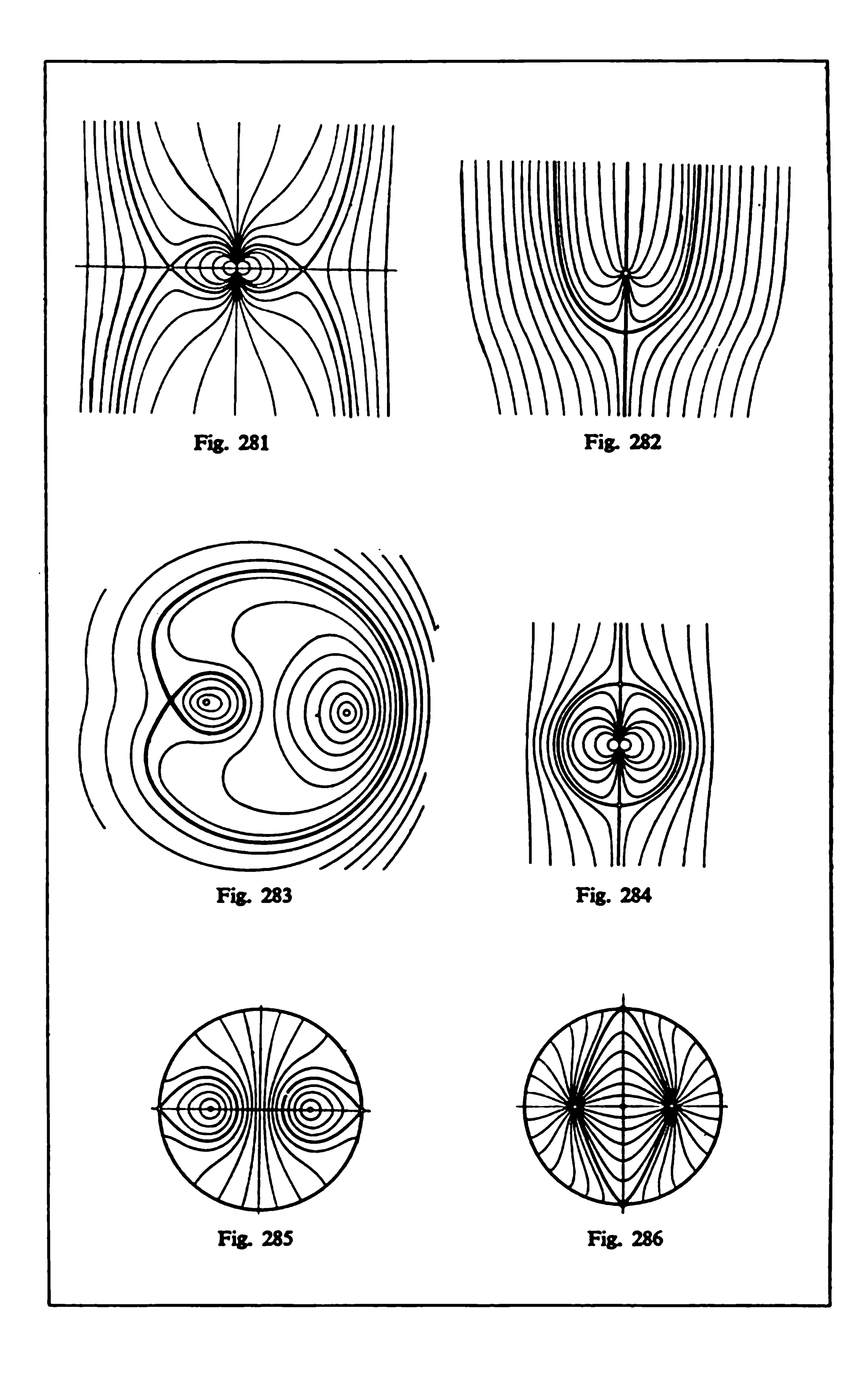


Fig. 281

Fig. 282

Fig. 283

Fig. 284

Fig. 285

Fig. 286

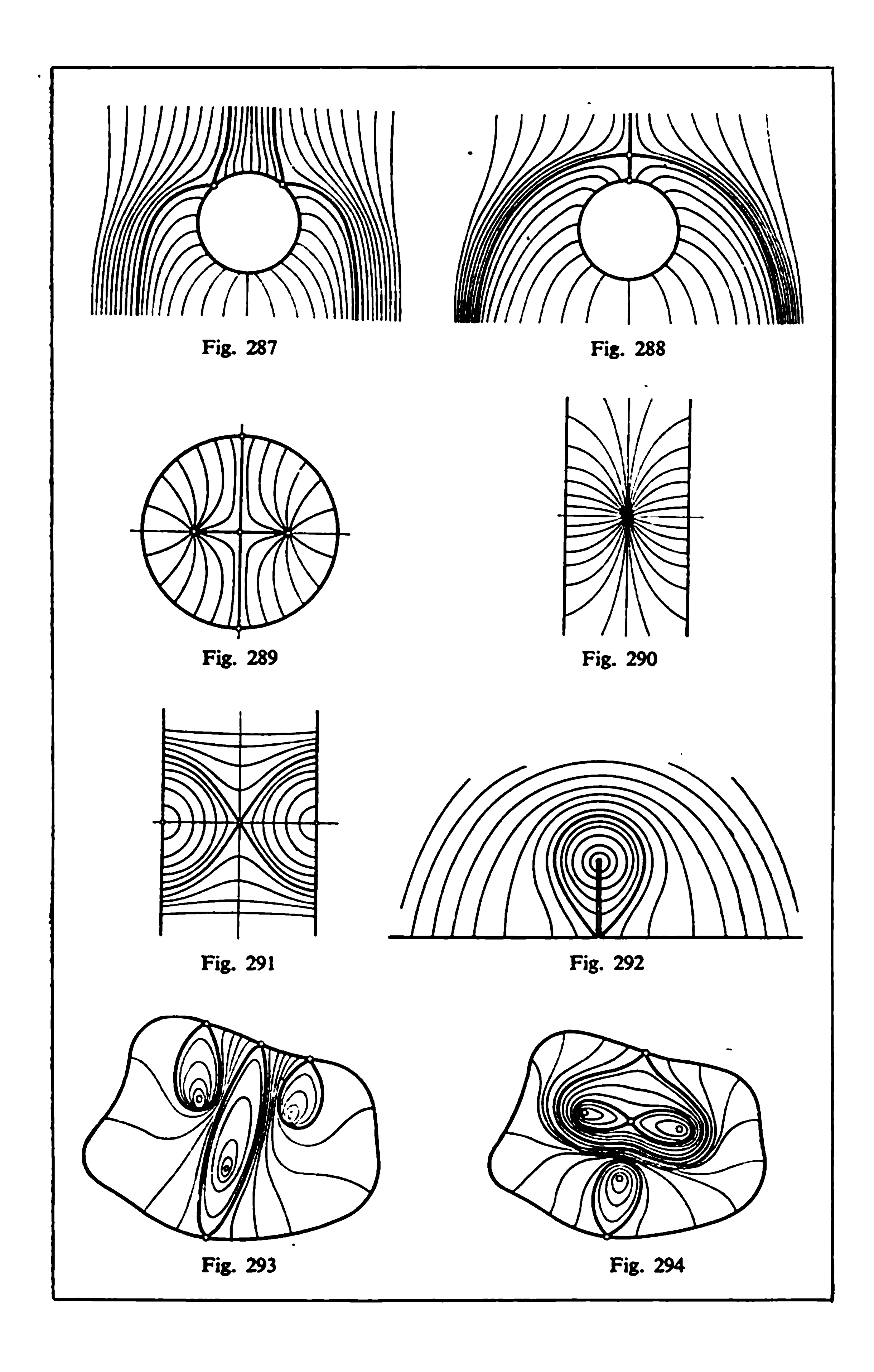

Fig. 287

Fig. 288

Fig. 289

Fig. 290

Fig. 291

Fig. 292

Fig. 293

Fig. 294

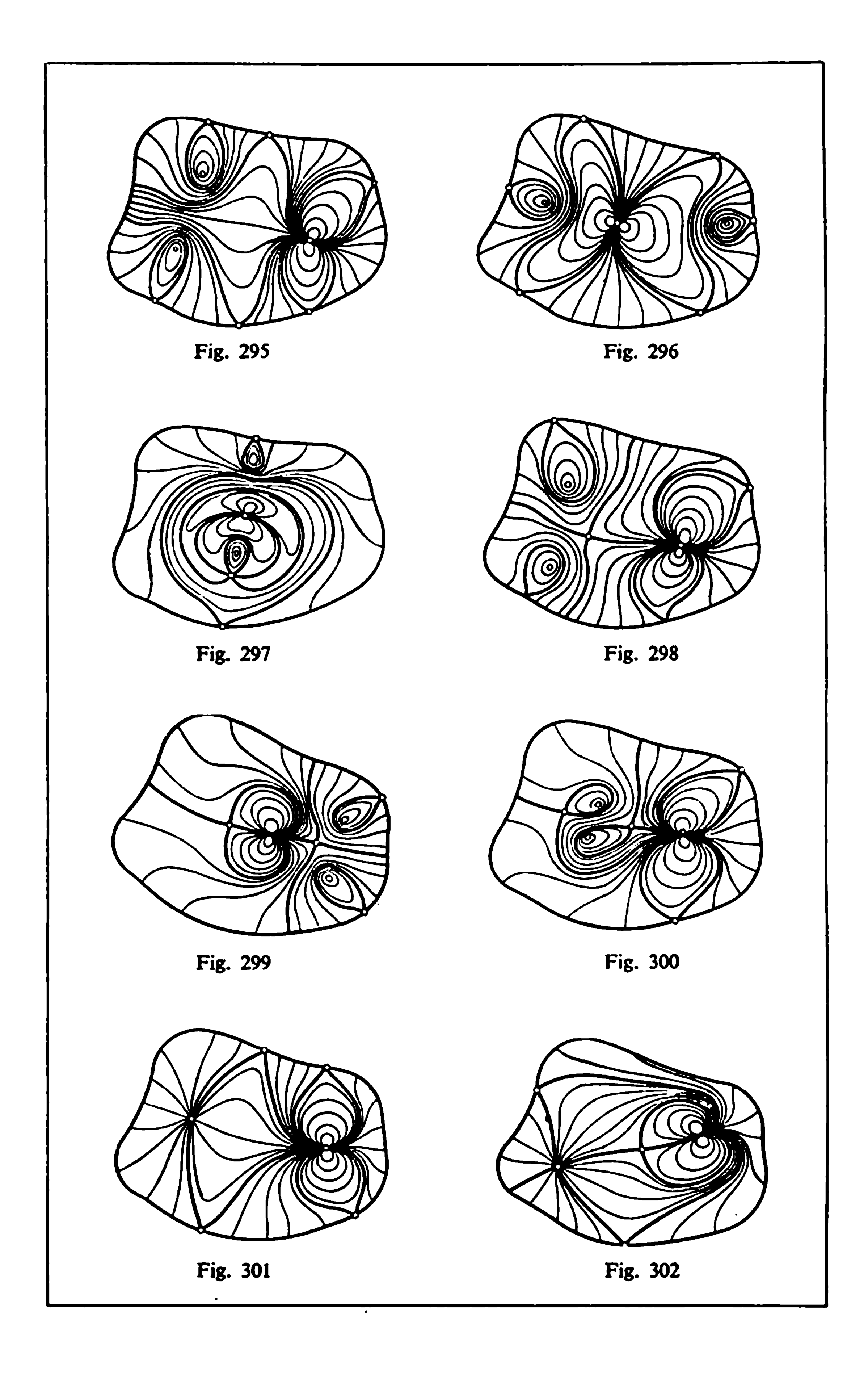


Fig. 295

Fig. 296

Fig. 297

Fig. 298

Fig. 299

Fig. 300

Fig. 301

Fig. 302

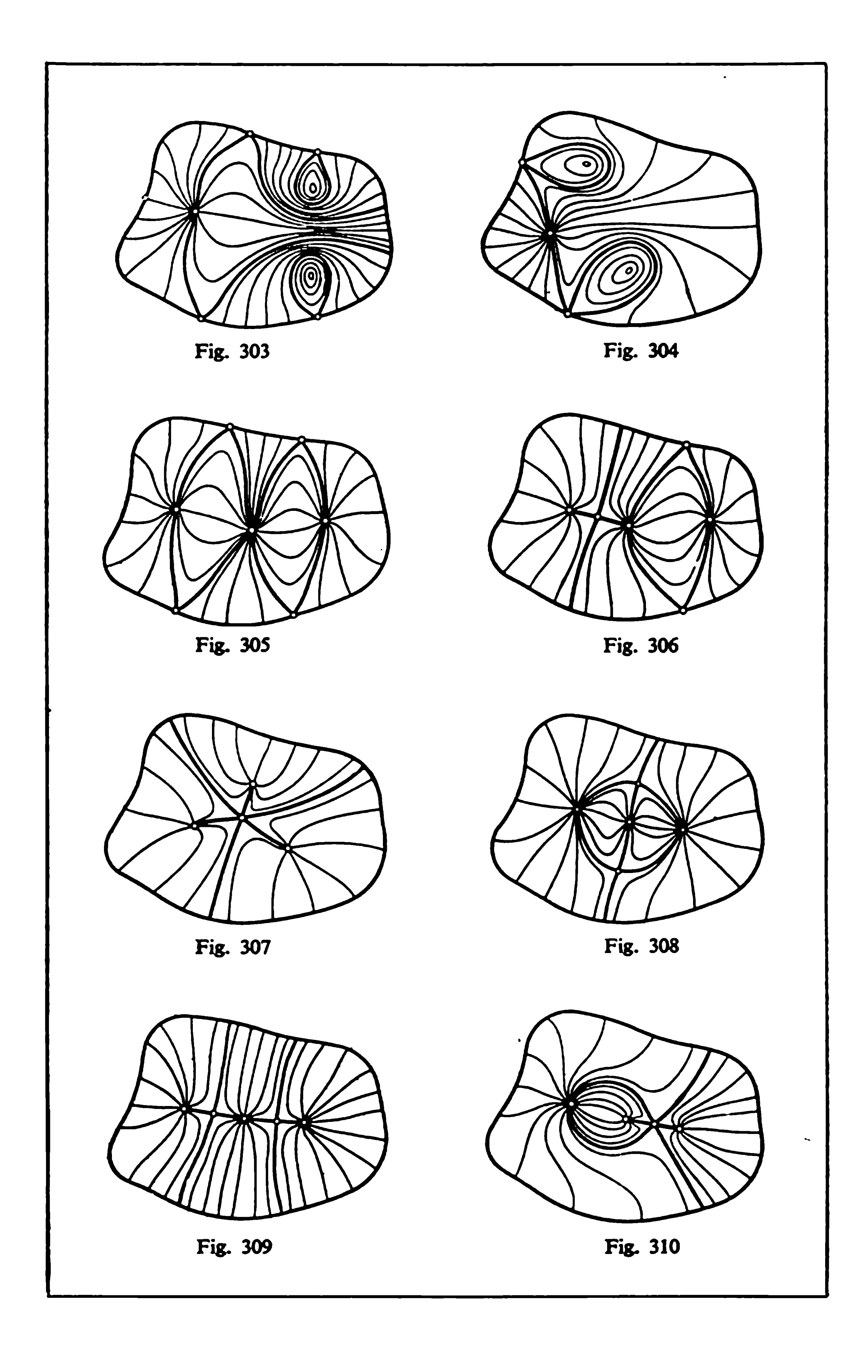


Fig. 303

Fig. 304

Fig. 305

Fig. 306

Fig. 307

Fig. 308

Fig. 309

Fig. 310

40.05. Etudier les points singuliers des champs vectoriels ci-dessous $w(z)$ donnés dans tout le plan élargi:

1. $\overline{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$.

2. $\overline{w}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}$.

3. $\overline{w}=\frac{i}{z-1}+\frac{i}{z+1}$.

4. $\overline{w}=\frac{i}{z-1}-\frac{i}{z+1}+\frac{1}{z}$.

5. $\overline{w}=\frac{1+i}{z+1}-\frac{1-i}{z-1}$.

6. $\overline{w}=\frac{1-i}{z+1}+\frac{1-i}{z-1}-\frac{2}{z}$.

40.06. Etudier les points singuliers du champ vectoriel

$$w(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k-i\beta_k}{\overline{z}-\overline{z}_k}$$

(α_k et β_k sont des constantes réelles).

40.07. Montrer qu'un champ vectoriel possédant dans tout le plan élargi exactement n points singuliers, qui sont des tourbillons-sources respectivement d'intensités β_k et $\alpha_k (k=1, 2, \ldots, n)$, existe si, et seulement si, les conditions $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=0$, $\beta_1+\ldots+\beta_n=0$ sont vérifiées.

Il arrive souvent de résoudre le problème concernant la recherche d'un champ vectoriel $w(z)$ qui possède dans le plan élargi des points singuliers donnés sans en avoir d'autres. Pour les points singuliers donnés, on indique l'intensité du tourbillon, l'intensité de la source, le moment du dipôle, les coefficients des multipôles. Pour abréger, un champ vectoriel, possédant des points singuliers donnés sans en avoir d'autres dans le plan élargi, sera appelé *champ vectoriel engendré par des points singuliers donnés* dans le plan élargi.

40.08. Montrer que, pour qu'un champ vectoriel engendré par des points singuliers donnés dans le plan élargi existe, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:

1. La somme des intensités des sources suivant tous les points singuliers donnés est nulle.

2. La somme des intensités des tourbillons suivant tous les points singuliers donnés est nulle.

40.09. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels engendrés dans le plan élargi par les points singuliers suivants:

1. Sources aux points $z=a$ et $z=\overline{a}$ ($\operatorname{Im} a\neq 0$) respectivement d'intensité 2π et -2π.

2. Tourbillons aux points $z=a$ et $z=-\bar{a}$ (Re $a \neq 0$) respectivement d'intensité 2π et -2π.

3. Sources aux points a, ai, $-a$, $-ai$ ($a \neq 0$) respectivement d'intensité 2π, -2π, 2π, -2π.

4. Tourbillons aux points a, ai, $-a$, $-ai$, $\frac{1}{\bar{a}}$, $\frac{i}{\bar{a}}$, $-\frac{1}{\bar{a}}$, $-\frac{1}{\bar{a}}$ ($|a| \neq 1$) respectivement d'intensité 2π, 2π, 2π, 2π, -2π, -2π, -2π, -2π.

5. Dipôles aux points $z=0$ et $z=\infty$ respectivement de moment 2π et -2π.

6. Dipôles aux points $z=0$ et $z=\infty$ respectivement de moment 2π et $2\pi i$.

7. Dipôle au point $z=\infty$ de moment -2π et tourbillons aux points $z=0$ et $z=\infty$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

8. Dipôles aux points $z=0$ et $z=\infty$ de moment 2π chacun et sources aux points $z=0$ et $z=\infty$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

40.10. Soient $z_0 \neq \infty$, $\gamma \neq 0$ des nombres complexes, et soit h un nombre positif. Résoudre les problèmes suivants:

1. Trouver le champ vectoriel $w_1(z;\ h)$ engendré dans le plan élargi par deux sources situées aux points $z_0+\gamma h$ et $z_0-\gamma h$ respectivement d'intensité π/h et $-\pi/h$.

2. Trouver la limite $w_1(z)$ du champ vectoriel $w_1(z;\ h)$ pour $h \to 0$.

3. Etudier les points singuliers du champ vectoriel $w_1(z)$.

4. Trouver le champ vectoriel $w_2(z\ ;\ h)$ engendré dans le plan élargi par deux tourbillons situés aux points $z_0+\gamma h$ et $z_0-\gamma h$ respectivement d'intensité π/h et $-\pi/h$.

5. Trouver la limite $w_2(z)$ du champ vectoriel $w_2(z;\ h)$ pour $h \to 0$.

6. Etudier les points singuliers du champ vectoriel $w_2(z)$.

7. Trouver le champ vectoriel $w_3(z;\ h)$ engendré dans le plan élargi par trois sources situées aux points $z_0+h\gamma$, $z_0-h\gamma$ et z_0 respectivement d'intensité π/h^2, π/h^2 et $-2\pi/h^2$.

8. Trouver la limite $w_3(z)$ du champ vectoriel $w_3(z;\ h)$ pour $h \to 0$.

9. Etudier les points singuliers du champ vectoriel $w_3(z)$.

40.11. Soit $w(z,\ z_0)$ un champ vectoriel engendré dans le plan élargi par un tourbillon d'intensité $\beta \neq 0$ situé au point z_0 et par d'autres singularités occupant des points différents de z_0. En adoptant les notations $x_0 = \text{Re}\, z_0$, $y_0 = \text{Im}\, z_0$, étudier le caractère du point singulier $z=z_0$ pour les champs vectoriels $w_1(z) = \frac{\partial}{\partial x_0} w(z;\ z_0)$, $w_2(z) = \frac{\partial}{\partial y_0} w(z;\ z_0)$.

Dans certains cas, le champ vectoriel est donné seulement par ses singularités à distances finies en ajoutant la condition d'existence d'une limite finie donnée pour $z \to \infty$.

40.12. Montrer que quels que soient les nombres réels α_k et β_k ($k=1, 2, \ldots, n$) et le nombre complexe $w_\infty \neq \infty$, il n'existe qu'un champ vectoriel unique $w(z)$ possédant aux points donnés z_k($k=1, 2, \ldots, n$) des tourbillons-sources respectivement d'intensité β_k et α_k, ne présentant pas d'autres singularités à distances finies et vérifiant la condition $\lim_{z\to\infty} w(z) = w_\infty$.

40.13. Etudier le caractère de la singularité à l'infini du champ vectoriel dont l'existence et l'unicité doivent être montrées au problème 40.12.

40.14. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels $w(z)$ possédant les singularités à distances finies indiquées et satisfaisant à la condition $\lim_{z \to \infty} w(z) = w_\infty$:

1. Un tourbillon d'intensité 2π au point $z = 0$; $w_\infty = 1$.
2. Une source d'intensité 2π au point $z = 0$; $w_\infty = i$.
3. Deux sources aux points $z = 1$ et $z = -1$ d'intensité 2π chacune; $w_\infty = 1$.
4. Des tourbillons aux points $z = 1$, $z = i$, $z = -1$, $z = -i$ d'intensité 2π chacun ; $w_\infty = 1 + i$.
5. Un dipôle au point $z = 0$ de moment $2\pi i$ et un tourbillon d'intensité 2π au point $z = 0$; $w_\infty = 1$.

Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans un domaine simplement connexe D et supposons que son potentiel complexe $W(z)$ soit continu aux points frontières de ce domaine (plus précisément, pour chaque tronçon de frontière assez petit du domaine D, il existe un domaine $D_1 \subset D$, une partie de la frontière duquel est constituée par ce tronçon, tel que chaque branche régulière du potentiel complexe $W(z)$ soit continue jusqu'à la frontière de ce domaine D_1), tandis que la fonction de courant $V(z) = \text{Im } W(z)$ reste constante sur toute la frontière du domaine D. Un tel champ vectoriel sera appelé *champ vectoriel engendré dans le domaine D par ses points singuliers*.

Conformément à la définition donnée au paragraphe 39, pour un champ vectoriel engendré dans un domaine D par ses points singuliers, la frontière du domaine D est constituée par les lignes de courant frontières de ce champ vectoriel.

40.15. Montrer qu'il n'y a qu'un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe D par ses points singuliers.

Indication. En admettant l'existence de deux champs vectoriels $w_1(z)$ et $w_2(z)$, examiner la fonction de courant pour le champ vectoriel $w(z) = w_2(z) - w_1(z)$ et appliquer le principe du maximum et du minimum pour les fonctions harmoniques.

40.16. Montrer que la condition nécessaire d'existence d'un champ vectoriel engendré dans un domaine D par ses points singuliers consiste dans le fait que la somme des intensités des sources suivant tous les points singuliers doit être nulle.

Indication. Le flux à travers la frontière du domaine D est d'un côté égal à la somme des intensités des sources, tandis que de l'autre côté il est nul, car la frontière est constituée par des lignes de courant.

Le problème fondamental consiste dans la construction d'un champ vectoriel engendré dans un domaine donné D par des points singuliers donnés (pour chaque point singulier, on donne son emplacement, l'intensité de la source, l'intensité du tourbillon, le moment du dipôle, les coefficients des multipôles). Dans le cas où le domaine D est un demi-plan ou un disque, le problème de la recherche d'un tel champ vectoriel se ramène à la construction d'un champ vectoriel engendré par les points singuliers donnés dans tout le plan élargi. Cette réduction est basée sur le principe de symétrie de Riemann-Schwarz (voir § 34).

40.17. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ par ses points singuliers, et supposons que la fonction $w(z)$ soit continue dans ce demi-plan jusqu'à l'axe réel (sauf, bien entendu, aux points singuliers). Montrer que la fonction $\overline{w(z)}$ se prolonge analytiquement dans le demi-plan $\operatorname{Im} z < 0$ et que le prolongement analytique $\overline{w_1(z)}$ est donné par la formule $\overline{w_1(z)} = w(\bar{z})$.

Indication. La fonction $w(z)$ est réelle sur l'axe réel.

40.18. Montrer que l'assertion du problème 40.17 reste en vigueur même en l'absence de l'hypothèse de continuité de la fonction $w(z)$ jusqu'à l'axe réel.

Indication. Prolonger d'abord analytiquement le potentiel complexe $W(z)$ en se limitant à un voisinage assez petit de chaque point de l'axe réel (pour ne pas être gêné par le fait qu'il est multiforme), ensuite utiliser le résultat du problème 40.17.

40.19. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ par ses points singuliers, et soit $w_1(z)$ son prolongement analytique dans le demi-plan $\operatorname{Im} z < 0$. Démontrer les assertions suivantes :

1. Si un point z_0 est un point singulier du champ vectoriel $w(z)$, alors le point $\bar{z}_0$ est un point singulier du champ vectoriel $w_1(z)$.

2. Si en un point z_0 le champ vectoriel $w(z)$ possède une source d'intensité α, alors le champ vectoriel $w_1(z)$ possède au point $\bar{z}_0$ une source ayant la même intensité α.

3. Si en un point z_0 le champ vectoriel $w(z)$ possède un tourbillon d'intensité β, alors le champ vectoriel $w_1(z)$ possède au point $\bar{z}_0$ un tourbillon d'intensité $-\beta$.

4. Si en un point z_0 le champ vectoriel $w(z)$ possède un dipôle de moment a, alors le champ vectoriel $w_1(z)$ possède au point $\bar{z}_0$ un dipôle de moment $\bar{a}$.

40.20. Montrer que, si le domaine D est représenté par le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, la condition nécessaire d'existence d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par des points singuliers donnés formulée dans le problème 40.16 est en même temps suffisante.

40.21. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans le disque $|z| < R$ par ses points singuliers. Montrer que la fonction $\overline{w(z)}$ se prolonge analytiquement dans le domaine $|z| > R$ et que le prolongement analytique $\overline{w_1(z)}$ est donné par la formule $\overline{w_1(z)} = -w\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)\frac{R^2}{z^2}$.

Indication. La partie imaginaire du potentiel complexe reste constante sur la circonférence $|z| = R$, car cette dernière est constituée par des lignes de courant frontières.

40.22. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans le disque $|z| < R$ par ses points singuliers, et soit $w_1(z)$ son prolongement analytique dans le domaine $|z| > R$.

Démontrer les assertions suivantes :

1. Si un point z_0 est un point singulier du champ vectoriel $w(z)$, alors le point $R^2/\bar{z}_0$ est un point singulier du champ vectoriel $w_1(z)$.

2. Si un point z_0 est une source d'intensité α pour le champ vectoriel $w(z)$, alors $R^2/\bar{z}_0$ est une source ayant la même intensité α pour le champ vectoriel $w_1(z)$.

3. Si un point z_0 est un tourbillon d'intensité β pour le champ vectoriel $w(z)$, alors le point $R^2/\bar{z}_0$ est un tourbillon d'intensité $-\beta$ pour le champ vectoriel $w_1(z)$.

4. Si un point z_0 est un dipôle de moment a pour le champ vectoriel $w(z)$, alors le point $R^2/\bar{z}_0$ est un dipôle de moment $-\bar{a}R^2/\bar{z}_0^2$ pour le champ vectoriel $w_1(z)$ pour $z_0 \neq 0$ et de moment $\bar{a}$ pour $z_0 = 0$.

40.23. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré par ses points singuliers dans le demi-plan $\operatorname{Re}\{(z-c)e^{i\varphi}\} > 0$. Montrer que ce champ vectoriel se prolonge analytiquement dans tout le plan élargi et trouver la formule pour le prolongement analytique $w_1(z)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re}\{(z-c)e^{-i\varphi}\} < 0$.

40.24. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ par ses points singuliers parmi lesquels on trouve un dipôle de moment a situé en un point z_0. Montrer que le prolongement analytique du champ vectoriel $w(z)$ dans tout le plan possède un dipôle au point $-\bar{z}_0$ et trouver le moment de ce dipôle.

En utilisant le principe de symétrie, on peut résoudre le problème concernant la construction d'un champ vectoriel engendré dans un domaine D par des points singuliers donnés non seulement dans le cas où le domaine D est un disque ou un demi-plan, mais aussi pour beaucoup d'autres domaines bornés par des droites et arcs de circonférences.

40.25. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans le demi-disque $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, par ses points singuliers. Montrer que :

1. Le champ vectoriel $w(z)$ se prolonge analytiquement jusqu'à un champ vectoriel $w_1(z)$ donné dans tout le plan élargi.

2. Si un point z_0 est un point singulier du champ vectoriel $w(z)$, alors les points $\bar{z}_0$, $1/\bar{z}_0$ et $1/z_0$ sont des points singuliers d'un champ vectoriel $w_1(z)$.

3. Si un point z_0 est une source d'intensité α pour le champ vectoriel $w(z)$, alors les points $\bar{z}_0$, $1/\bar{z}_0$ et $1/z_0$ sont aussi des sources d'intensité α pour un champ vectoriel $w_1(z)$.

4. Si un point z_0 est un tourbillon d'intensité β pour le champ vectoriel $w(z)$, alors les points $\bar{z}_0$, $1/\bar{z}_0$ et $1/z_0$ sont aussi des tourbillons pour un champ vectoriel $w_1(z)$ et leurs intensités sont respectivement égales à $-\beta$, $-\beta$, β.

5. Si un point z_0 est un dipôle de moment a pour le champ vectoriel $w(z)$, alors les points $\bar{z}_0$, $1/\bar{z}_0$ et $1/z_0$ sont aussi des dipôles pour un champ vectoriel $w_1(z)$, leurs moments étant respectivement égaux à $\bar{a}$, $-\bar{a}/\bar{z}_0^2$ et $-a/z_0^2$.

40.26. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels engendrés dans les domaines D indiqués par les points singuliers donnés :

1. Domaine D : $\operatorname{Re} z > 0$; un tourbillon d'intensité 2π au point $z = 1$.

2. Domaine D : $\operatorname{Re} z > 0$; deux sources aux points $z = 1$ et $z = 2$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

3. Domaine D : $\operatorname{Re} z > 0$; deux sources aux points $z = 1 + i$ et $z = 1 - i$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

4. Domaine D : $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$; un dipôle de moment 2π au point $z = 2$.

5. Domaine D : $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$; un dipôle de moment $2\pi i$ au point $z = 1$.

6. Domaine D : $|z| > 1$; un tourbillon d'intensité 2π au point $z = 2$.

7. Domaine D : $|z|>1$; des sources aux points $z=2$, $z=2i$, $z=-2$, $z=-2i$ respectivement d'intensité 2π, -2π, 2π, -2π.

8. Domaine D : $|z|>R$; un dipôle de moment 2π au point $z=\infty$ et un tourbillon d'intensité 2π au point $z=\infty$.

9. Domaine D : $|z|>1$; un dipôle de moment 2π au point $z=\infty$ et deux tourbillons aux points $z=a$ et $z=\bar{a}$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

10. Domaine D : $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$; un tourbillon d'intensité 2π au point $z=1$ et un tourbillon d'intensité 2π au point $z=2$.

11. Domaine D : $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$, $|z|<1$; un tourbillon d'intensité 2π au point $z=\frac{1+i}{2}$.

12. Domaine D : $|z-1|<\sqrt{2}$, $|z+1|<\sqrt{2}$; deux sources aux points $z=i/2$ et $z=-i/2$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

Dans le cas où l'on connaît la représentation conforme d'un domaine D sur un disque, un demi-plan ou un autre domaine quelconque dans lequel nous savons construire le champ vectoriel d'après ses points singuliers, ce problème peut être résolu pour le domaine D aussi.

40.27. Soit $w(z)$ un champ vectoriel engendré dans un domaine D par ses points singuliers, et soit $z=\varphi(\zeta)$ la représentation conforme d'un domaine D_1 sur le domaine D. Montrer que :

1. Le champ vectoriel $w_1(\zeta)=w(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta)$ est engendré dans le domaine D_1 par ses points singuliers.

2. Un point ζ_0 est un point singulier du champ vectoriel $w_1(\zeta)$ si, et seulement si, le point $z_0=\varphi(\zeta_0)$ est un point singulier du champ vectoriel $w(z)$.

3. Si un point z_0 est une source d'intensité α pour le champ vectoriel $w(z)$, alors le point ζ_0 est aussi une source d'intensité α pour le champ vectoriel $w_1(\zeta)$.

4. Si le point z_0 est un tourbillon d'intensité β pour le champ vectoriel $w(z)$, alors le point ζ_0 est aussi un tourbillon d'intensité β pour le champ vectoriel $w_1(\zeta)$.

5. Si un point z_0 est un dipôle de moment a pour le champ vectoriel $w(z)$, alors le point ζ_0 est un dipôle de moment $a/\varphi'(\zeta_0)$ pour le champ vectoriel $w_1(\zeta)$ (à condition que $z_0\neq\infty$ et $\zeta_0\neq\infty$ ou $z_0=\infty$ et $\zeta_0=\infty$).

40.28. En s'appuyant sur le théorème de Riemann sur l'existence d'une représentation conforme, montrer que pour tout domaine simplement connexe D distinct de tout le plan complexe et du plan complexe élargi, la condition nécessaire d'existence d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par des points singuliers donnés (la démonstration de la nécessité de cette condition constitue l'objet du problème 40.16) est en même temps suffisante.

40.29. Soit D un domaine simplement connexe, et soit $z_0\neq\infty$ un point intérieur à ce domaine. Désignons par $\varphi(z)$ la fonction qui réalise une représentation conforme du domaine D sur le disque unité en transformant le point z_0 en le centre de ce disque et en vérifiant la condition $\varphi'(z_0)>0$. Montrer

que la fonction $W(z) = i \ln \varphi(z)$ est le potentiel complexe du champ vectoriel engendré dans le domaine D par un tourbillon d'intensité 2π au point z_0.

40.30. Soit D un domaine simplement connexe. Pour tout point $z_0 \in D$, désignons par $\varphi(z\ ;\ z_0)$ la fonction qui réalise une représentation conforme du domaine D sur le disque unité et qui transforme le point z_0 en le centre de ce disque (cette fonction est définie dans une certaine mesure arbitrairement). Montrer que la fonction $W(z) = \ln \dfrac{\varphi(z\ ;\ z_1)}{\varphi(z\ ;\ z_2)}$ est le potentiel complexe du champ vectoriel engendré dans le domaine D par deux sources situées aux points z_1 et z_2 respectivement d'intensité 2π et -2π.

40.31. Soit D un domaine simplement connexe contenant le point $z = \infty$ à son intérieur. Désignons par $\varphi(z)$ la fonction qui réalise une représentation conforme du domaine D sur l'extérieur du disque unité tout en laissant à sa place le point à l'infini et vérifiant la condition $\varphi'(\infty) > 0$. Montrer que la fonction $W(z) = e^{i\tau}\varphi(z) + \dfrac{e^{-i\tau}}{\varphi(z)}$ est le potentiel complexe du champ vectoriel engendré dans le domaine D par un dipôle de moment $\varphi'(\infty)e^{i\tau}$ situé au point $z = \infty$.

40.32. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels engendrés dans les domaines D indiqués par les points singuliers donnés :

1. Domaine D : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} > \dfrac{1}{16}$; un dipôle de moment 2π au point $z = \infty$.

2. Domaine D : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} > \dfrac{1}{16}$; un dipôle de moment -2π au point $z = \infty$ et un tourbillon d'intensité $2\pi\beta$ au point $z = \infty$.

3. Domaine D : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} > \dfrac{1}{16}$; un dipôle de moment $2\pi e^{i\tau}$ au point $z = \infty$.

4. Domaine D : $z \notin [-1, 1]$; un dipôle de moment -2π et un tourbillon d'intensité $2\pi\beta$ au point $z = \infty$.

5. Domaine D : $z \notin [-1, 1]$; un dipôle de moment $2\pi e^{i\tau}$ et un tourbillon d'intensité 2π au point $z = \infty$.

6. Domaine D : $|z - i| > \sqrt{2}$, $|z + i| > \sqrt{2}$; un dipôle de moment $2\pi e^{i\tau}$ au point $z = \infty$.

7. Domaine D : $|z - i| > \sqrt{2}$, $|z + i| > \sqrt{2}$; un dipôle de moment $2\pi(1 + i)$ et un tourbillon d'intensité $2\pi\beta$ au point $z = \infty$.

8. Domaine D : $z \notin [-1, 1]$; deux sources aux points $z = i$ et $z = -i$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

9. Domaine D : tout le plan muni d'une coupure suivant l'arc de circonférence

$$\left| z + \frac{1}{2} i \operatorname{ctg} \alpha \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4},$$

situé dans le demi-plan supérieur ; un dipôle de moment $2\pi e^{i\tau}$ situé à l'infini.

10. Domaine D : le demi-plan supérieur muni d'une coupure suivant le segment vertical $[0, i]$; deux sources aux points $z = 2 + i$ et $z = -2 + i$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

11. Domaine D : l'extérieur du disque $|z| \leq 1$ muni de coupures suivant les segments $(1, 2)$ et $(-2, -1)$; un dipôle de moment $2\pi i$ situé à l'infini.

12. Domaine D : l'extérieur du disque $|z| \leq 1$ muni de coupures suivant les segments $(1, 2)$ et $(-2, -1)$; un dipôle de moment $2\pi e^{i\gamma}$ situé à l'infini.

40.33. On appelle profil de Joukovski l'image de la circonférence $|\zeta - \zeta_0| = R$, où $\zeta_0 = 1 - Re^{-i\alpha}$, $R > 1$, $0 \leq \alpha < \pi/2$ par l'application réalisée par la fonction $z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$. Désignons par D un domaine infini borné par le profil de Joukovski. Trouver le potentiel complexe $W(z)$ du champ vectoriel engendré dans le domaine D par un dipôle de moment $e^{i\gamma}$ et un tourbillon d'intensité $2\pi\beta$ situés à l'infini.

* * *

Il arrive souvent de construire un champ vectoriel d'après des points singuliers donnés dans un domaine dont la frontière n'est pas constituée par des lignes de courant frontières mais par des lignes équipotentielles frontières. Ce problème se réduit immédiatement au problème déjà examiné en multipliant le potentiel complexe par l'unité imaginaire.

40.34. Soit $w(z)$ un champ vectoriel à potentiel complexe $W(z)$, et soit $w_1(z)$ un champ vectoriel à potentiel complexe $iW(z)$. Montrer que:

1. Les lignes de courant du champ vectoriel $w_1(z)$ sont des lignes équipotentielles du champ vectoriel $w(z)$, tandis que les lignes équipotentielles du champ vectoriel $w_1(z)$ ne diffèrent des lignes de courant du champ vectoriel $w(z)$ que par le sens de mouvement qui est inverse.

2. Si le champ vectoriel $w(z)$ a en un point z_0 une source d'intensité α, alors le champ vectoriel $w_1(z)$ possède au point z_0 un tourbillon d'intensité β.

3. Si le champ vectoriel $w(z)$ a en un point z_0 un tourbillon d'intensité β, alors le champ vectoriel $w_1(z)$ possède au point z_0 une source d'intensité $-\beta$.

4. Si le champ vectoriel $w(z)$ a en un point z_0 un dipôle de moment a, alors le champ vectoriel $w_1(z)$ a au point z_0 un dipôle de moment ia.

40.35. Montrer que la condition nécessaire et suffisante d'existence dans un domaine simplement connexe D (différent du plan entier et du plan élargi entier) d'un champ vectoriel qui possède dans ce domaine des points singuliers donnés, à condition que la frontière du domaine soit constituée par des lignes équipotentielles frontières, implique l'annulation de la somme des intensités des tourbillons aux points singuliers donnés.

Indication. Voir le problème 40.28.

40.36. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels donnés dans les domaines D indiqués d'après les points singuliers donnés à condition que la frontière du domaine D soit constituée par des lignes équipotentielles frontières de ces champs :

1. Domaine D : $\operatorname{Re} z > 0$; deux tourbillons aux points $z = 1 + i$ et $z = 1 - i$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

2. Domaine D : $|z| < 1$; des tourbillons aux points $z = \frac{1+i}{2}$, $z = \frac{-1+i}{2}$, $z = \frac{-1-i}{2}$, $z = \frac{1-i}{2}$ respectivement d'intensité 2π, -2π, 2π, -2π.

3. Domaine D : $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| < 1$; un dipôle au point $z = 1/2$ de moment $2\pi i$.

4. Domaine D : $|\text{Im}\, z| < 1$; deux tourbillons aux points $z = -1$ et $z = 1$ respectivement d'intensité 2π et -2π.

5. Domaine D : $|z - i\sqrt{3}| < 2$, $|z + i\sqrt{3}| < 2$; une source d'intensité 2π située à l'infini.

* * *

Parfois, il faut résoudre le problème de la construction d'un champ vectoriel d'après ses points singuliers donnés non seulement à l'intérieur mais aussi sur la frontière d'un domaine. Dans ces cas, sur la frontière, on donne le plus souvent des sources frontières (voir la définition qui précède le problème 39.40).

40.37. Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans le demi-plan supérieur et continu jusqu'à l'axe réel, sauf aux points $z = 0$ et $z = \infty$ en lesquels le champ possède des sources frontières respectivement d'intensité α et $-\alpha$; en outre, les demi-droites $(0, +\infty)$ et $(-\infty, 0)$ sont des lignes de courant de ce champ vectoriel. Montrer que la fonction $\overline{w(z)}$ se prolonge analytiquement dans tout le plan élargi (excepté les points $z = 0$ et $z = \infty$) et que le champ vectoriel qui correspond à ce prolongement analytique présente aux points $z = 0$ et $z = \infty$ des sources respectivement d'intensité 2α et -2α.

Indication. Appliquer le principe de symétrie et utiliser le fait que lorsqu'un point tend vers une source frontière, la fonction de courant reste bornée, tandis que le potentiel tend vers l'infini.

40.38. Montrer que l'assertion du problème 40.37 reste valable même en l'absence de l'hypothèse de continuité du champ vectoriel ; il suffit que le potentiel complexe soit continu (alors il faut considérer les demi-droites $(0, +\infty)$ et $(-\infty, 0)$ comme des lignes de courant frontières).

Indication. Voir l'indication concernant le problème 40.17.

Nous allons conserver le terme « champ vectoriel engendré dans un domaine D par des points singuliers donnés » même pour le cas où l'on donne sur la frontière du domaine un nombre fini de sources frontières, tandis que les tronçons de frontière compris entre ces sources sont constitués par des lignes de courant frontières.

40.39. Montrer qu'un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe par deux sources frontières dont les intensités sont de signe opposé existe et est unique.

Indication. Réaliser la représentation conforme sur un demi-plan.

40.40. Soit D un domaine simplement connexe, soient ξ_1 et ξ_2 deux points frontières de ce domaine, et soit $\varphi(z)$ une certaine fonction qui réalise la représentation conforme du domaine D sur la bande $0 < \text{Im}\, z < \alpha$ en transformant le point ξ_1 en le point $-\infty$ et le point ξ_2 en le point $+\infty$. Montrer que la fonction $\varphi(z)$ est le potentiel complexe du champ vectoriel engendré dans le domaine D par deux sources frontières situées aux points ξ_1 et ξ_2 respectivement d'intensité α et $-\alpha$.

40.41. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels engendrés dans les domaines D indiqués par les points singuliers donnés :

1. Domaine D : $|\text{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}$; deux sources frontières aux points $z = \frac{\pi i}{2}$ et $z = -\frac{\pi i}{2}$ respectivement d'intensité π et $-\pi$.

2. Domaine D : $|\text{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}$; une source au point $z = 0$ d'intensité 2π et deux sources frontières aux points $z = -i\infty$ et $z = +i\infty$ d'intensité $-\pi$ chacune.

3. Domaine D : $|\text{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}$; deux sources aux points $z = \frac{\pi}{4}$ et $z = -\frac{\pi}{4}$ d'intensité 2π chacune et deux sources frontières aux points $z = +i\infty$ et $z = -i\infty$ d'intensité -2π chacune.

4. Domaine D : $x^2 - y^2 < \frac{1}{2}$; deux sources frontières aux points $z = +i\infty$ et $z = -i\infty$ respectivement d'intensité 1 et -1.

5. Domaine D : la bande $|\text{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}$ munie d'une coupure suivant la demi-droite $(0, +\infty)$; deux sources frontières aux points $z = \frac{\pi i}{2} + \infty$ et $z = -\frac{\pi i}{2} + \infty$ respectivement d'intensité α_1 et α_2 et une source frontière au point $z = -\infty$ d'intensité $-(\alpha_1 + \alpha_2)$.

6. Domaine D : la bande $|\text{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}$ munie de coupures suivant les demi-droites $\left(\frac{1}{2}\ln 2,\ +\infty\right)$ et $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$; des sources frontières aux points

$$z = \frac{\pi i}{2} + \infty, \quad z = \frac{\pi i}{2} - \infty, \quad z = -\frac{\pi i}{2} + \infty, \quad z = -\frac{\pi i}{2} - \infty$$

respectivement d'intensité π, $-\pi$, π, $-\pi$.

On peut aussi poser le problème concernant la recherche d'un champ vectoriel engendré dans un domaine D par un dipôle frontière. Pourtant, la caractéristique quantitative d'un dipôle frontière est assez compliquée. Une forme tant soit peu satisfaisante pour cette caractéristique (le moment du dipôle frontière) ne peut être proposée que dans le cas où la frontière du domaine a une tangente au point d'emplacement du dipôle frontière. Quand même, dans ce cas aussi la formulation est assez compliquée.

40.42. Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans le demi-plan supérieur et supposons que l'axe réel entier soit constitué par de lignes de courant frontières, tandis qu'au point $z = \infty$ on y trouve un dipôle frontière. Montrer que la fonction $\overline{w(z)}$ se prolonge analytiquement dans tout le plan élargi (excepté un certain nombre de pôles) et que le champ vectoriel correspondant à ce prolongement analytique possède au point $z = \infty$ un dipôle de moment réel.

Si un dipôle frontière se situe sur un arc analytique, on voit du problème précédent que le champ vectoriel se prolonge analytiquement à travers cet arc et que le champ vectoriel prolongé possède déjà un dipôle intérieur. Dans ce cas, il est bien naturel d'appeler *moment du dipôle frontière* la

moitié du moment du dipôle intérieur qui apparaît. Une définition analogue, quoique munie de certaines complications supplémentaires, peut être donnée pour un dipôle frontière situé sur un arc lisse.

40.43. Trouver les potentiels complexes $W(z)$ des champs vectoriels engendrés dans les domaines D indiqués par les points singuliers donnés :

1. Domaine D : $|z-i|<\sqrt{2}$, $|z+i|<\sqrt{2}$; deux dipôles frontières aux points $z=\frac{i}{\sqrt{2}+1}$ et $z=-\frac{i}{\sqrt{2}+1}$ respectivement de moment π et $-\pi$.

2. Domaine D : $|z|<1$; un tourbillon d'intensité 2π au point $z=0$ et deux dipôles frontières aux points $z=i$ et $z=-i$ respectivement de moment π et $-\pi$.

3. Domaine D : le demi-plan supérieur muni d'une coupure suivant le segment vertical $[0, i]$; deux dipôles frontières aux points $z=1$ et $z=-1$ de moment π chacun.

4. Domaine D : le disque unité muni de coupures suivant les segments verticaux $\left[-i, -\frac{i}{2}\right]$ et $\left[\frac{i}{2}, i\right]$; deux dipôles frontières aux points $z=1$ et $z=-1$ respectivement de moment πi et $-\pi i$.

40.44. Soient D un domaine simplement connexe, ξ_0 un point frontière de ce domaine, et supposons qu'une certaine fonction $\zeta=\varphi(z)$ réalise une représentation conforme du domaine D sur le demi-plan $\operatorname{Im}\zeta>0$ en transformant le point $z=\xi_0$ en le point $\zeta=\infty$. Montrer que la fonction $\varphi(z)$ est le potentiel complexe du champ vectoriel engendré dans le domaine D par un dipôle frontière situé au point ξ_0.

Les sources frontières et les dipôles frontières peuvent être considérés comme cas limite des sources et des dipôles situés à l'intérieur d'un domaine.

40.45. Soit $w(z\ ;\ z_0)$ un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe D par une source d'intensité α située au point $z_0\in D$ et par un certain nombre d'autres points singuliers indépendants de z_0. Montrer que, lorsque le point z_0 tend vers un point frontière ξ_0 du domaine D, le champ vectoriel $w(z\ ;\ z_0)$ tend vers le champ vectoriel $w_0(z)$ engendré dans le domaine D par une source frontière d'intensité α située au point ξ_0 et par les autres points singuliers indépendants de z_0 (la convergence est uniforme en chaque partie fermée du domaine D).

40.46. Soit $\{z_n\}$ une suite de points du demi-plan supérieur ayant comme limite le point $z=0$. et soit $w_n(z)$ un champ vectoriel engendré dans le demi-plan supérieur par un dipôle de moment a situé au point z_n et par un certain nombre d'autres points singuliers indépendants de n. Montrer que pour $n\to\infty$, le champ vectoriel $w_n(z)$ tend vers le champ vectoriel $w_0(z)$ engendré dans le demi-plan supérieur par un dipôle frontière de moment $\operatorname{Re} a$ situé au point $z=0$ et par les autres points singuliers indépendants de n (la convergence est uniforme en chaque partie fermée du demi-plan supérieur).

Aux points où la frontière d'un domaine D cesse d'être lisse, on ne peut plus considérer un dipôle frontière comme la limite de la suite des dipôles intérieurs ayant le même moment.

40.47. Désignons par $w_{n,\alpha}(z)$ le champ vectoriel engendré dans l'angle $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ par un dipôle de moment a situé au point $z = \frac{1}{n} e^{i\alpha}$, $|\arg \alpha| < \frac{\pi}{4}$. Trouver la limite de $w_{n,\alpha}(z)$ pour $n \to \infty$.

* * *

Dans le cas où un domaine simplement connexe D contient le point à l'infini, on pose souvent le problème de la recherche d'un champ vectoriel $w(z)$, donné dans le domaine D, seulement d'après des points singuliers donnés situés à *distances finies*. Il est clair qu'un tel problème ne peut pas se résoudre d'une manière unique. Pour dégager une solution unique, il faut désigner certaines conditions supplémentaires.

40.48. Trouver la forme générale du potentiel complexe $W(z)$ d'un champ vectoriel $w(z)$ donné dans le domaine $|z| > R$, sans y avoir de points singuliers à distances finies, à condition que la circonférence $|z| = R$ soit constituée par des lignes de courant frontières et que $\lim_{z \to \infty} w(z) = w_\infty$.

40.49. Montrer que le champ vectoriel du problème précédent est défini d'une façon unique si, outre la grandeur w_∞, on donne la circulation du champ vectoriel le long de la circonférence $|z| = 1$.

40.50. Soit D un domaine simplement connexe contenant à son intérieur le point $z = \infty$. Montrer qu'un champ vectoriel $w(z)$ satisfaisant aux conditions ci-dessous est identiquement nul:

a) la frontière du domaine D est constituée par des lignes de courant frontières du champ vectoriel $w(z)$;

b) le champ vectoriel $w(z)$ ne possède pas de points singuliers à distances finies dans le domaine D;

c) $\lim_{z \to \infty} w(z) = 0$;

d) la circulation du champ vectoriel $w(z)$ le long de la frontière du domaine D est nulle.

Le problème concernant la construction d'un champ vectoriel d'après des points singuliers donnés peut se poser dans des domaines multiplement connexes (le problème posé ci-dessus peut être considéré comme le problème de la construction du champ dans un domaine doublement connexe dégénéré : le domaine D privé du point $z = \infty$). Dans ce cas, outre les points singuliers, il faut encore donner certaines autres grandeurs.

40.51. Montrer que le potentiel complexe $W(z)$ d'un champ vectoriel $w(z)$ donné dans la couronne $1 < |z| < R$, sans y avoir de points singuliers, à condition que les circonférences frontières de cette couronne soient constituées par des lignes de courant frontières du champ vectoriel $w(z)$, est de la forme $W(z) = i\gamma \ln |z| + C$, où γ est une constante réelle arbitraire, C étant une constante complexe arbitraire.

40.52. Montrer qu'un champ vectoriel $w(z)$ donné dans la couronne $1 < |z| < R$, dont les circonférences frontières sont constituées par des lignes

frontières du champ vectoriel $w(z)$, est défini d'une manière unique si l'on donne ses points singuliers et sa circulation le long de la circonférence $|z|=1$.

Soit D un certain domaine p-connexe borné par des courbes lisses par morceaux $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1}$. Nous allons appeler une des courbes frontières (plus précisément la courbe Γ_0) courbe frontière extérieure, tandis que les autres courbes frontières seront des courbes frontières intérieures.

Si un champ vectoriel $w(z)$ est donné dans le domaine D et si les courbes frontières de ce domaine sont constituées par des lignes de courant frontières du champ vectoriel $w(z)$, on dira que le *champ vectoriel* $w(z)$ *est engendré dans le domaine* D par ses points singuliers et par les circulations le long des courbes frontières intérieures.

Le problème de l'unicité d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par des points singuliers donnés (comme, d'habitude, on donne l'emplacement des points singuliers, les intensités des sources, les intensités des tourbillons, les moments des dipôles et les coefficients des multipôles) et par des circulations données le long de toutes les courbes frontières intérieures est résolu d'une façon relativement simple à l'aide du rapport entre le nombre de points critiques et le nombre de pôles du champ vectoriel obtenu dans le problème 39.62.

40.53. Soit $w(z)$ un champ vectoriel donné dans un domaine D et supposons que les courbes frontières du domaine D soient constituées par des lignes frontières du champ vectoriel $w(z)$. Montrer que, si la circulation du champ vectoriel $w(z)$ le long d'une courbe frontière Γ_k est nulle, alors sur la courbe Γ_k on trouve au moins deux points frontières critiques.

Indication. La circulation du champ vectoriel le long d'une ligne de courant est égale à la variation de potentiel du champ vectoriel le long de cette ligne, et sur les portions de la ligne de courant, où il n'y a pas de points critiques, le potentiel varie monotonement.

40.54. Soit un champ vectoriel engendré dans un domaine p-connexe par ses points singuliers et circulations dont les circulations le long de toutes les courbes frontières (y compris la courbe frontière extérieure) de ce domaine sont nulles. Montrer que la somme des multiplicités des points intérieurs et frontières du champ vectoriel n'est pas inférieure à p.

40.55. Montrer qu'il n'existe plus d'un champ vectoriel engendré dans un domaine p-connexe par des points singuliers donnés et par des circulations données le long des courbes frontières intérieures.

Indication. Si $w_1(z)$ et $w_2(z)$ sont deux champs vectoriels pareils, alors leur différence $w(z)$ n'a pas de points singuliers dans le domaine D et les circulations du champ vectoriel $w(z)$ le long de toutes les courbes frontières du domaine D (y compris celle extérieure) sont nulles.

* * *

La méthode du prolongement analytique des champs vectoriels à l'aide du principe de symétrie peut être appliquée une infinité de fois, bien que de tels prolongements nécessitent une argumentation supplémentaire.

40.56. Désignons par $w_n(z)$ le champ vectoriel engendré dans tout le plan élargi par des tourbillons situés aux points $z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $-n \leq k \leq n-1$, d'intensité $\beta_k = (-1)^k 2\pi$. Montrer que, pour $n \to \infty$, le champ vectoriel $w_n(z)$ tend uniformément vers la limite $w(z)$ en chaque domaine fini et que le champ vectoriel limite $w(z)$ donne un prolongement analytique dans tout le plan du champ vectoriel engendré dans la bande $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ par un tourbillon d'intensité 2π situé au point $z = \pi/2$.

40.57. Désignons par $w_n(z)$ le champ vectoriel engendré dans le plan élargi par des sources situées aux points $z_k = k\pi$, $-n \leq k \leq n$, d'intensité 2π chacune, et par une source d'intensité $-2\pi(2n+1)$ située à l'infini. Montrer que, pour $n \to \infty$, le champ vectoriel $w_n(z)$ tend uniformément vers la limite $w(z)$ en chaque domaine fini et que le champ vectoriel limite $w(z)$ donne un prolongement analytique dans tout le plan du champ vectoriel engendré dans la bande $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$ par une source d'intensité 2π située au point $z = 0$ et par deux sources aux points $z = +i\infty$ et $z = -i\infty$ d'intensité $-\pi$ chacune.

40.58. Soit $w_0(z)$ un champ vectoriel engendré dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ par ses points singuliers, et supposons que ce champ vectoriel n'ait pas de points singuliers frontières. En prolongeant le champ vectoriel $w_0(z)$ à l'aide du principe de symétrie à travers les frontières, on peut élucider le caractère des points singuliers du prolongement analytique dans tout le plan. Désignons par $w_n(z)$ le champ vectoriel engendré dans tout le plan élargi par les points singuliers du prolongement analytique qui se situent dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Montrer que, pour $n \to \infty$, le champ vectoriel $w_n(z)$ tend vers la limite uniformément en chaque domaine fini et que dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ cette limite coïncide avec le champ vectoriel $w_0(z)$.

40.59. Admettons que le champ vectoriel $w_0(z)$ du problème 40.58 ait deux sources frontières aux points $z = +\infty$ et $z = -\infty$ respectivement d'intensité α_1 et α_2. Lors de la construction du champ vectoriel $w_n(z)$, nous allons ajouter aux singularités du prolongement analytique du champ vectoriel $w_0(z)$ une source à l'infini d'intensité $\alpha_1 + \alpha_2$. Montrer que dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ le champ vectoriel $w_n(z)$ tend vers une limite qui coïncide avec le champ vectoriel engendré dans cette bande par les mêmes points singuliers à distances finies que le champ $w_0(z)$ plus deux sources frontières aux points $z = +\infty$ et $z = -\infty$ d'intensité $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ chacune.

40.60. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le rectangle

$$-\omega < \operatorname{Re} z < \omega, \quad -\omega' < \operatorname{Im} z < \omega',$$

par un dipôle de moment 2π situé au point $z = 0$. Montrer que

$$W(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \{(z - 2n\omega - 2in'\omega')^{-2} - (2n\omega + 2in'\omega')^{-2}\} + C,$$

où la sommation inclut tous les nombres entiers (positifs et négatifs) n et n' qui ne s'annulent pas simultanément.

40.61. Montrer que la fonction

$$\Phi(z) = \frac{z}{[z^2 - 4(\omega + i\omega')^2][z^2 - 4(\omega - i\omega')^2]} \prod \frac{1 - z^2[2n\omega + 2in'\omega']^{-2}}{1 - z^2[(2n+1)\omega + i(2n'+1)\omega']^{-2}}$$

(le produit inclut tous les nombres entiers n et n' qui ne s'annulent pas simultanément) établit une représentation conforme du rectangle

$$-\omega < \operatorname{Re} z < \omega, \qquad -\omega' < \operatorname{Im} z < \omega',$$

sur le disque $|\zeta| < R$, où $R = 1/\Phi'(0)$.

Indication. Construire le champ vectoriel engendré dans ce rectangle par un tourbillon situé au point $z = 0$.

40.62. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans la couronne $1 < |z| < R^2$ par un dipôle de moment 2π situé au point $z = R$ et par une circulation nulle le long de la circonférence $|z| = 1$. Montrer que

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n R^{-n(n+1)}}{(z - R^{2n-1})^2} + C.$$

40.63. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans la couronne $1 < |z| < R^2$ par un tourbillon d'intensité 2π situé au point $z = R$ et par une circulation nulle le long de la circonférence $|z| = 1$. Montrer que

$$W(z) = i \ln \Phi(z) + C, \qquad \text{où} \quad \Phi(z) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - zR^{4n+1}}{1 - zR^{4n+1}},$$

C étant une constante arbitraire.

40.64. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans la couronne $1 < |z| < R^2$ par deux sources aux points $z = R$ et $z = -R$ respectivement d'intensité 2π et -2π et par une circulation nulle le long de la circonférence $|z| = 1$. Montrer que

$$W(z) = \ln \Phi(z) + C, \qquad \text{où} \quad \Phi(z) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + zR^{2n+1}}{1 - zR^{2n+1}},$$

C étant une constante arbitraire.

40.65. Montrer que la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un champ vectoriel, engendré dans la couronne $1 < |z| < R$ par des points singuliers donnés et par une circulation donnée le long de la circonférence $|z| = 1$, consiste dans la nullité de la somme des intensités des sources suivant tous les points singuliers donnés.

RÉPONSES

40.05.

1. $z = 0$: une source d'intensité 2π ; $z = 1$: une source d'intensité 2π ; $z = \infty$: une source d'intensité -4π.
2. $z = 0$: une source d'intensité 2π ; $z = 1$: une source d'intensité -2π.
3. $z = 1$: un tourbillon d'intensité 2π ; $z = -1$: un tourbillon d'intensité 2π ; $z = \infty$: un tourbillon d'intensité -4π.

4. $z=0$: une source d'intensité 2π ; $z=\infty$: une source d'intensité -2π ; $z=1$: un tourbillon d'intensité 2π ; $z=-1$: un tourbillon d'intensité -2π.

5. $z=1$: une source d'intensité -2π et un tourbillon d'intensité 2π ; $z=-1$: une source d'intensité 2π et un tourbillon d'intensité 2π ; $z=\infty$: un tourbillon d'intensité -4π.

6. $z=1$: une source d'intensité 2π et un tourbillon d'intensité -2π ; $z=-1$: une source d'intensité 2π et un tourbillon d'intensité -2π ; $z=0$: une source d'intensité -4π ; $z=\infty$: un tourbillon d'intensité 4π.

40.06. Le point z_k : une source d'intensité $2\pi\alpha_k$ et un tourbillon d'intensité $2\pi\beta_k$; le point $z=\infty$: une source d'intensité $-2\pi(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$ et un tourbillon d'intensité $-2\pi(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)$.

40.09.

1. $W=\ln\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}+C$. 2. $W=i\ln\dfrac{z-a}{z+\bar{a}}+C$.

3. $W=\ln\dfrac{z^2-a^2}{z^2+a^2}+C$.

4. $W=i\ln\dfrac{z^4-a^4}{1-z^4\bar{a}^4}+C$.

5. $W=\dfrac{1}{z}-z+C$. 6. $W=iz+\dfrac{1}{z}+C$.

7. $W=-z+i\ln z+C$. 8. $W=z+\dfrac{1}{z}+\ln z+C$.

40.10.

1. $\overline{w_1(z\,;\,h)}=\dfrac{\gamma}{(z-z_0)^2-h^2\gamma^2}$.

2. $\overline{w_1(z)}=\dfrac{\gamma}{(z-z_0)^2}$.

3. Un dipôle au point z_0 de moment $-\gamma$.

4. $\overline{w_2(z\,;\,h)}=\dfrac{i\gamma}{(z-z_0)^2-h^2\gamma^2}$.

5. $\overline{w_2(z)}=\dfrac{i\gamma}{(z-z_0)^2}$.

6. Un dipôle au point z_0 de moment $-i\gamma$.

7. $\overline{w_3(z\,;\,h)}=\dfrac{\gamma^2}{(z-z_0)[(z-z_0)^2-h^2\gamma^2]}$.

8. $\overline{w_3(z)}=\dfrac{\gamma^2}{(z-z_0)^3}$.

9. Un quadripôle au point z_0.

40.11. w_1 : un dipôle de moment $-i\beta$; w_2 : un dipôle de moment β.

40.13. Un dipôle de moment $2\pi\bar{w}_\infty$, une source d'intensité $-2\pi(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)$ et un tourbillon d'intensité $-2\pi(\beta_1+\ldots+\beta_n)$.

40.14.

1. $W=z+i\ln z+C$. 2. $W=-iz+\ln z+C$.

3. $W=z+\ln(z^2-1)+C$.

4. $W=(1-i)z+i\ln(z^4-1)+C$.

5. $W=z+\dfrac{i}{z}+i\ln z+C$.

40.23. $\overline{w_1(z)} = w(c - e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{c}))$ $\quad (\operatorname{Re}\{(z-c)e^{-i\varphi}\} < 0)$.

40.24. $-\bar{a}$.

40.26.

1. $W = i \ln \dfrac{z-1}{z+1} + C.$

2. $W = \ln \dfrac{z^2-1}{z^2-4} + C.$

3. $W = \ln \dfrac{z^2+2iz-2}{z^2-2iz-2} + C.$

4. $W = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{i}{z-2i} + C.$

5. $W = \dfrac{i}{z-1} + \dfrac{1}{z-i} + C.$

6. $W = i \ln \dfrac{z-2}{2z-1} + C.$

7. $W = \ln \dfrac{(z^2-4)(4z^2-1)}{(z^2+4)(4z^2+1)} + C.$

8. $W = z + \dfrac{1}{z} - i \ln z + C.$

9. $W = z + \dfrac{1}{z} + i \ln \dfrac{(z-a)(az-1)}{(z-\bar{a})(\bar{a}z-1)} + C.$

10. $W = i \ln \dfrac{z^2-1}{z^2+1} + C.$

11. $W = i \ln \dfrac{(z^2-2i)(2z^2-i)}{(z^2+2i)(2z^2+i)} + C.$

12. $W = \ln \dfrac{(z-0{,}5i)(z-0{,}6-0{,}8i)(z+0{,}6-0{,}8i)(z-2{,}5i)}{(z+0{,}5i)(z-0{,}6+0{,}8i)(z+0{,}6+0{,}8i)(z+2{,}5i)} + C.$

40.32.

1. $W = \dfrac{5}{2}z - \dfrac{3}{2}\sqrt{z^2-1} + C.$

2. $W = -\dfrac{5}{2}z + \dfrac{3}{2}\sqrt{z^2-1} - i\beta \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + C.$

3. $W = \left(\dfrac{1}{2}e^{i\tau} + 2e^{-i\tau}\right)z + \left(\dfrac{1}{2}e^{i\tau} - 2e^{-i\tau}\right)\sqrt{z^2-1} + C.$

4. $W = -z - i\beta \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + C.$

5. $W = z\cos\tau + i\sqrt{z^2-1}\sin\tau - i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) + C.$

6. $W = \dfrac{2}{3}e^{i\tau}\dfrac{(z+1)^{2/3}+(z-1)^{2/3}}{(z+1)^{2/3}-(z-1)^{2/3}} + \dfrac{2}{3}e^{-i\tau}\dfrac{(z+1)^{2/3}-(z-1)^{2/3}}{(z+1)^{2/3}+(z-1)^{2/3}} + C.$

7. $W = \dfrac{2(1+i)(z+1)^{2/3}+(z-1)^{2/3}}{3(z+1)^{2/3}-(z-1)^{2/3}} + \dfrac{1-i(z+1)^{2/3}-(z-1)^{2/3}}{3(z+1)^{2/3}+(z-1)^{2/3}} +$
$+ i\beta \ln \dfrac{(z+1)^{2/3}-(z-1)^{2/3}}{(z+1)^{2/3}+(z+1)^{2/3}} + C.$

8. $W=\ln\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}-i(1+\sqrt{2})}{z+\sqrt{z^2-1}+i(1+\sqrt{2})}+C.$

9. $W=\dfrac{1}{2}e^{i\tau}(z+\sqrt{z^2-1}-i\operatorname{tg}\alpha)+\dfrac{e^{-i\tau}}{2\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{z+\sqrt{z^2-1}-i\operatorname{tg}\alpha}+C.$

10. $W=\ln\dfrac{z^2+3-4\sqrt{1+z^2}\cos\dfrac{\pi}{8}}{z^2+3+4\sqrt{1+z^2}\cos\dfrac{\pi}{8}}+C.$

11. $W=i\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}-4{,}25}+C.$

12. $W=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\cos\tau+i\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}-4{,}25}\sin\tau+C.$

40.33.

$$W=e^{i\tau}\frac{z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}}{2}+\frac{R^2e^{-i\tau}}{z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}}-i\beta\ln\left(z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}\right)+C.$$

40.36.

1. $W=i\ln\dfrac{(z-1-i)(z+1-i)}{(z-1+i)(z+1+i)}+C.$

2. $W=i\ln\dfrac{(2z^2-i)(z^2-2i)}{(2z^2+i)(z^2+2i)}+C.$

3. $W=-\dfrac{60iz^2}{(4z^2-1)(z^2-4)}+C.$

4. $W=i\ln\dfrac{\left(e^{\frac{\pi}{2}(z+1)}-1\right)\left(e^{\frac{\pi}{2}(z+1)}+1\right)}{\left(e^{\frac{\pi}{2}(z-1)}-1\right)\left(e^{\frac{\pi}{2}(z-1)}+1\right)}+C.$

5. $W=\ln\dfrac{(z+1)^{3/5}-(z-1)^{3/5}}{(z+1)^{3/5}+(z-1)^{3/5}}+C.$

40.41.

1. $W=\ln\operatorname{th}\left(2z-\dfrac{\pi i}{2}\right)+C.$

2. $W=\ln\sin z+C.$

3. $W=\ln\cos 2z+C.$

4. $W=\dfrac{2}{\pi}\ln\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)+C.$

5. $W=\dfrac{\alpha_1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{1+e^{-2z}}-1\right)+\dfrac{\alpha_2}{2\pi}\ln\left(\sqrt{1+e^{-2z}}+1\right)+C.$

6. $W=\ln\dfrac{e^{2z}+1+\sqrt{e^{4z}-\dfrac{5}{4}e^{2z}+1}}{e^{2z}-1+\sqrt{e^{4z}-\dfrac{5}{4}e^{2z}+1}}-\ln\left(4e^{2z}-5+2\sqrt{e^{4z}-5e^{2z}+4}\right)+C.$

40.43.

1. $W=\dfrac{2z}{z^2+1}+C.$ 2. $W=i\,\dfrac{[(z+1)^{2/3}+(z-1)^{2/3}]^2}{(z+1)^{4/3}+(z-1)^{4/3}}+C.$

3. $W=\dfrac{2\sqrt{z^2+1}}{z^2-1}+C.$ 4. $W=\dfrac{2i}{z^2-1}+C.$

40.47. Zéro identique.

40.48. $W=\overline{w}_\infty\left(z+\dfrac{R^2}{z}\right)+i\beta\ln z+C.$

§ 41. Liaison des champs vectoriels avec les représentations conformes et les solutions du problème de Dirichlet

Jusqu'à présent, les représentations conformes n'étaient qu'un moyen de résolution des problèmes concernant la recherche des champs vectoriels à points singuliers donnés. Pourtant, on peut inverser le problème et construire les représentations conformes par la recherche des champs vectoriels à points singuliers donnés.

41.01. Soit $\zeta=\varphi(z)$ une fonction quelconque qui réalise une représentation conforme d'un domaine simplement connexe D sur le disque $|\zeta|<R$ en transformant un point $z_0\in D$ en le point $\zeta=0$. Montrer que la fonction $W(z)=i\ln\varphi(z)$ est le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par un tourbillon d'intensité 2π situé au point z_0.

41.02. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe D par un tourbillon d'intensité 2π situé en un point $z_0\in D$. Montrer que la fonction $\varphi(z)=e^{-iW(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur un certain disque $|\zeta|<R$ en transformant le point z_0 en le point $\zeta=0$.

Indication. Voir le problème 32.30.

41.03. Montrer que l'unicité d'un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe D par ses points singuliers entraîne l'unicité de la représentation conforme du domaine D sur le disque $|\zeta|<R$ si l'on donne le rayon R de ce disque, le point $z_0\in D$, qui est transformé en le centre du disque mentionné, et la valeur que prend au point z_0 (pour $z_0\neq\infty$) l'argument de la dérivée de la fonction qui réalise l'application.

41.04. Soit $\zeta=\varphi(z)$ une fonction quelconque qui réalise une représentation conforme d'un domaine simplement connexe D sur une bande de largeur 2π dont les côtés sont parallèles à l'axe réel en transformant le point $\xi_1\in\partial D$ en le point $\zeta=-\infty$ et le point $\xi_2\in\partial D$ en le point $\zeta=+\infty$. Montrer que la fonction $\varphi(z)$ est le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par deux sources frontières situées aux points ξ_1 et ξ_2 respectivement d'intensité 2π et -2π.

Indication. Voir le problème 26.29.

41.05. Soit D un domaine simplement connexe contenant le point à l'infini, et soit $\zeta=\varphi(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme de ce domaine sur le plan entier muni d'une coupure suivant le segment

$[-R, R]$ en transformant le point $z=\infty$ en le point $\zeta=\infty$. Montrer que la fonction $\varphi(z)$ est le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par un dipôle de moment $2\pi\varphi'(\infty)$ situé à l'infini.

41.06. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe D par un dipôle situé en un point $z_0 \in D$. Montrer que la fonction $\zeta = W(z)$ réalise une représentation conforme du domaine D sur tout le plan muni d'une coupure suivant un certain segment horizontal et transforme le point z_0 en le point $\zeta=\infty$.

41.07. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans un domaine simplement connexe D par deux sources situées aux points $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$ respectivement d'intensité 2π et -2π. Montrer que la fonction $\zeta = e^{W(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur tout le plan muni d'une coupure suivant un certain segment de la demi-droite $\arg\zeta = \text{const}$, le point z_1 étant transformé en le point $\zeta=0$, et le point z_2 en le point $\zeta=\infty$.

41.08. Ayant construit les champs vectoriels correspondants à l'aide du principe de symétrie, trouver les représentations conformes $\zeta=\varphi(z)$ du demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ sur les domaines G ci-dessous, compte tenu des conditions supplémentaires indiquées:

1. G : $|\operatorname{Im} z|<\pi$; $\varphi(1)=-\infty$, $\varphi(1)=\infty$, $\varphi(0)=\pi i$.
2. G : $z \notin [-R, R]$; $\varphi(z)=\dfrac{i}{z-i}+O(1)$ $(z\to i)$.
3. G : $z \notin [-iR, iR]$; $\varphi(z)=\dfrac{i}{z-i}+O(1)$ $(z\to i)$.
4. G : $z \notin [a, a+iR]$; $\varphi(2i)=0$, $\varphi(z)=\dfrac{1}{z-i}+O(1)$ $(z\to i)$.

41.09. Ayant construit les champs vectoriels correspondants à l'aide du principe de symétrie, trouver les représentations conformes $\zeta=\varphi(z)$ du disque $|z|<1$ sur les domaines G ci-dessous, compte tenu des conditions supplémentaires indiquées:

1. G : $0<\operatorname{Im} z<\pi$; $\varphi\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=-\infty$, $\varphi\left(e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)=+\infty$, $\varphi(1)=0$.
2. G : $a<\operatorname{Re} z<a+\pi$; $\varphi(1)=a+i\infty$, $\varphi(i)=a-i\infty$, $\varphi(0)=0$.
3. G : $z \notin [a-R, a+R]$; $\varphi(z)=\dfrac{i}{z-\frac{1}{2}}+o(1)$ $\left(z\to\frac{1}{2}\right)$.
4. G : $z \notin [-i, i]$; $i\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\varphi(z)>0$.

41.10. Ayant construit les champs vectoriels correspondants à l'aide du principe de symétrie, trouver la forme générale de la représentation conforme $\zeta=\varphi(z)$ des domaines D donnés sur le disque unité, représentation qui transforme le point $z_0 \in D$ en le centre de ce disque.

1. D : $\operatorname{Re} z>0$.
2. D : $|z|<R$.
3. D : $\operatorname{Im} z>0$, $|z|<1$.
4. D : $0<\arg z<\dfrac{\pi}{n}$.

41.11. Ayant construit le champ vectoriel correspondant à l'aide du principe de symétrie, trouver la forme générale de la représentation conforme $\zeta = \varphi(z)$ du demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ sur tout le plan muni d'une coupure suivant le segment $[-1, 1]$, représentation qui transforme le point $z = i$ en le point $\zeta = \infty$.

* * *

Les différentes représentations conformes des domaines multiplement connexes sont aussi ramenées à la recherche des champs vectoriels à points singuliers donnés et à circulations données le long des courbes frontières intérieures.

41.12. Soit D un domaine doublement connexe ayant une courbe frontière extérieure Γ_0 et une courbe frontière intérieure Γ_1, et soit $\zeta = \varphi(z)$ une fonction quelconque qui réalise une représentation conforme de ce domaine sur une certaine couronne $R_1 < |\zeta| < R_2$. Montrer que la fonction $W(z) = i \ln \varphi(z)$ est le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par une circulation égale à 2π le long de la courbe frontière intérieure Γ_1.

41.13. Soit D un domaine doublement connexe ayant une courbe frontière extérieure Γ_0 et une courbe frontière intérieure Γ_1, et soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par une circulation égale à 2π le long de la courbe frontière intérieure Γ_1. Montrer que la fonction $\zeta = e^{-iW(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur une certaine couronne $R_1 < |\zeta| < R_2$.

41.14. Montrer que de l'unicité d'un champ vectoriel, engendré dans un domaine doublement connexe D par une circulation donnée le long d'une courbe frontière intérieure, il découle que la fonction qui réalise une représentation conforme de ce domaine sur la couronne $R_1 < |\zeta| < R_2$ est définie d'une façon unique si l'on donne le rayon intérieur de la couronne et l'image d'un point donné sur la courbe frontière intérieure.

Dans les problèmes qui suivent, nous allons considérer que le domaine p-connexe D est borné par une courbe frontière extérieure Γ_0 et par des courbes frontières intérieures $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$.

41.15. Soit $\zeta = \varphi(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme du domaine D sur le plan entier muni de coupures suivant p segments horizontaux et qui transforme un point $z_0 \in D$ en le point $\zeta = \infty$. Montrer que la fonction $\varphi(z)$ est le potentiel complexe du champ vectoriel engendré dans le domaine D par un dipôle situé au point z_0 et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures.

41.16. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par un dipôle situé en un point $z_0 \in D$ et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $\zeta = W(z)$ réalise une représentation conforme du domaine D sur tout le plan muni de coupures suivant p segments horizontaux en transformant le point z_0 en le point $\zeta = \infty$.

41.17. Montrer que l'unicité d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par des points singuliers donnés et par des circulations données le long des courbes frontières intérieures entraîne l'unicité de la représentation conforme du domaine D sur tout le plan muni de coupures suivant p segments horizontaux si l'on donne en plus un point z_0, qui est transformé en le point à l'infini, la partie principale du pôle en ce point et l'image d'un autre point du domaine D.

41.18. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par un tourbillon d'intensité 2π situé en un point $z_0 \in D$ et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $\zeta = e^{-iW(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur un certaine disque $|\zeta| < R$ muni de $p-1$ coupures suivant des arcs de circonférences concentriques et transforme le point z_0 en le point $\zeta = 0$ et la courbe frontière extérieure Γ_0 en la circonférence $|\zeta| = R$.

41.19. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine p-connexe D $(p \geq 2)$ par une circulation égale à 2π le long d'une courbe frontière intérieure Γ_1 et par des circulations nulles le long des autres courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $\zeta = e^{-iW(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur une certaine couronne $R_1 < |\zeta| < R_2$ muni de $p-2$ coupures suivant des arcs de circonférences concentriques et transforme la courbe frontière extérieure Γ_0 en la circonférence $|\zeta| = R_2$ et la courbe frontière intérieure Γ_1 en la circonférence $|\zeta| = R_1$.

41.20. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par deux sources situées aux points $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$ respectivement d'intensité 2π et -2π et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $\zeta = e^{W(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur tout le plan muni de p coupures suivant des segments des demi-droites sortant du point $\zeta = 0$ et transforme le point z_1 en le point $\zeta = 0$ et le point z_2 en le point $\zeta = \infty$.

41.21. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par deux tourbillons situés aux points $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$ respectivement d'intensité 2π et -2π et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $\zeta = e^{-iW(z)}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur tout le plan muni de p coupures suivant des arcs de circonférences de centre $\zeta = 0$ et transforme le point z_1 en le point $\zeta = 0$ et le point z_2 en le point $\zeta = \infty$.

41.22. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un champ vectoriel engendré dans le domaine D par deux tourbillons-sources situés aux points $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$ respectivement d'intensité 2π et -2π (ces valeurs se rapportent aussi bien aux tourbillons qu'aux sources) et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $\zeta = \exp \dfrac{W(z)}{1+i\alpha}$ réalise une représentation conforme du domaine D sur tout le plan des ζ muni de coupures suivant p arcs de spirales logarithmiques $|\zeta| = Ce^{\alpha \arg \zeta}$ et transforme le point z_1 en le point $\zeta = 0$ et le point z_2 en le point $\zeta = \infty$.

Jusqu'à présent nous n'avons pas touché la question concernant l'existence dans des domaines multiplement connexes des champs vectoriels engendrés par des points singuliers donnés et par des circulations données le long des courbes frontières intérieures. Cette question peut être ramenée à la question de résolubilité du problème de Dirichlet dans les domaines correspondants. Rappelons que l'on appelle *solution du problème de Dirichlet* dans un domaine D à une *fonction frontière* $f(\xi)$ donnée (c'est-à-dire à une fonction définie sur les courbes frontières du domaine D) une fonction $V(z)$ harmonique dans le domaine D, continue jusqu'à la frontière de ce domaine et coïncidant sur la frontière de ce domaine avec la fonction frontière $f(\xi)$.

Il est connu que *dans un domaine borné par un nombre fini de courbes lisses par morceaux, le problème de Dirichlet est résoluble pour toute fonction frontière continue et que la solution obtenue est unique.*

On sait en outre que, *si la fonction frontière vérifie la condition de Lipschitz d'ordre* α, $0<\alpha<1$, *alors la solution du problème de Dirichlet aussi bien que toute branche uniforme de la fonction harmonique conjuguée de cette solution* (qui, généralement parlant, est multiforme) *satisfait à la condition de Lipschitz du même ordre* α *en chaque partie simplement connexe de la fermeture du domaine* D.

41.23. Soit $V(z)$ la fonction de courant d'un champ vectoriel engendré dans un domaine D par un dipôle de moment $2\pi a$ situé en un point à distance finie $z_0 \in D$ et par des circulations nulles le long des courbes frontières intérieures. Montrer que la fonction $V(z) - \operatorname{Im} \frac{a}{z-z_0}$ est la solution du problème de Dirichlet dans le domaine D à fonction frontière $f(\xi) = C_k - \operatorname{Im} \frac{a}{\xi - z_0}$ ($\xi \in \partial D$), où C_k représente certaines constantes (chaque courbe frontière a sa constante).

41.24. Désignons par $V_1(z)$ la solution du problème de Dirichlet dans un domaine D à fonction frontière $f(\xi) = -\operatorname{Im} \frac{a}{z-z_0}$ ($\xi \in \partial D$, $z_0 \in D$, $z_0 \neq \infty$) et posons $w_1(z) = \frac{\partial V_1}{\partial y} - i \frac{\partial V_1}{\partial x}$. Montrer que le champ vectoriel $w(z) = w_1(z) - - a(\bar{z} - \bar{z}_0)^{-2}$ est engendré dans le domaine D par un dipôle de moment $2\pi a$ situé au point z_0 et par certaines circulations le long des courbes frontières intérieures.

41.25. Soit D un domaine p-connexe borné par une courbe frontière extérieure Γ_0 et par des courbes frontières intérieures $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$. Désignons par $V_k(z)$ la solution du problème de Dirichlet dans le domaine D à fonction frontière $f_k(\xi)$ égale à 1 sur la courbe frontière Γ_k et égale à 0 sur les autres courbes frontières, et posons $w_k(z) = \frac{\partial V_k}{\partial x} - i \frac{\partial V_k}{\partial y}$. Notons γ_{km} la circulation du champ vectoriel $w_k(z)$ le long de la courbe frontière intérieure Γ_m. Montrer que la matrice

$$(\gamma_{km}),\ k = 1, 2, \ldots, p-1\ ;\ m = 1, 2, \ldots, p-1,$$

a un déterminant différent de zéro.

Indication. Montrer que, dans le cas contraire, il existe un champ vectoriel sans points singuliers dans le domaine D à circulations nulles le long

de toutes les courbes frontières dont la fonction de courant reste constante sur chaque courbe frontière et qui n'est pas identiquement nul. L'existence d'un tel champ vectoriel contredit les assertions du problème 40.54.

41.26. En partant des problèmes 41.24 et 41.25, tirer la conclusion qu'un champ vectoriel, engendré dans un domaine D par un dipôle de n'importe quel moment situé en tout point $z_0 \in D$ et par n'importe quelles circulations données le long des courbes frontières intérieures, existe et qu'il est unique.

41.27. En partant du problème 41.26, déduire que l'on peut réaliser une représentation conforme de tout domaine D borné par un nombre fini de courbes lisses par morceaux sur tout le plan muni de coupures suivant des segments horizontaux.

41.28. Montrer qu'un champ vectoriel, engendré dans un domaine D par n'importe quel nombre de tourbillons (situés en n'importe quels points donnés du domaine D et d'intensités arbitraires données) et par n'importe quelles circulations données le long des courbes frontières intérieures, existe et qu'il est unique.

Indication. Effectuer la construction de la même façon qu'au problème 41.24, en prenant la fonction $f(\xi)$ égale à $-\sum \beta_k \ln |z-z_k|$, où z_k représente les points en lesquels sont donnés les tourbillons d'intensité β_k.

41.29. Montrer que, pour qu'un champ vectoriel engendré dans un domaine D par des points singuliers donnés et par des circulations données le long des courbes frontières intérieures existe, il faut et il suffit que la somme des intensités des sources suivant tous les points singuliers donnés soit nulle.

Indication. En effectuant la construction de la même façon qu'au problème 41.24, prendre en qualité de fonction frontière $f(\xi)$ la partie imaginaire du potentiel complexe du champ vectoriel construit d'après des points singuliers donnés dans tout le plan complexe. Pour réaliser une telle construction, cette partie imaginaire doit être uniforme en dehors du domaine D et sur sa frontière.

41.30. Soit D un domaine du plan complexe borné par un nombre fini de courbes lisses par morceaux. Montrer l'existence d'une représentation conforme du domaine D sur les domaines canoniques suivants :

1. Tout le plan muni de coupures suivant des segments des demi-droites sortant de l'origine des coordonnées.
2. Tout le plan muni de coupures suivant des arcs de circonférences centrées sur l'origine des coordonnées.
3. Le disque unité muni de coupures suivant des arcs de circonférences concentriques.
4. Le disque unité muni de coupures suivant des segments de rayons.
5. La couronne $1<|\zeta|<R$ munie de coupures suivant des segments de rayons.
6. La bande $0<\operatorname{Im} z<\pi$ munie de coupures suivant des segments horizontaux.
7. La bande $0<\operatorname{Im} z<\pi$ munie de coupures suivant des segments verticaux.
8. Le demi-plan $\operatorname{Im} z>0$ muni de coupures suivant des segments horizontaux.

RÉPONSES

41.08.

1. $\zeta = 2\ln\dfrac{z+1}{z-1} - \pi i.$ 2. $\zeta = \dfrac{(z-1)^2}{z^2+1}.$ 3. $\zeta = \dfrac{2iz}{z^2+1}.$ 4. $\zeta = \dfrac{2i}{z^2+1} + \dfrac{2i}{3}.$

41.09.

1. $\zeta = \ln\dfrac{e^{\pi i/4} - z}{ze^{\pi i/4} - 1}.$ 2. $\zeta = i\ln\dfrac{1-z}{1+iz}.$

3. $\zeta = \dfrac{4i}{3}\cdot\dfrac{5z^2-5z-1}{(2z-1)(z-2)}.$ 4. $\zeta = \dfrac{i(z^2+1)}{2(2z-1)(z-2)}.$

41.10.

1. $\zeta = A\cdot\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, $\operatorname{Im} A = 0.$ 2. $\zeta = \mathrm{R}e^{i\tau}\cdot\dfrac{z-z_0}{R^2 - z\bar{z}_0}$, $\operatorname{Im}\tau = 0.$

3. $\zeta = e^{i\tau}\cdot\dfrac{(z-z_0)(1-z\bar{z}_0)}{(z-\bar{z}_0)(1-zz_0)}$, $\operatorname{Im}\tau = 0.$ 4. $\zeta = e^{i\tau}\cdot\dfrac{z^n - z_0^n}{z^n - \bar{z}_0^n}$, $\operatorname{Im}\tau = 0.$

41.11.

$\zeta = \dfrac{2\sqrt{1+\lambda^3}}{1+2\lambda^2}\cdot\dfrac{z+\lambda}{z^2+1} - \dfrac{\lambda^3}{(1+2\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\operatorname{Im}\lambda = 0.$

§ 42. Certains problèmes liés à l'écoulement autour des solides

En hydrodynamique, l'écoulement d'un fluide est caractérisé par trois grandeurs : la densité ϱ, la pression p et la vitesse w qui, dans le cas plan, possède deux composantes u et v. Pour un fluide parfait incompressible, la densité est constante et on la prend d'habitude égale à l'unité. Les composantes u et v de la vitesse w et la pression p sont liées entre elles par les équations ci-dessous :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(équation de continuité)}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(équations d'Euler).}$$

Jusqu'au moment où ce n'est que la vitesse d'écoulement qui nous intéresse, le problème d'hydrodynamique est équivalent à un problème de théorie du champ vectoriel, ce qui signifie que l'on peut passer en toute liberté d'un système de coordonnées à un autre en utilisant l'invariance de la grandeur $\overline{w(z)}\,dz$ par rapport aux représentations conformes. Par contre, la pression n'est pas une grandeur invariante par rapport aux représentations conformes, et c'est pour cela que toutes les opérations où elle figure doivent être effectuées en utilisant le système de coordonnées du problème initial. Dans ce paragraphe, nous aurons affaire à des problèmes d'hydrodynamique qui, de telle ou telle façon, tiennent compte de la pression.

Un des plus simples problèmes d'hydrodynamique concerne l'écoulement autour d'un solide immobilisé de dimensions finies (dans le plan) à frontière parfaitement lisse (au sens physique du mot) lorsque la vitesse du

flux à l'infini est donnée et égale à w_∞. Certaines simplifications permettent de considérer le champ vectoriel des vitesses d'un écoulement stationnaire comme un champ vectoriel localement à potentiel complexe (bien que les équations mentionnées plus haut montrent que ce champ n'est que localement solénoïdal). On voit facilement que les conditions admises ne sont pas suffisantes pour obtenir la solution du problème, car le champ vectoriel des vitesses, pour une valeur de w_∞ donnée, peut avoir à l'infini non seulement un dipôle mais aussi un tourbillon dont l'intensité doit être donnée en plus. (En hydrodynamique, on ne parle pas d'habitude de tourbillon à l'infini, mais de circulation du champ des vitesses le long de la frontière du corps investi.)

Dans les problèmes immédiatement suivants, nous allons considérer que le corps investi par un fluide en mouvement occupe un domaine fini D du plan complexe, tandis que l'écoulement du fluide sera cherché dans le domaine infini extérieur au domaine D. Avec cela, le domaine D peut dégénérer en tel ou tel ensemble fermé sans points intérieurs (par exemple, l'écoulement autour d'une plaque infiniment mince). D'après le sens physique, la frontière du domaine D doit être constituée par des lignes de courant frontières du champ vectoriel des vitesses.

42.01. Soit $W(z)$ le potentiel complexe du champ des vitesses d'un écoulement autour d'un domaine D, et soit $p(z)$ la pression au point z. Démontrer la formule de Bernoulli

$$p(z)+|W'(z)|^2=\text{const} \quad (z\notin D).$$

Indication. Utiliser les équations citées plus haut en leur ajoutant l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

qui découle de l'éxistence du potentiel complexe du champ des vitesses.

42.02. Trouver le potentiel complexe du champ des vitesses d'un écoulement autour du disque $|z|<1$ de vitesse à l'infini $w_\infty=Ve^{i\tau}$ et de circulation le long de la circonférence $|z|=1$ égale à $2\pi\beta$.

42.03. Représenter graphiquement le tableau qualitatif des lignes de courant de l'écoulement donné au problème précédent pour $0\leq\beta<2$ et pour $\beta>2$.

42.04. Pour l'écoulement du problème 42.02, calculer la pression $p(z)$ en chaque point de la circonférence $|z|=1$ et trouver son maximum et son minimum.

42.05. Soit $\zeta=\varphi(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme de l'extérieur d'un domaine D sur l'extérieur du disque unité et qui vérifie les conditions $\varphi(\infty)=\infty$, $\varphi'(\infty)>0$. Montrer que le potentiel complexe $W(z)$ d'un écoulement autour du domaine D de vitesse à l'infini $w_\infty=Ve^{i\tau}$ et de circulation $2\pi\beta$ le long de la frontière du domaine D peut être présenté sous la forme

$$W(z)=\frac{V}{\varphi'(\infty)}\left[e^{-i\tau}\varphi(z)+\frac{e^{i\tau}}{\varphi(z)}\right]+i\beta\ln\varphi(z)+C.$$

En hydrodynamique, il arrive souvent d'opérer avec la force P_D qui représente la pression exercée par le fluide en mouvement sur le corps investi. Cette force est trouvée comme la résultante de toutes les forces de pression élémentaires agissant sur le corps investi par le fluide en mouvement. Chaque force élémentaire est dirigée vers l'intérieur du corps suivant la normale à sa surface et sa valeur absolue est égale au produit de l'aire d'un élément de surface du corps par la valeur de la pression $p(z)$ exercée au centre de cet élément de surface. Dans le cas plan, la formule de la force de pression P_D prend la forme

$$P_D = i \int_{\partial D} p(z)\, dz.$$

On voit aisément que la force P_D n'est pas invariante par rapport aux représentations conformes. Pourtant, elle peut être exprimée d'une façon assez simple par w_∞ et la valeur de la circulation le long de la frontière du domaine D.

42.06. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un écoulement autour d'un domaine D. Démontrer la formule

$$P_D = -i \int_{\partial D} |W'(z)|^2\, dz.$$

42.07. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un écoulement autour d'un domaine D de vitesse à l'infini $w_\infty = Ve^{i\tau}$ et de circulation le long de la frontière du domaine D égale à $2\pi\beta$. Démontrer la formule

$$P_D = -i \int_{|\zeta|=1} \left| \psi'(\infty) V \cdot \left(e^{-i\tau} - \frac{e^{i\tau}}{\zeta^2} \right) + \frac{i\beta}{\zeta} \right|^2 \frac{d\zeta}{\psi'(\zeta)},$$

où $z = \psi(\zeta)$ est une fonction qui réalise une représentation conforme du domaine $|\zeta| > 1$ sur l'extérieur du domaine D et vérifie les conditions $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) > 0$.

Indication. Voir le problème 42.05.

42.08. Transformer la formule du problème suivant et la ramener à la forme

$$P_D = -4\pi i \beta w_\infty \psi'(\infty).$$

Indication. Dans la formule du problème 42.07, passer aux nombres conjugués et utiliser le fait que sur la circonférence $|\zeta| = 1$ l'égalité $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ a lieu.

Près d'un corps investi par un fluide en mouvement, on peut observer deux tableaux des lignes de courant entre lesquels il y a une différence de principe : ou bien au voisinage du corps il y a des lignes de courant fermées qui l'entourent, ou bien une partie des lignes de courant passe d'un côté du corps, tandis que l'autre partie passe de l'autre côté. Dans ce dernier cas, il y a une ligne de courant qui, en tombant sur le corps, se décompose en deux branches contournant le corps chacune de son côté pour s'unir ensuite à nouveau en une seule ligne de courant. Le point de la frontière

du corps investi en lequel une ligne de courant se décompose en deux branches est appelé *point de ramification*, le point en lequel ces deux branches s'unissent à nouveau étant appelé *point de fuite*.

42.09. Soit $\zeta = \varphi(z)$ une fonction qui réalise une représentation conforme de l'extérieur d'un domaine D sur l'extérieur du disque unité et qui vérifie les conditions $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$. Montrer qu'un écoulement autour du domaine D présente un point de ramification et un point de fuite si, et seulement si, la vitesse à l'infini w_∞ et la valeur $2\pi\beta$ de la circulation le long de la frontière du domaine D sont liées par l'inégalité $|\beta|\varphi'(\infty) \leq 2|w_\infty|$.

42.10. Les conditions du problème 42.09 restant les mêmes, montrer que le point de ramification z_1 et le point de fuite z_2 vérifient les équations

$$\varphi(z_1) = -e^{i(\tau+\theta)}, \quad \varphi(z_2) = e^{i(\tau-\theta)},$$

où

$$\tau = \arg w_\infty, \quad \theta = -\arcsin \frac{\beta \cdot \varphi'(\infty)}{2|w_\infty|}.$$

42.11. Trouver le point de ramification z_1 et le point de fuite z_2 pour un écoulement autour des domaines D ci-dessous de vitesse à l'infini $w_\infty = e^{i\tau}$ et de circulation égale à $2\pi\beta$ le long de la frontière de chacun de ces domaines :

1. Domaine D: domaine dégénéré en le segment $[-1, 1]$ (écoulement autour d'une plaque).

2. Domaine D: l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \quad a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R^2}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right), \quad R > 1.$$

Pour un fluide parfait, il est possible en principe de réaliser des écoulements de n'importe quelle valeur de la circulation le long de la frontière du corps investi. Pourtant, pour un fluide réel, la viscosité est différente de zéro même si sa valeur est infime. Cela fait que, lors du mouvement d'un fluide autour d'un corps, il s'établit un écoulement jouissant d'une des plus préférables circulations. Ces circulations préférables sont relativement bien mises en évidence lorsque le corps investi présente des pointes. Dans ce cas, les circulations préférables sont celles pour lesquelles le point de fuite coïncide avec une pointe. Cette régle est appelée *postulat de Joukovski-Tchaplyguine*.

42.12. Pour un écoulement de vitesse à l'infini $w_\infty = e^{i\tau}$, $-\frac{\pi}{4} < \tau < \frac{\pi}{4}$, autour des domaines D indiqués, trouver la circulation préférable $2\pi\beta$ et la force de pression P_D sur le corps investi (par un fluide en mouvement dont la circulation est préférable).

1. Domaine D : domaine dégénéré en le segment $(-1, 1)$.

2. Domaine D : domaine dégénéré en l'arc de circonférence $|z + i \operatorname{ctg} \alpha| = \frac{1}{\sin \alpha}$ situé au-dessus de l'axe réel $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Domaine D : $|z + i \operatorname{ctg} \alpha| < \frac{1}{\sin \alpha}$,

$$|z - i \operatorname{ctg} \alpha| < \frac{1}{\sin \alpha} \left(0 < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Domaine D : $|z+i\operatorname{ctg}\alpha|<\frac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{Im} z>0\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Domaine D : $|z+i\operatorname{ctg}2\alpha|<\frac{1}{\sin 2\alpha}$, $|z+i\operatorname{ctg}\alpha|>\frac{1}{\sin\alpha}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$.

42.13. On appelle profil de Joukovski l'image de la circonférence

$$|\zeta-\zeta_0|=R,\quad \zeta_0=1-Re^{i\alpha},\quad R>1,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{4},$$

par l'application $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$. Trouver la circulation préférable $2\pi\beta$ et la force de pression P_D sur le corps investi (par un fluide en mouvement dont la circulation est préférable) pour un écoulement autour du profil de Joukovski de vitesse à l'infini $w_\infty=Ve^{i\tau}$, $-\frac{\pi}{4}<\tau<\frac{\pi}{4}$.

Outre l'écoulement autour des solides exposé plus haut, on arrive à examiner des problèmes d'écoulement le long des parois et dans des canaux. Les frontières des parois et des canaux sont le plus souvent considérées rectilignes, et, de cette façon, les applications nécessaires à la recherche des écoulements peuvent être obtenues à l'aide des intégrales de Christoffel-Schwarz. Mais le plus souvent on utilise la méthode basée sur l'utilisation de l'application réalisée par la fonction $\overline{w(z)}$ (voir les problèmes 37.33 à 37.42). Bien que cette méthode soit moins générale, elle permet souvent d'obtenir des résultats plus économiques. L'essence de cette méthode est exposé dans les problèmes qui suivent.

42.14. Soit $w(z)$ le champ vectoriel des vitesses d'un écoulement dans un domaine D borné par des lignes polygonales (on considère que le champ vectoriel ne peut avoir des singularités qu'à l'infini). Montrer que dans les angles du domaine D dont l'ouverture est inférieure à π, la vitesse $w(z)$ est nulle, tandis que dans les angles d'ouverture supérieure à π elle devient infinie.

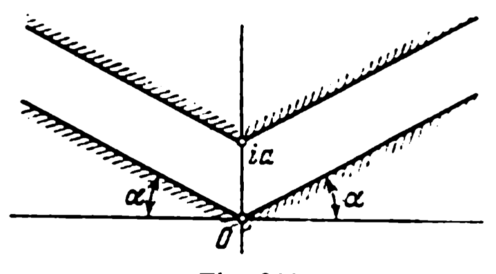


Fig. 311

42.15. Soit $W(z)$ le potentiel complexe d'un écoulement dans le canal représenté sur la fig. 311 dont la vitesse à l'infini (à l'extrémité gauche du canal) est $e^{-i\alpha}$. Pour plus de précision, nous allons considérer le potentiel complexe $W(z)$ normé par la condition $W(0)=0$. Montrer que la fonction $\zeta=W(z)$ établit une représentation conforme du canal sur la bande $0<\operatorname{Im}\zeta<a\cos\alpha$, l'extrémité gauche du canal étant transformée en le point $\zeta=-\infty$, l'extrémité de droite, en le point $\zeta=+\infty$.

Indication. Le champ vectoriel des vitesses de l'écoulement dans le canal est engendré par deux sources frontières d'intensités de signes opposés situées aux extrémités de ce canal. Trouver les intensités de ces sources et utiliser le résultat du problème 41.04.

42.16. Les conditions du problème 42.15 restant les mêmes, montrer que pour $z \to -\infty$, à l'extrémité gauche du canal $W'(z) \to e^{i\alpha}$, et pour $z \to \infty$, à l'extrémité de droite du canal $W'(z) \to e^{-i\alpha}$.

42.17. Supposons satisfaites les conditions du problème 42.15. Montrer que:

1. Lorsque le point z se déplace suivant le côté gauche inférieur du canal de $z=0$ à $z=\infty$, le point $w=W'(z)$ se déplace le long de la demi-droite $\arg w = \alpha$ de $w=0$ à $w=e^{i\alpha}$ (il se peut que ce déplacement ne soit pas monotone).

2. Lorsque le point z se déplace suivant le côté gauche supérieur du canal de $z=ia$ à $z=\infty$, le point $w=W'(z)$ se déplace le long de la demi-droite $\arg w=\alpha$ de $w=\infty$ à $w=e^{i\alpha}$ (il se peut que ce déplacement ne soit pas monotone).

42.18. Les conditions du problème 42.15 restant les mêmes, montrer que l'hypothèse concernant la monotonie de la fonction $|W'(z)|$, lors du déplacement du point z le long des côtés rectilignes du canal, entraîne le fait que la fonction $w=W'(z)$ établit une représentation conforme du canal sur l'angle $|\arg w|<\alpha$, et que

$$W'(0), \qquad W'(+\infty e^{i\alpha})=e^{-i\alpha}, \qquad W'(ia)=\infty, \qquad W'(+\infty e^{-i\alpha})=e^{i\alpha}.$$

42.19. Désignons par $z=\Phi(\zeta)$ la fonction inverse de la fonction $\zeta=W(z)$. Montrer que, si les hypothèses du problème 42.18 sont respectées, la fonction $s=\Phi'(\zeta)$ établit une représentation conforme de la bande $0<\operatorname{Im}\zeta<a\cos\alpha$ sur l'angle $|\arg s|<\alpha$, et que

$$\Phi'(-\infty)=e^{-i\alpha}, \qquad \Phi'(0)=\infty, \qquad \Phi'(+\infty)=e^{i\alpha}, \qquad \Phi'(ia\cos\alpha)=0.$$

Indication. Utiliser la formule $\Phi'(\zeta)=\dfrac{1}{W'(\Phi(\zeta))}$.

42.20. Soit $\Phi(\zeta)$ la fonction inverse du potentiel complexe du problème 42.15. Montrer que

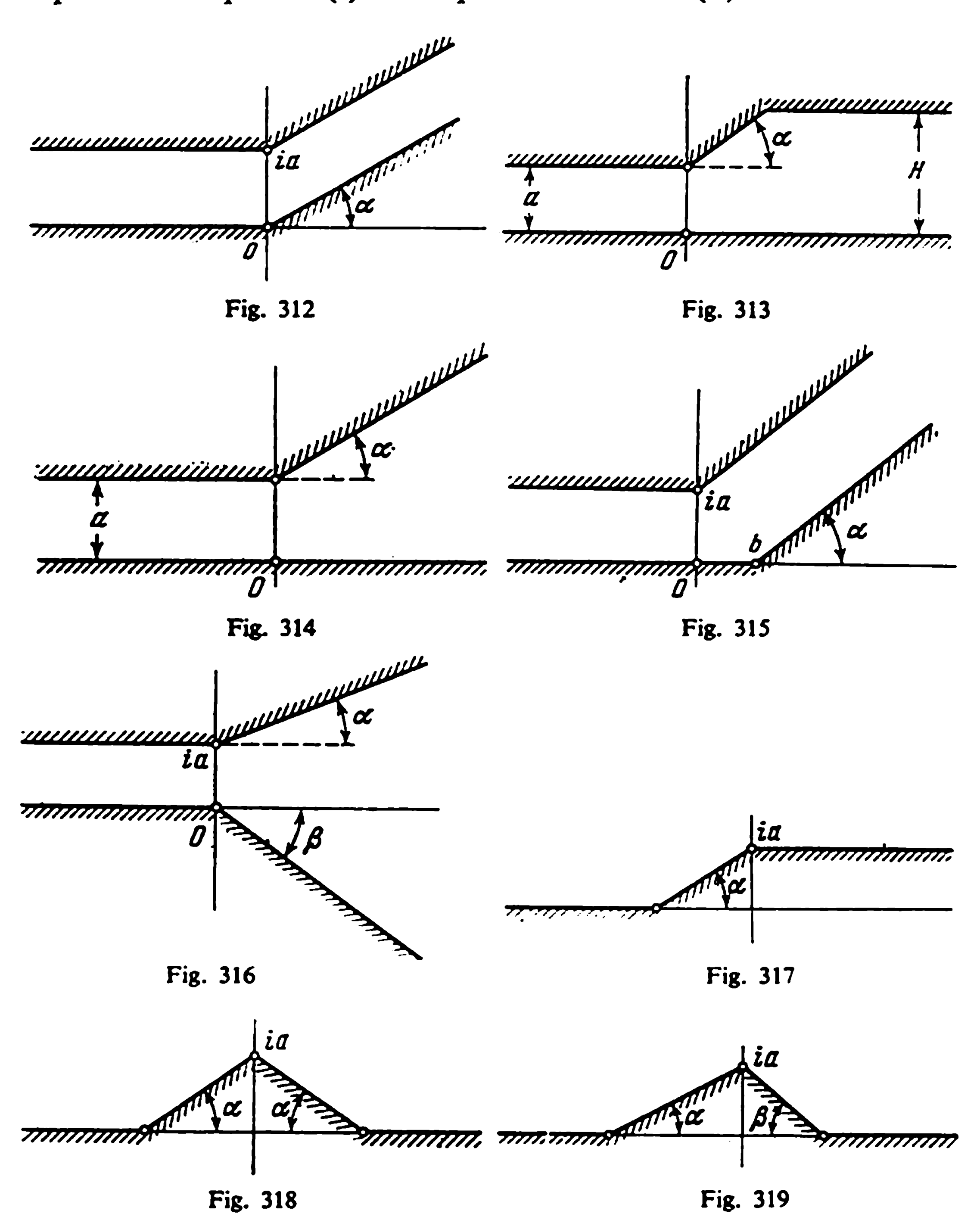
$$\Phi(\zeta)=\int_0^{\zeta}\left\{i\,\frac{\exp\left(\dfrac{\pi t}{a\cos\alpha}\right)+1}{\exp\left(\dfrac{\pi t}{a\cos\alpha}\right)-1}\right\}^{2\alpha/\pi} dt.$$

Indication. Se convaincre que, pour le potentiel complexe écrit, l'hypothèse concernant la monotonie de la fonction $|W'(z)|$ sur les côtés rectilignes du canal reste vraie.

42.21. Pour les canaux représentés sur les fig. 312 à 315, trouver la fonction $\Phi(\zeta)$ inverse du potentiel complexe $W(z)$ correspondant à un écoulement dans le canal dirigé de l'extrémité gauche à l'extrémité de droite, écoulement dont le module de vitesse à l'infini à l'extrémité gauche est égal à l'unité. Pour plus de précision, considérer le potentiel $W(z)$ normé par la condition $W(ia)=0$.

42.22. Trouver la fonction $\Phi(\zeta)$ inverse du potentiel complexe $W(z)$ d'un écoulement dans le canal représenté sur la fig. 316 dont la vitesse à l'infini à l'extrémité gauche du canal est égale à 1. Pour plus de précision, considérer le potentiel complexe $W(z)$ normé par la condition $W(0)=0$.

42.23. Trouver les fonctions $\Phi(\zeta)$ inverses des potentiels complexes $W(z)$ des écoulements le long des parois représentées sur les fig. 317 et 318 dont la vitesse à l'infini est égale à l'unité. Pour plus de précision, considérer le potentiel complexe $W(z)$ normé par la condition $W(ia)=0$.



42.24. Trouver la fonction $\Phi(\zeta)$ inverse du potentiel complexe $W(z)$ d'un écoulement le long de la paroi représentée sur la fig. 319 dont la vitesse à l'infini est égale à l'unité. Considérer le potentiel complexe $W(z)$ normé par la condition $W(ia)=0$.

Lorsque la frontière du domaine d'écoulement présente des détours trop brusques, il se produit d'habitude un phénomène appelé *décollement du filet*. Cela signifie que l'écoulement se décompose en deux parties : dans l'une de ces parties le fluide se déplace, tandis que dans l'autre il reste immobile. Pour rechercher la frontière de ces parties, appelée *ligne de séparation*, on utilise les deux conditions d'équilibre données ci-dessous :

1. La ligne de séparation doit être une ligne de courant.
2. La pression de deux côtés de la ligne de séparation doit être la même.

Etant donné que dans un fluide au repos la pression est constante, de la formule de Bernoulli (voir le problème 42.01) il découle que le *module de vitesse reste constant sur la ligne de séparation.*

Pour résoudre les problèmes concernant les écoulements à décollement du filet, on fait appel à la même méthode basée sur l'étude des applications réalisées par la fonction $W'(z)$, où $W(z)$ est le potentiel complexe cherché.

42.25. Examinons l'écoulement engendré dans le plan des z muni de coupures verticales suivant $[ia, +i\infty]$ et $[-i\infty, -ia]$, $a>0$, par une source d'intensité πV, $V>0$, située au point $z=-\infty$ et par une source d'intensité $-\pi V$ située au point $z=+\infty$, en supposant qu'aux points $z=ia$ et $z=-ia$ il se produit un décollement du filet de vitesse de module V_0. Notons $W(z)$ le potentiel complexe de l'écoulement dans le domaine D où le fluide se déplace, et $\Phi(\zeta)$ la fonction inverse de la fonction $W(z)$. Montrer que :

1. La fonction $\zeta = W(z)$ réalise une représentation conforme du domaine D sur une bande de largeur πV dont les côtés sont parallèles à l'axe réel, et que le point $z=-\infty$ est transformé en le point $\zeta=-\infty$, tandis que le point $z=+\infty$ est transformé en le point $\zeta=+\infty$.

2. La fonction $w=W'(z)$ réalise une représentation du domaine D sur le demi-disque $|w|<V_0$, $\operatorname{Re} w>0$, et $W'(-\infty)=0$, $W'(ia)=iV_0$, $W'(-ia)=$ $=-iV_0$, $W'(+\infty)=V_0$.

42.26. Montrer que l'écoulement décrit dans le problème précédent n'est possible que si la relation $2aV_0=(\pi-2)V$ a lieu.

42.27. Montrer que la fonction $\Phi(\zeta)$ correspondant à l'écoulement décrit dans le problème 42.25 a pour expression la formule

$$\Phi(\zeta+C)=\frac{V}{V_0}\left\{-e^{-\zeta/V}-\sqrt{1+e^{-2\zeta/V}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{-2\zeta/V}}+1}{\sqrt{1+e^{-2\zeta/V}}-1}\right\}$$

(C est une constante arbitraire).

42.28. Supposons qu'un écoulement soit engendré dans l'angle $0<$ $<\arg z<\pi\alpha$, $0<\alpha<1$, par un certain dipôle frontière situé à l'infini (la vitesse est dirigée suivant la demi-droite $\arg z=\alpha$ de $z=\infty$ vers $z=0$), et qu'en un point donné $z=ae^{i\alpha}$ il se produise un décollement du filet avec une vitesse de module V_0. Désignons par $W(z)$ le potentiel complexe de l'écoulement dans le domaine où le fluide se déplace, et par $\Phi(\zeta)$ la fonction inverse de ce potentiel. Trouver la fonction $\Phi(\zeta)$ et la formule asymptotique du potentiel complexe $W(z)$ à l'infini.

42.29. Supposons que l'écoulement dans les domaines représentés sur les fig. 320 et 321 soit engendré par une source frontière d'intensité πV, $V>0$, située au point $z=-\infty$ et par une source frontière d'intensité $-\pi V$

située au point $z = +\infty$, et qu'aux points $z = ih$ et $z = -ih$ il se produise un décollement du filet avec une vitesse de module V_0. Désignons par $W(z)$ le potentiel complexe de l'écoulement dans le domaine, où le fluide se déplace, et par $\Phi(\zeta)$ la fonction inverse de ce potentiel. Trouver les relations, assurant l'existence de tels écoulements, et les formules donnant $\Phi'(\zeta)$.

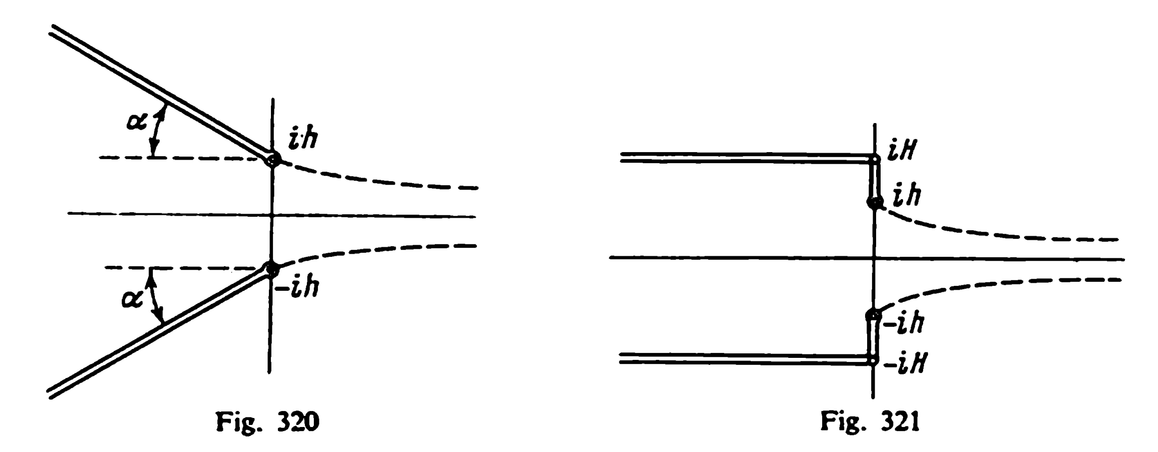


Fig. 320

Fig. 321

Les problèmes concernant l'écoulement autour des solides avec décollement du filet sont toujours plus compliqués que les problèmes qui ne tiennent pas compte de ce phénomène. Dans certains cas, lorsqu'on prend en considération le décollement du filet d'un écoulement dans un domaine simplement connexe, on peut aboutir à des applications des domaines multiplement connexes. Ci-dessous est donné un des plus simples problèmes de ce genre.

42.30. Examinons un écoulement engendré dans un domaine fini simplement connexe G par un tourbillon d'intensité $-2\pi\beta$ situé au point $z_0 \in G$, et supposons qu'au voisinage du tourbillon il se produise un décollement du filet avec une vitesse de module V_0. Désignons par l la courbe qui sépare le fluide en mouvement du fluide au repos, et par D le domaine doublement connexe où le fluide se déplace. Notons $W(z)$ le potentiel complexe de l'écoulement dans le domaine D, et $\Phi(\zeta)$ la fonction inverse de la fonction $W(z)$. Notons encore α_1 la valeur de $\operatorname{Im} W(z)$ sur la courbe l, et α_2 la valeur de $\operatorname{Im} W(z)$ sur ∂G.

Montrer que :

1. La fonction $\Phi(\zeta)$ est définie et régulière dans la bande horizontale $\alpha_1 < \operatorname{Im} \zeta < \alpha_2$ (si $\beta < 0$, alors $\alpha_2 < \alpha_1$ et les inégalités changent de sens), et, d'autre part, elle est une fonction périodique de période $2\pi\beta$.

2. La fonction

$$s = \exp \{iW(z)/\beta\}$$

réalise une représentation conforme du domaine D sur la couronne $e^{-\alpha_2/\beta} < |s| < e^{-\alpha_1/\beta}$.

42.31. Tout en conservant les notations du problème 42.30, supposons que le domaine G soit le carré $|\operatorname{Re} z| < 1$, $|\operatorname{Im} z| < 1$, et que le point z_0 soit son centre. Notons $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ et normons le potentiel complexe $W(z)$ par la condition $\Phi(i\alpha + \pi\beta/2) = 1 + i$ (étant donné que le potentiel complexe est

lui-même multiforme, tandis que la fonction inverse de ce potentiel est uniforme, il est plus commode de le normer par la fonction inverse).

Montrer que la fonction

$$\xi(\zeta) = -i \ln \frac{W'(\Phi(\zeta))}{V_0} = i \ln V_0 \Phi'(\zeta)$$

réalise une représentation conforme de la bande $0 < \operatorname{Im} \zeta < \alpha$ (on considère $\beta > 0$) sur le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} \zeta > 0$ comportant des coupures suivant des demi-droites verticales sortant des points $\xi_k = ic + \pi k/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, et avec cela

$$\xi(-\infty) = -\infty, \quad \xi(+\infty) = +\infty,$$

$$\xi\left(i\alpha + \frac{\pi k \beta}{2}\right) = i\infty$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(c est une certaine constante qui doit être trouvée).

42.32. Montrer que, pour la fonction $\zeta = F(\xi)$ inverse de la fonction $\xi = \xi(\zeta)$ du problème 42.31, la formule ci-dessous est valable

$$F(\xi) = \int_0^{\cos 2\xi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

où la constante k, $0 < k < 1$, est liée à la constante c du problème 42.31 par la relation $k \operatorname{ch} 2c = 1$, et aux constantes α et β par les relations

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi \lambda \beta}{4}, \quad \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \lambda \alpha$$

(λ est une certaine constante positive).

42.33. Montrer que la fonction $\Phi(\zeta)$ inverse du potentiel complexe $W(z)$ de l'écoulement du problème 42.31 peut s'écrire sous la forme

$$\Phi(\zeta) = 1 + \frac{1}{V_0} \int_{i\alpha}^{\zeta} \sqrt{\operatorname{sn} \lambda\left(t - \frac{\pi\beta}{4}\right) + i \operatorname{cn} \lambda\left(t - \frac{\pi\beta}{4}\right)}\, dt,$$

où $\operatorname{sn} w = \operatorname{sn}(w\,;k)$ et $\operatorname{cn} w = \operatorname{cn}(w\,;k)$ sont les fonctions elliptiques de Jacobi (sinus-amplitude et cosinus-amplitude) définies par les égalités

$$w = \int_0^{\operatorname{sn} w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \operatorname{cn} w = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 w}.$$

La constante k figurant dans la détermination des fonctions $\operatorname{sn} w$ et $\operatorname{cn} w$ est liée aux constantes α et β par les formules données au problème 42.32.

42.34. Supposons que l'écoulement décrit au problème 42.31 corresponde aux valeurs données $\beta > 0$ et V_0. Elucider le comportement asymptotique de la fonction $\Phi(\zeta)$ et du nombre α pour $V_0 \to \infty$.

42.35. Tout en conservant les notations du problème 42.30, supposons que le domaine G soit un n-gone régulier ayant pour sommets les points $e^{2k\pi i/n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, le point z_0 étant son centre. Trouver les relations qui doivent exister entre les grandeurs α, β et V_0 pour que l'écoulement à décollement du filet décrit au problème susmentionné existe.

RÉPONSES

42.02. $W=z+\dfrac{1}{z}+i\beta\ln z+C.$

42.03. Voir fig. 204 et 205.

42.04.

$$p(e^{i\varphi})=p_0-|\beta+2\sin\varphi|^2\ ;$$
$$p_{\min}=p_0-(|\beta|+2)^2\ ;$$
$$p_{\max}=\begin{cases}p_0-(|\beta|-2)^2 & (|\beta|<2),\\ p_0 & (|\beta|>2).\end{cases}$$

42.11.

1. $z_1=-\dfrac{1}{V}\left(\sqrt{V^2-\beta^2}\cos\tau+\beta\sin\tau\right)\ ;$

$z_2=\dfrac{1}{V}\left(\sqrt{V^2-\beta^2}\cos\tau-\beta\sin\tau\right).$

2. $z_1=-\dfrac{R^2+1}{R^2V}\left(\sqrt{R^2V^2-\beta^2}\cos\tau+\beta\sin\tau\right)+\dfrac{R^2-1}{R^2V}\left(\sqrt{R^2V^2-\beta^2}\sin\tau-\beta\cos\tau\right);$

$z_2=\dfrac{R^2+1}{R^2V}\left(\sqrt{R^2V^2-\beta^2}\cos\tau-\beta\sin\tau\right)-\dfrac{R^2-1}{R^2V}\left(\sqrt{R^2V^2-\beta^2}\sin\tau+\beta\cos\tau\right).$

42.12.

1. $\beta=-\sin\tau\ ;\quad P_D=2\pi ie^{i\tau}\sin\tau.$

2. $\beta=-\dfrac{\sin\left(\tau+\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)},\quad P_D=2\pi ie^{i\tau}\cdot\dfrac{\sin\left(\tau+\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}.$

3. $\beta=-\dfrac{\pi\sin\tau}{\pi-\alpha},\quad P_D=ie^{i\tau}\dfrac{2\pi^2}{\pi-\alpha}\sin\tau.$

4. $\beta=-\dfrac{4\pi\cos\left(\tau-\dfrac{2\pi^2}{3\pi+2\alpha}\right)}{(3\pi+2\alpha)\sin\dfrac{2\pi^2}{3\pi+2\alpha}},\quad P_D=ie^{i\tau}\cdot\dfrac{64\pi^3\cos\left(\tau-\dfrac{2\pi^2}{3\pi+2\alpha}\right)}{(3\pi+2\alpha)^2\sin^2\dfrac{2\pi^2}{3\pi+2\alpha}}.$

5. $\beta=-\dfrac{2\pi}{2\pi-\alpha}\;\dfrac{\cos\left[\tau-\dfrac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}\right]}{\sin\dfrac{\pi(\pi-4\alpha)}{2(2\pi-\alpha)}},\quad P_D=ie^{i\tau}\cdot\dfrac{16\pi^3\cos\left[\tau-\dfrac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}\right]}{(2\pi-\alpha)^2\sin\dfrac{\pi(\pi+4\alpha)}{2(\pi-2\alpha)}}.$

42.13. $\beta=RV\sin(\alpha-\tau),\quad P_D=ie^{i\tau}\cdot 2\pi R^2V\sin(\tau-\alpha).$

42.21.

1. $\Phi(\zeta) = ia + \int_0^\zeta \left(\frac{e^{\pi t/a} - 1}{e^{\pi t/a} + 1}\right)^{\alpha/\pi} dt.$

2. $\Phi(\zeta) = ia + \int_0^\zeta \left\{\frac{He^{\pi t/a} + a}{a(e^{\pi t/a} + 1)}\right\}^{\alpha/\pi} dt.$

3. $\Phi(\zeta) = ia + \int_0^\zeta (e^{\pi t/a} + 1)^{\alpha/\pi} dt.$

4. $\Phi(\zeta) = ia + \int_0^\zeta \left\{\frac{1 - (a \cos \alpha + b \sin \alpha)^{\pi/\alpha} e^{\pi t/a}}{1 + e^{\pi t/a}}\right\} dt.$

42.22.

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\zeta (1 - e^{\pi t/a})^{\beta/\pi} (1 + e^{\pi(t-\lambda)/a})^{\alpha/\pi} dt,$$

où λ est un nombre réel déterminé par la condition $\Phi(\lambda + ai) = ai$.

42.23.

1. $\Phi(\zeta) = ai + \int_0^\zeta \left(\frac{t}{t+\lambda}\right)^{\alpha/\pi} dt, \quad \lambda = a\,\frac{\sin \alpha}{\alpha},$

2. $\Phi(\zeta) = ai + \int_0^\zeta \left(t^2 - \frac{a^2}{\pi^2} \sin^2 \alpha\right)^{-\alpha/\pi} t^{2\alpha/\pi} dt.$

42.24.

$$\Phi(\zeta) = ai + \int_0^\zeta (t + \lambda)^{-\alpha/\pi} (t - \mu)^{-\beta/\pi} t^{(\alpha+\beta)/\pi} dt,$$

où λ et μ sont des nombres positifs déterminés à partir des équations :

$$\int_0^\lambda (\lambda - t)^{-\alpha/\pi} (\mu + t)^{-\beta/\pi} t^{(\alpha+\beta)/\pi} dt = a,$$

$$\int_0^\mu (\lambda + t)^{-\alpha/\pi} (\mu - t)^{-\beta/\pi} t^{(\alpha+\beta)/\pi} dt = a.$$

42.28.

$$\Phi(\zeta + C) = \frac{1}{aV_0}\left(\lambda\zeta + (1-\alpha)\left(\sqrt{\lambda^2\zeta^2 - 1}\right)\left(\lambda\zeta + \sqrt{\lambda^2\zeta^2 - 1}\right)^{\alpha-1}\right),$$

où $\lambda = \frac{a}{\alpha(2-\alpha)}$, C étant une constante arbitraire;

$$W(z) \sim \frac{\alpha(2-\alpha)}{a} (aV_0 z)^{1/\alpha} \quad (z \to \infty).$$

42.29.

1. $h=\frac{V}{V_0}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\sin\frac{\alpha x}{\pi}\operatorname{ctg}x\,dx\right)$; $\quad \Phi(\zeta-C)=\frac{V}{V_0}\int_0^{\zeta/V}(e^t+\sqrt{1+e^{2t}})^{\alpha/\pi}\,dt.$

2. $h=\frac{V}{V_0}\left(\frac{\pi}{2}-\int_1^{\sqrt{A^2+1}}\frac{A+\sqrt{A^2+1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$; $\quad \Phi(\zeta-C)=\frac{V}{V_0}\int_0^{\zeta/V}\frac{A+\sqrt{e^{2t}+A^2+1}}{\sqrt{e^{2t}+1}}\,dt,$

où $A=\frac{1}{2}\left(\frac{2HV_0}{\pi V}-\frac{\pi H}{2HV_0}\right)$.

42.34. Notons $k=\frac{2V_0}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$. Alors $\alpha\sim 2\ln\frac{2}{k}$ et pour tout ζ fixé,

$$\Phi(i\alpha+\zeta)\sim 1+\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\int_0^{\operatorname{tg}\zeta/\beta}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

42.35. Déterminons les nombres $0<k<1$ et $\lambda>0$ d'après les nombres α et β à partir des relations

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\frac{\pi\lambda\beta}{n},\quad \int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}=\lambda\alpha.$$

Alors, le rapport entre les grandeurs α, β et V_0 est donné par la formule

$$V_0=\frac{1}{i}\int_{i\alpha}^{i\alpha+\pi\beta/n}\sqrt{\operatorname{sn}\lambda t+i\operatorname{cn}\lambda t}\,dt,$$

où

$$\operatorname{sn}\lambda t=\operatorname{sn}(\lambda t\,;\,k),$$
$$\operatorname{cn}\lambda t=\operatorname{cn}(\lambda t,\,k).$$

